FACH HOCH SCHULE JENA UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES **Fachbereich SciTec**	**Elektrotechnikpraktikum** **Studiengang FT/LOT/PT/PVHT (B.Eng.)** Prof. Dr. Endter	Versuch 5 *30. März 2010*

Sinusstromkreis (Impedanz (Frequenzabhängigkeit, Zeigerdiagramm), Frequenzgang)

Studiengang/Set: .... Praktikumsplatz-Nr.: ..... Datum: ....

Teilnehmer 1: ....
(Protokollant) (Blockschrift) (Unterschrift)

Teilnehmer 2: ....
(Blockschrift) (Unterschrift)

Note: ....

Datum: ....

....
Unterschrift

Literatur:

Altmann/Schlayer	Elektrotechnik (Lehr- und Übungsbuch) Fachbuchverlag Leipzig 1995, S. 175-210
Moeller u.a.	Grundlagen der Elektrotechnik Teubner Stuttgart 1994, S.307-354
Busch, R.	Elektrotechnik und Elektronik Teubner Stuttgart 1994, S.135-158

1. Einführung

1.1 Erforderliche Begriffe und Gesetzmäßigkeiten

komplexe Algebra, Zeigerdarstellung harmonischer Größen, Drehzeiger, ruhender Effektivwertzeiger, Widerstandsoperator, komplexer Wechselstromwiderstand, Impedanz, Widerstandszeiger, Wirkwiderstand, Blindwiderstand, Scheinwiderstand, Zeigerdiagramm, symbolische Methode der Wechselstromtechnik, BODE-Diagramm (Frequenzgang), Amplitudengang, Phasengang, Grenzfrequenz

1.2 Grundlagen

In diesem Versuch wird das Verhalten der Bauelemente Widerstand, Kondensator und Spule sowie deren Kombinationen in Abhängigkeit von der Frequenz f untersucht. Dabei wird mit sinusförmigen zeitveränderlichen Spannungen $u(t)$ und Strömen $i(t)$ gearbeitet. Allen Betrachtungen liegen auch in diesem Fall das OHMsche Gesetz $u(t) = R\cdot i(t)$, der 1. KIRCHHOFFsche Satz $\sum i_k(t) = 0$ und der 2. KIRCHHOFFsche Satz $\sum u_l(t) = 0$ zugrunde.
Die Rechnungen werden jedoch erheblich einfacher, wenn die komplexe Schreibweise eingeführt wird:

Eine beliebige harmonische Funktion

$x(t) = \hat{x}\cdot\sin(\omega t+\varphi_x)$ mit $\hat{x}$ - Signalamplitude, φ_x - Nullphasenwinkel und $\omega = 2\pi f$ - Kreisfrequenz

lässt sich auf Grund der EULERschen Gleichungen auch wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{x(t)} = \mathbf{Re}[\underline{\hat{x}}\cdot e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\,\mathbf{Re}[\underline{X}\cdot e^{j\omega t}] \quad \text{mit} \quad \underline{X} = X\cdot e^{j\varphi_x} \quad \text{und} \quad X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$$ *(X - Effektivwert der harm. Größe).*

(Beachte: Da sich das Zeitsignal somit als **Imaginärteil** des Produkts der komplexen Größe $\underline{X}$ mit dem **Einheitsdrehzeiger** $\mathbf{e^{j\omega t}}$ formuliert, lässt es sich also auch als Projektion eines **Drehzeigers** auf die imaginäre Achse interpretieren!)

Wird $\underline{X}$ in der GAUSSschen Zahlenebene dargestellt, bildet sie dort den sogenannten **ruhenden Effektivwertzeiger** (Bild 1). Der Ort, auf den der Zeiger zeigt, ist die komplexe Größe $\underline{X}$, welcher damit eindeutig ein durch diese Größe charakterisierter harmonischer Vorgang eineindeutig zugeordnet ist. Ein relativ kompliziertes Liniendiagramm als Bild einer harmonischen Funktion wird somit durch einen Punkt ersetzt (abgebildet). Der Mathematiker spricht in dem Zusammenhang von einer Funktionaltransformation!

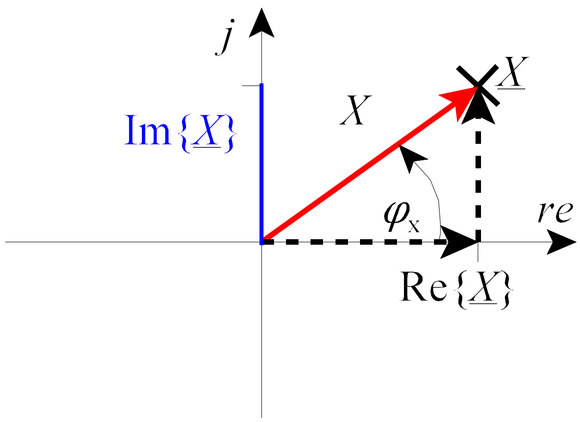


Bild 1 Zeiger und seine Parameter

Wie dem nebenstehenden Bild außerdem zu entnehmen ist, gelten folgende Zusammenhänge zwischen den in der Praxis wichtigsten Beschreibungsmöglichkeiten der komplexen Größe:

$$\underline{X} = X \cdot e^{j\varphi_x} = \boldsymbol{Re}\{\underline{X}\} + j\,\boldsymbol{Im}\{\underline{X}\}$$

mit

$$X = \sqrt{\mathbf{Re}\{\underline{X}\}^2 + \mathbf{Im}\{\underline{X}\}^2} \qquad \varphi_x = \arctan\frac{\mathbf{Im}\{\underline{X}\}}{\mathbf{Re}\{\underline{X}\}} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{Re}\{\underline{X}\} = X \cdot \cos\varphi_x \quad \mathbf{Im}\{\underline{X}\} = X \cdot \sin\varphi_x \;.$$

Prägen Sie sich diese zwischen den Größen existierenden Zusammenhänge mit Hilfe der Gesetzmäßigkeiten am rechtwinkligen Dreieck so ein, dass Sie sie jederzeit reproduzieren können!

Aus der Vorlesung (Kapitel: Sinusstromtechnik) ist Ihnen weiterhin bekannt, dass das Einführen der komplexen Symbole anstelle der harmonischen Zeitfunktionen für die Spannungen und Ströme eines Netzwerkes auch als **symbolische Methode** der Elektrotechnik bezeichnet wird. Sie hat den großen Vorteil, dass ihre Anwendung die durch Aufstellen von Maschen- oder Knotensätzen ansonsten entstehenden Systeme von Differentialgleichungen in einfache algebraische Ausdrücke umformt. Die entstandenen komplexen Maschen- und Knotensätze lassen sich grafisch als Kombinationen von Spannungs- bzw. Stromzeigern in der GAUSS-Ebene darstellen (**Strom-Spannungs-Zeigerdiagramme**), woraus nach den Gesetzmäßigkeiten der Zeigeraddition die gesuchte elektrische Größe regelrecht konstruiert werden kann. Andererseits lassen sie sich aber auch mit Mitteln der komplexen Algebra einfach lösen. Wurde so die gesuchte elektrische Größe als symbolische (komplexe!) Größe bestimmt, bedarf es nunmehr lediglich der Ermittlung des Imaginärteils dieser Größe, um im Sinne obiger Feststellung schließlich zur gesuchten reellen Zeitfunktion zu gelangen.

In diesem Zusammenhang müssen die in den komplexen Maschen- bzw. Knotensätzen auftretenden Koeffizienten vor den elektrischen Größen als Widerstands- bzw. Leitwertoperatoren gedeutet werden. Diese geben an, wie ein komplexer Strom in eine komplexe Spannung überführt wird bzw. umgekehrt. Im allgemeinen sind sie selbst komplexwertig und somit ebenfalls durch Zeiger in der komplexen Ebene darstellbar (**Widerstandszeigerdiagramm**).

Mit den Widerstands- bzw. Leitwertoperatoren (**Impedanz** $\underline{Z}$ bzw. **Admittanz** $\underline{Y}$) ergibt sich noch eine einprägsamere Formulierung der **SYMBOLISCHEN METHODE** der Elektrotechnik. Sie lautet:

Formuliere in der Sinusstromtechnik wie in der Gleichstromtechnik, d.h. verwende alle bekannten Netzwerkberechnungsmethoden, nur, ersetze alle Ströme, Spannungen und Widerstände durch ihre komplexen Symbole!

In der einfachsten Form ergibt sich damit die Aussage des OHMschen Gesetzes:

im Gleichstromkreis:

$$U = R \cdot I = \frac{I}{G}$$

im Sinusstromkreis:

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}}$$

$\underline{Z}$ ist der komplexe **Widerstandsoperator** (oft mit **Impedanz** bezeichnet), sein Kehrwert ist der **Leitwertoperator** (oder die **Admittanz**). Der **Scheinwiderstand** Z ist der **Betrag der Impedanz**, der Scheinleitwert sinngemäß der Betrag der Admittanz.

Für die drei elektrotechnischen Grundschaltelemente gilt:

OHMscher Widerstand R: $\underline{Z}_R = R$; $\boxed{Z_R = R}$ $\qquad \underline{Y}_R = \frac{1}{R} = G$

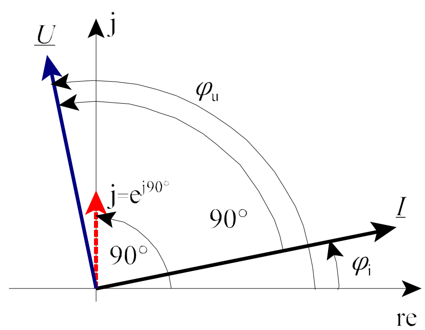
Kapazität C: $\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = jX_C$; $\boxed{Z_C = |X_C| = \frac{1}{2\pi f\, C}}$ $\qquad \underline{Y}_C = jB_C = j(-\frac{1}{X_C}) = j\omega C$

Induktivität L: $\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$; $\boxed{Z_L = X_L = 2\pi f\, L}$ $\qquad \underline{Y}_L = jB_L = j(-\frac{1}{X_L}) = -j\frac{1}{\omega L}$

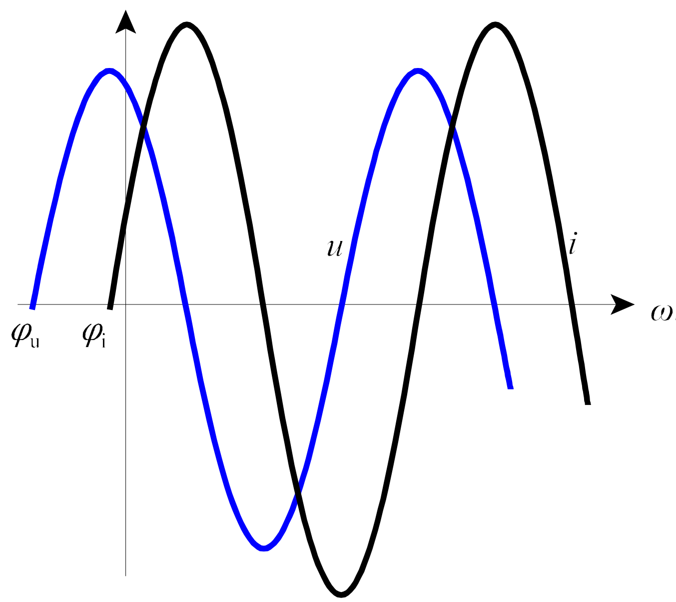
Da wegen $j = -\frac{1}{j} = e^{j90°}$ die Multiplikation einer komplexen Größe (Zeiger) mit j einer Drehung der Größe um 90° im mathematisch positiven Sinn und die Division durch j (gleichbedeutend mit der Multiplikation mit -j) einer Drehung um -90°, also entgegen dem mathematisch positiven Sinn in der GAUSS-Ebene entspricht, sind Spannung und Strom an den beiden (idealen) Blindschaltelementen somit um 90° zueinander phasenverschoben und am (idealen) OHMschen Widerstand sind sie in Phase!

Beispiel: $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} = j \cdot \omega L \cdot \underline{I} = \omega L \cdot j \cdot \underline{I} = \omega L \cdot e^{j90°} \cdot \underline{I} = \omega L \cdot I \cdot e^{j(\varphi_i + 90°)} = U \cdot e^{j\varphi_u}$ d.h. $\varphi_u = \varphi_i + 90°$.

Dies lässt sich nur so interpretieren, dass an der Induktivität die **harmonische** Spannung dem Strom um 90° vorauseilt, wie das Zeitdiagramm erkennen lässt ("An Induktivitäten die Ströme sich verspäten!"... Erst die Spannung, dann der Strom!)!
Praktisch treten jedoch stets nur Kombinationen dieser Grundschaltelemente auf, wodurch in der Regel von den idealen Verhältnissen abweichenden Phasenwinkeln auftreten. Selbst die einzelnen realen Widerstände, Kondensatoren oder Spulen müssen häufig durch Kombinationen von Grundschaltelementen beschrieben werden, was in ihren **Ersatzschaltungen** zum Ausdruck kommt.



Zeigerdiagramm



Zugehöriges Zeitdiagramm (nicht maßstäblich!)

1.3 Vorbereitungsaufgaben

1. Welche Bedeutung haben *R* bzw. *G* und *X* bzw. *B* für die Wechselstromwiderstände bzw. -leitwerte? Skizzieren Sie das Widerstandszeigerdiagramm der Luftspule (1000 Wdg.; $L \approx 20$ mH) für 100 Hz und kennzeichnen Sie darin *R*, *X* und *Z*!
2. Ermitteln Sie die Frequenzabhängigkeit der Bauelemente *R*, *L* und *C* die in 2.1 verwendet werden und die Reihenschaltung von *R* und *L* in dem dort angegebenen Frequenzbereich. Stellen Sie die Ergebnisse in den vorbereiteten Diagrammen auf den Seiten 6 und 7 (oder besser noch eigenes spezielles Millimeterpapier mit linearem und doppeltlogarithmischem Maßstab) dar. Die Graphen sollten als dünne oder gestrichelte Linien erkennbar sein, um Ihre Messergebnisse damit vergleichen zu können!
3. Ermitteln Sie für die in 2.2 empfohlenen Frequenzen die theoretischen Werte von Betrag k_u und Phase Φ des Spannungsübertragungsfaktors für den dort angegebenen RC-Tiefpass und tragen Sie diese in die Tabelle auf S. 5 ein.
4. Stellen Sie für den in Aufgabe 2.2 angegebenen RC-Tiefpass sowohl das Widerstands- als auch das Strom-Spannungszeigerdiagramm maßstäblich für dessen Grenzfrequenz dar (U_1 = 1V; *U*: 0,2V/cm, *I*: 0,1mA/cm, *R*: 0,4kΩ/cm) und bestimmen Sie daraus Betrag und Phase des Übertragungsfaktors für diesen Fall!

2. Versuchsdurchführung

2.1 Frequenzabhängigkeit von Scheinwiderständen

Messen Sie mit der Messanordnung in Bild 2 die **Scheinwiderstände *Z*** der drei elektrotechnischen Grundelemente *R*, *L* und *C* sowie der Reihenschaltung von *R* und *L* in Abhängigkeit von der Frequenz *f*.
Als Bauelemente verwenden Sie ***R* = 1,5 kΩ, *C* = 10 nF** und für ***L*** wieder die an Ihrem Versuchsplatz vorhandene Luftspule mit **1000 Windungen**. Mit dem Generator stellen Sie an der jeweiligen Impedanz ein **Sinussignal** von ca. *U* = 4,5 V ein. Messen Sie danach mit den Digitalmultimetern (AC-Betrieb!) die Effektivwerte von Strom und Spannung bei folgenden Frequenzen:

1 kHz; 2 kHz; 4 kHz, 7 kHz; 10 kHz; 15 kHz; 20 kHz; 30 kHz; 50 kHz sowie 100 kHz

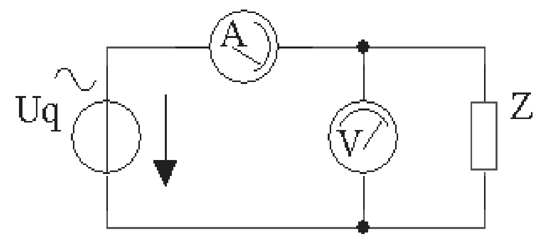


Bild 2 Bestimmung des Scheinwiderstandes *Z*

> Achten Sie darauf, dass in der Anzeige der Digitalmultimeter AC erscheint! Betreiben Sie das Amperemeter i.d.R. im festen Strommessbereich von 5 mA! (Die Messwerte oberhalb 20 kHz sind infolge Erreichens der Frequenzgrenze der Multimeter zunehmend fehlerbehaftet! Hier bietet sich an, die Konstanz der Spannungsamplitude am Widerstand mit dem Oszi zu kontrollieren, dessen Frequenzgrenze ja bei 100 MHz liegt!)

Auswertung:

- *Tragen Sie die sich ergebenden Scheinwiderstände* Z ***bereits während des Versuches*** *sowohl in linearem als auch in doppeltlogarithmischem Maßstab in die vorbereiteten Diagramme ein! Erklären bzw. begründen Sie die Funktionsverläufe! Gehen Sie dabei besonders auf Abweichungen von der Theorie ein!*
- *Bestimmen Sie aus den Diagrammen im doppeltlogarithmischem Maßstab für die Frequenz 7 kHz an Hand des Scheinwiderstandes die Werte für R, C und L. Vergleichen Sie diese mit der Angabe zum Bauelement. Geben Sie die Abweichungen in % an?*
- ***Konstruieren*** *Sie aus den Messwerten für die Scheinwiderstände von R und L bei 15 kHz das Widerstandszeigerdiagramm der Reihenschaltung R+L in Millimeterpapier und vergleichen Sie den sich daraus ergebenden Gesamtscheinwiderstand der Reihenschaltung mit dem Messwert der Kombination! (Beachten Sie den Kupferwiderstand der Spule!)*

2.2 Frequenzgang (BODE-Diagramm) eines RC-Tiefpass

Realisieren Sie unter Verwendung der in Aufgabe 2.1 untersuchten Bauelemente einen RC-Tiefpass, indem Sie die Schaltung nach Bild 3 aufbauen.

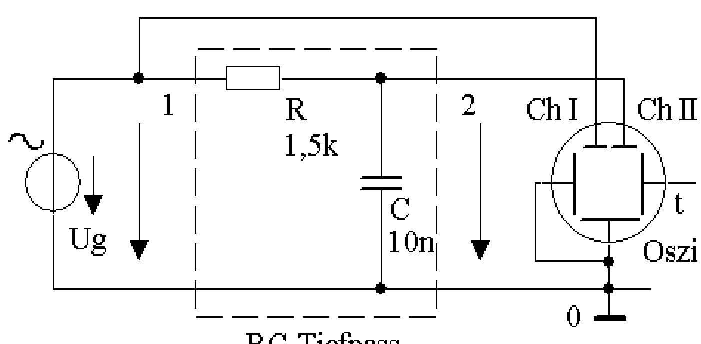


Bild 3 Messschaltung zur Ermittlung des BODE-Diagramms

Nehmen Sie den **Amplitudengang** des Spannungsübertragungsfaktors $\boldsymbol{k_u(f) = \hat{u}_2/\hat{u}_1}$ **(=** $\boldsymbol{U_2/U_1}$**)** der Schaltung mit Hilfe des Oszilloskops auf. Stellen Sie dazu $\hat{u}_1$ auf konstant 4,0 V ein (ggf. am Generator ständig nachregeln!) und wählen Sie für $\hat{u}_1$ eine optimale Ablenkempfindlichkeit! Messen Sie bei jeder Frequenz auch die **Phasenverschiebung** φ_{u2} - φ_{u1} zwischen Ausgangsspannung $u_2(t)$ und Gesamtspannung $u_1(t)$ vorzeichenrichtig!

Der Amplitudengang hätte auch über den Effektivwert gemessen werden können, da zwischen Effektivwert und Amplitude ein konstantes Umrechnungsverhältnis besteht. Die im Praktikum einsetzbaren Effektivwertmessgeräte besitzen aber selbst ein Tiefpassverhalten ab ca. 20 kHz, wodurch die Messung verfälscht würde!

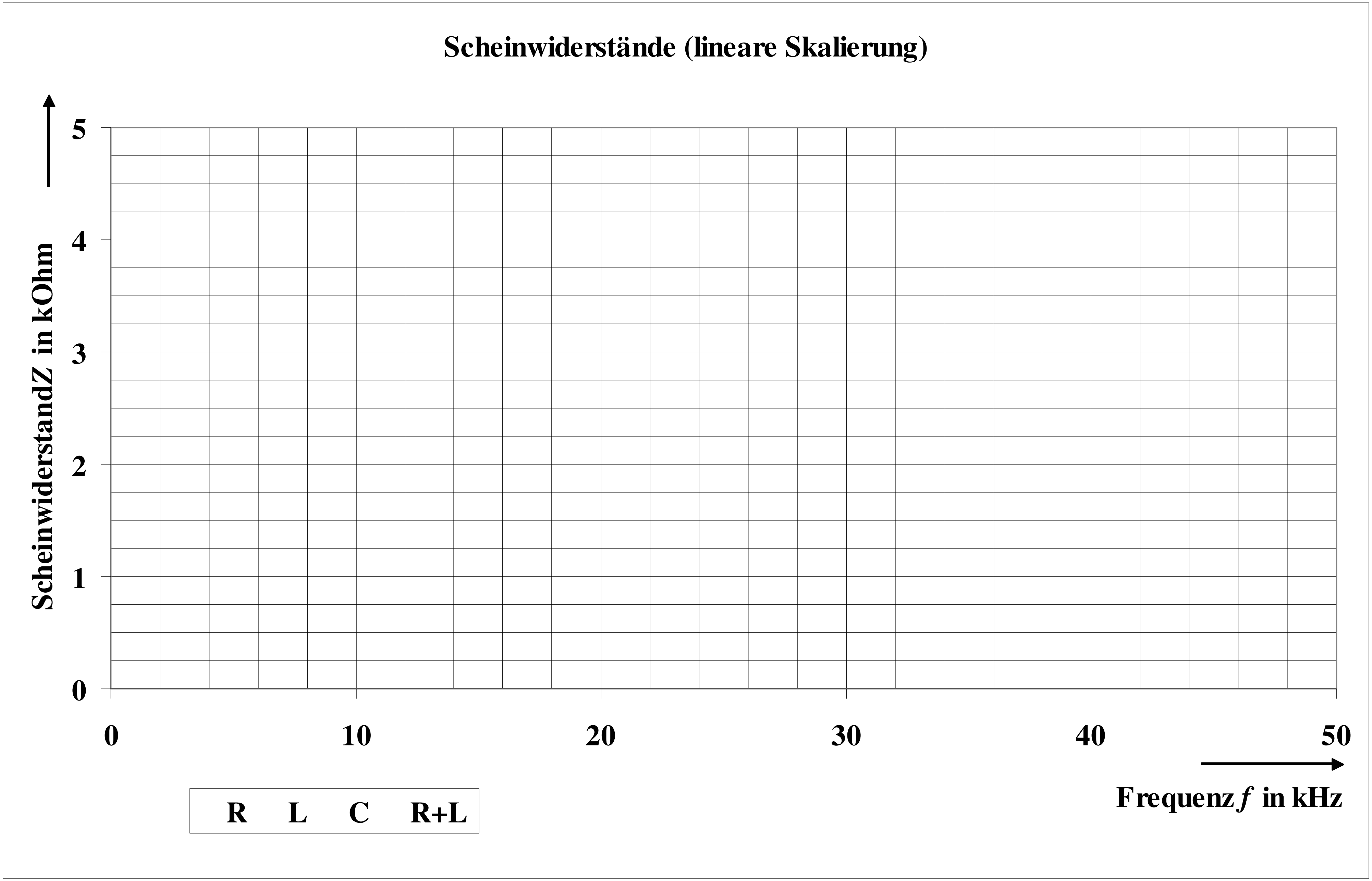
Für die Phasenmessung ist es zweckmäßig $u_1(t)$ auf Kanal I (Ch I) und $u_2(t)$ auf Kanal II (Ch II) zu legen und auf Kanal I so zu triggern, dass $\varphi_{u1} = 0°$ ist. Damit wird $\Phi(f) = \varphi_{u2}$! Stellen Sie dann bei jeder Messfrequenz den Zeitablenkkoeffizienten so ein, dass eine halbe Periode (≙ 180°) über die Bildschirmbreite (10 DIV) dargestellt wird. Damit erleichtern Sie sich die Phasenmessung erheblich, da Sie dadurch φ ohne Umrechnung direkt vom Bildschirm ablesen können (1 DIV = 18°)!

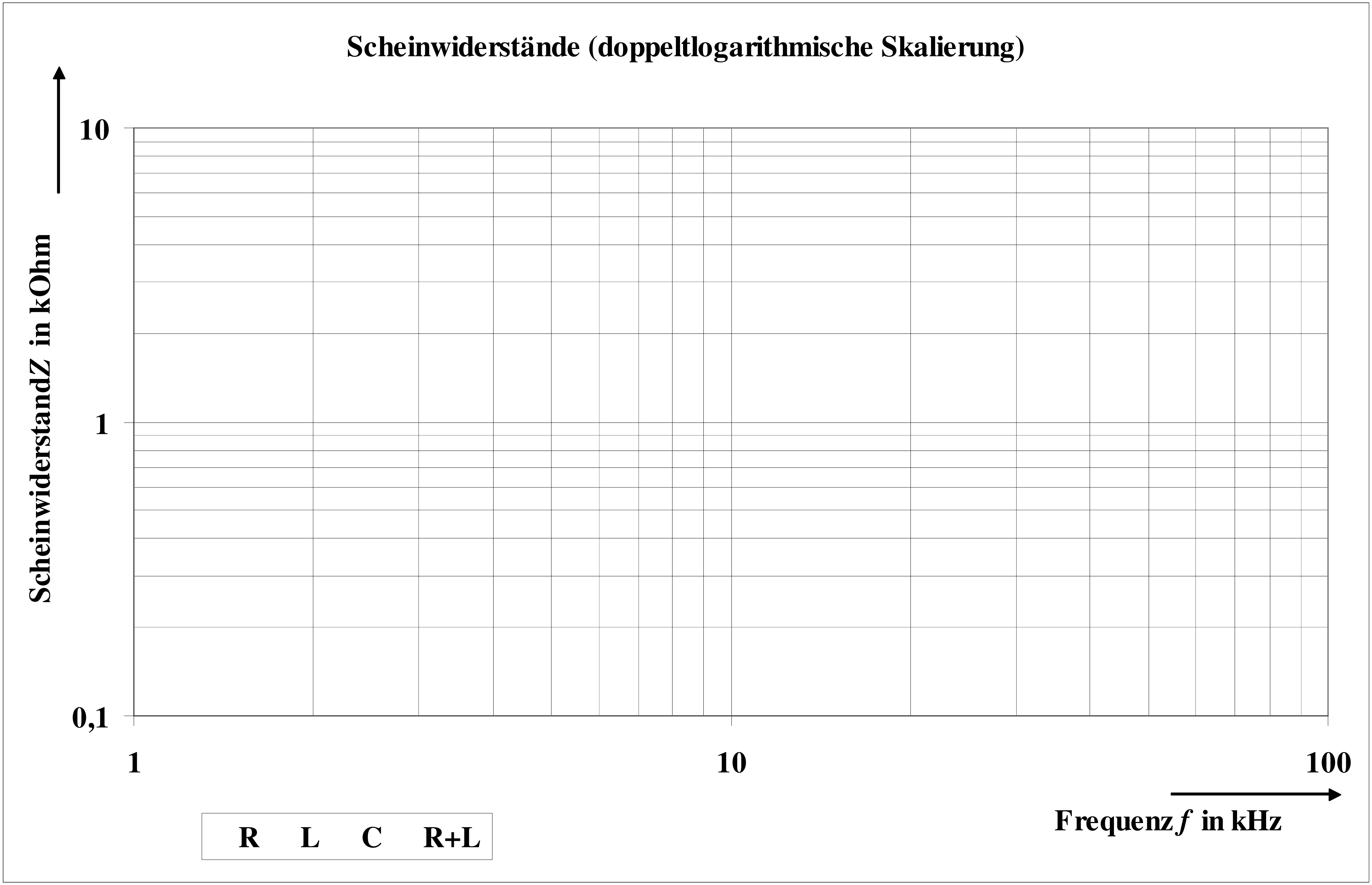
$\hat{u}_1 = 4{,}0$ V = const.:

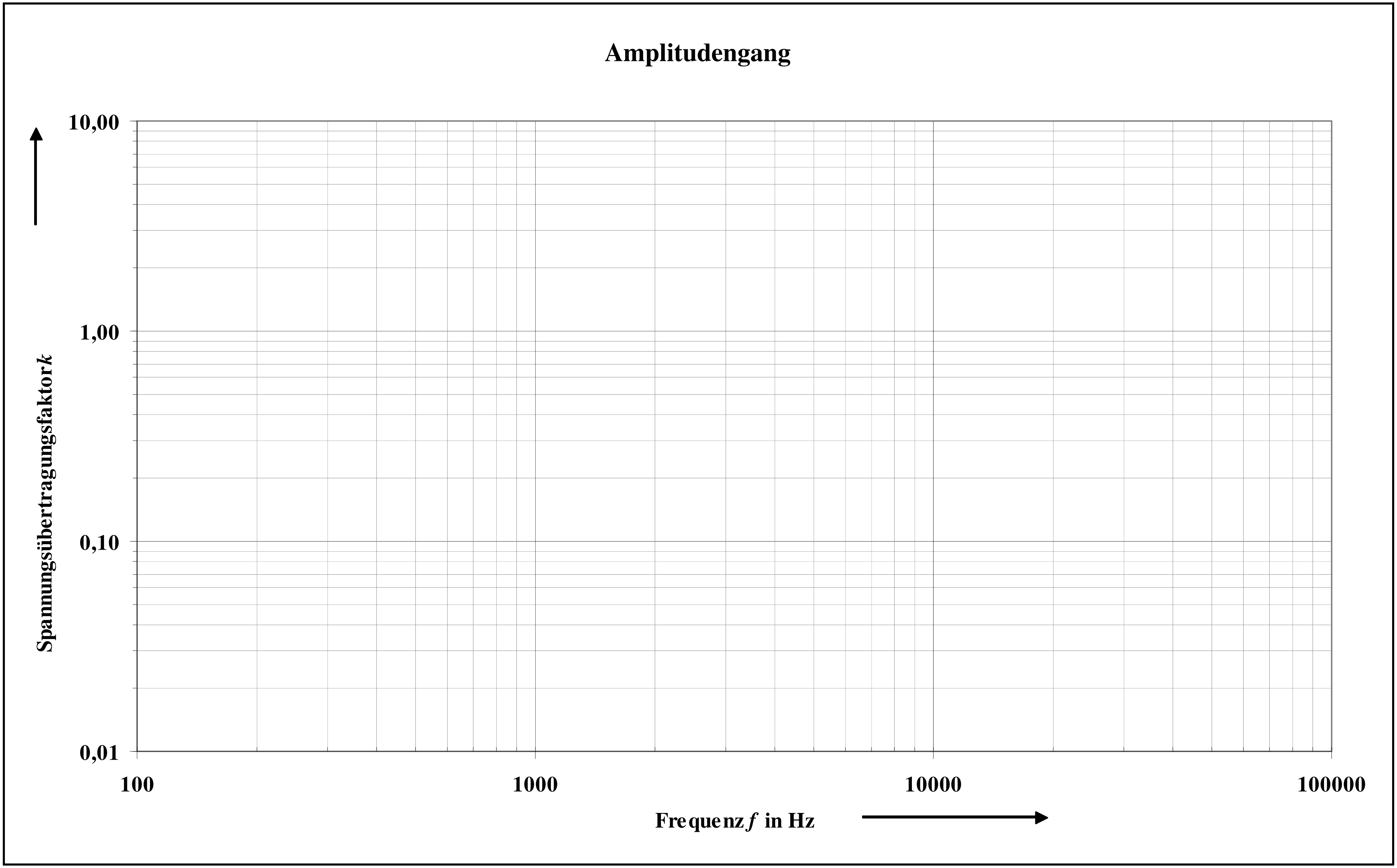
***f* /Hz**	**100**	**250**	**500**	**1000**	**2500**	**5000**	**10000**	**25000**	**50000**	**100000**
$\hat{u}_2$/V										
k_u										
Φ/ °										
$k_{u,th}$										
Φ_{th}/ °										

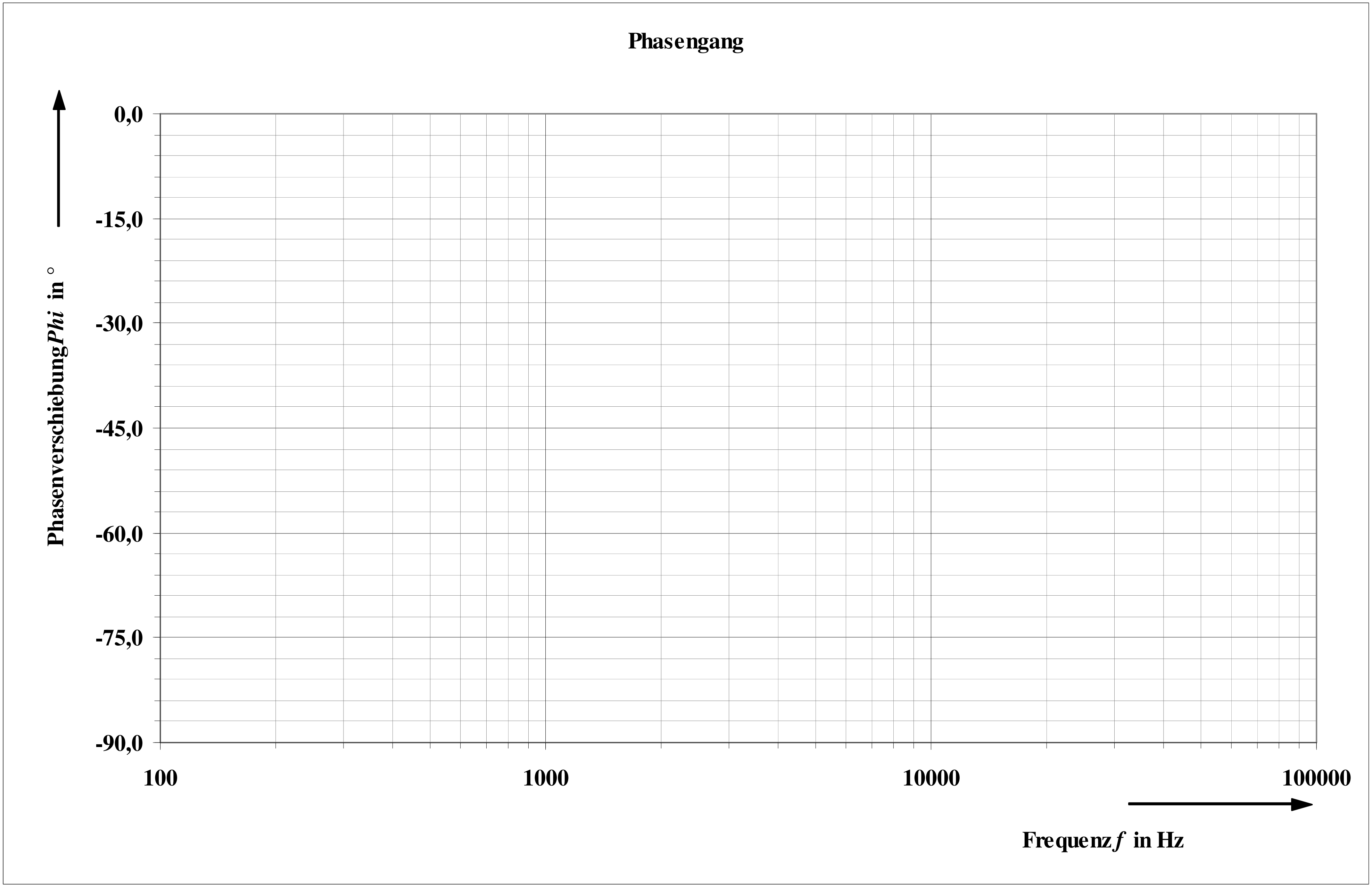
Auswertung:

- *Stellen Sie den gemessenen Amplitudengang gemeinsam mit dem theoretischen Amplitudengang in doppeltlogarithmischem Maßstab dar. Verfahren Sie analog mit dem Phasengang im halblogarithmischen Maßstab (Vorlagen Seite 8 und 9 oder besser spezielles Diagrammpapier).*
- *Kennzeichnen Sie die **Grenzfrequenz** der Schaltung in beiden Diagrammen. Übertragen Sie diesen Werte in das doppeltlogarithmische Diagramm von 2.1. und interpretieren Sie die Situation?*


Scheinwiderstände (lineare Skalierung)
ScheinwiderstandZ in kOhm
5
4
3
2
1
0
0
10
20
30
40
50
Frequenz f in kHz
R
L
C
R+L


Scheinwiderstände (doppeltlogarithmische Skalierung)
Scheinwiderstand Z in kOhm
10
1
0,1
1
10
100
Frequenz f in kHz
R L C R+L


Amplitudengang
10,00
1,00
0,10
0,01
Spannungsübertragungsfaktor k
100
1000
10000
100000
Frequenz f in Hz


Phasengang
Phasenverschiebung *Phi* in °
0,0
-15,0
-30,0
-45,0
-60,0
-75,0
-90,0
100
1000
10000
100000
Frequenz *f* in Hz