1. Anwendung von Eigenwerten und Eigenvektoren in der Bildverarbeitung

Es lässt sich zeigen, dass die Hauptachsenrichtungen von Objekten den Eigenvektoren der folgenden Kovarianzmatrix entsprechen:

$$\operatorname{cov}\left[I(x,y)\right] = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_{20}}{\mu_{00}} & \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{00}} \\ \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{00}} & \dfrac{\mu_{02}}{\mu_{00}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu'_{20} & \mu'_{11} \\ \mu'_{11} & \mu'_{02} \end{pmatrix} \qquad mit\ \mu_{00} = M_{00}$$

Hierin sind μ_{xy} die ***Zentralmomente*** des Objektes und M_{00} das geometrische Moment nullter Ordnung (Summe über alle Grauwerte des Objektes)

2. Mathematische Grundlagen zu Eigenwerten und Eigenvektoren

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren, Formalismus dargestellt am Beispiel einer 2x2-Matrix

Gegeben: Matrix mit komplexen oder reellen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Zu dieser Matrix ist eine Matrix gleicher Dimension mit dem Parameter λ hinzuzu-addieren. Diese Matrix hat die Form:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Summe beider Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$$

Mathematische Grundlagen / Forts.

Bestimmung und Nullsetzen der Determinante:

$$(a_{11} - \lambda) \cdot (a_{22} - \lambda) - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen:

$$\lambda^2 - \lambda \cdot (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = 0$$

→ Quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für λ:

$$\boxed{\lambda_{1;2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} + a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}}$$

Die beiden Lösungswerte für λ sind die ***Eigenwerte*** der Matrix

Mathematische Grundlagen / Forts.

Die Eigenwerte sind wiederum in die ursprüngliche Matrix einzusetzen (2 Lösungen, also 2 Matrizen):

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 \end{pmatrix}$$

Interpretation als Gleichungssystem mit 2 Gln. und zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} x\cdot(a_{11}-\lambda_1) &+ y\cdot a_{12}=0 \\ x\cdot a_{21} &+ y\cdot(a_{22}-\lambda_1)=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x\cdot(a_{11}-\lambda_2) &+ y\cdot a_{12}=0 \\ x\cdot a_{21} &+ y\cdot(a_{22}-\lambda_2)=0 \end{aligned}$$

Eigenvektoren der Matrix: Lösungswertepaare x;y und ganzahlige Vielfache beider Gleichungssysteme

Achtung: Nichtriviale, von null verschiedene, Lösungen der homogenen Gleichungssysteme; diese gibt es, wenn die Koeefizientendeterminante null ist.

Mathematische Grundlagen / Forts.

Zahlenbeispiel

Es sind die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix zu bestimmen:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Abziehen des Parameters λ von den Elementen der Hauptdiagonale:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Nullsetzen der Koeffizientendeterminante führt zur folgenden quadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

mit den Lösungen (Eigenwerten):

$$\lambda_1 = 4 \text{ und } \lambda_2 = -1$$

Mathematische Grundlagen / Forts.

Einsetzen beider Lösungen für λ in die Matrix (bzw. das homogene Gleichungssystem):

für $\lambda_1 = 4$:

$3x - 2y = 0$

$-3x + 2y = 0$

mit der Lösung $x = 2;\ y = 3$

für $\lambda_1 = -1$:

$-2x - 2y = 0$

$-3x - 3y = 0$

mit der Lösung $x = 1;\ y = -1$

Somit sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und ganzzahlige Vielfache davon

Eigenvektoren der Matrix **M**

3. Anwendungsbeispiel für Eigenvektoren in der Bildverarbeitung:

Bestimmung der Hauptachsen bzw. Halbachsenrichtungen von Objekten mit Hilfe von Eigenvektoren

Die Hauptachsenrichtungen von Bildobjekten, welche durch eine Punktmenge g(i,j) gegeben sind, entsprechen den ***Eigenvektoren der Kovarianzmatrix*** *dieser Objekte (siehe Vorl. “Grauwertstatistik”).*

Der ***Eigenvektor des größeren Eigenwertes*** *entspricht dabei der* ***Richtung größeren Hauptachse****, der* ***Eigenvektor des kleineren Eigenwertes*** *der* ***kleineren Hauptachse****.*

Anwendungsbeispiel für Eigenvektoren in der Bildverarbeitung:

Die Kovarianzmatrix lässt sich aus den Zentralmomenten wie folgt ermitteln (siehe Vorlesungskomplex “Grauwertstatistik”):

$$\operatorname{cov}[I(x,y)] = \begin{pmatrix} \dfrac{\mu_{20}}{\mu_{00}} & \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{00}} \\ \dfrac{\mu_{11}}{\mu_{00}} & \dfrac{\mu_{02}}{\mu_{00}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu'_{20} & \mu'_{11} \\ \mu'_{11} & \mu'_{02} \end{pmatrix} \qquad mit\ \mu_{00} = M_{00}$$

Anwendungsbeispiel für Eigenvektoren in der Bildverarbeitung:

Dabei sind

die geometrischen Momente:

$$M_{ij} = \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} x^i y^k \cdot g(x, y)$$

die Schwerpunktkoordinaten:

$$x_S = \frac{M_{10}}{M_{00}}; \qquad y_S = \frac{M_{01}}{M_{00}};$$

die Zentralmomente:

$$\mu_{ik} = \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} (x - x_s)^i (y - y_s)^k \cdot g(x, y)$$

Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Hauptachsen eines Objektes

Gegeben ist das folgende Objekt in einem Bildausschnitt:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Grauwerte

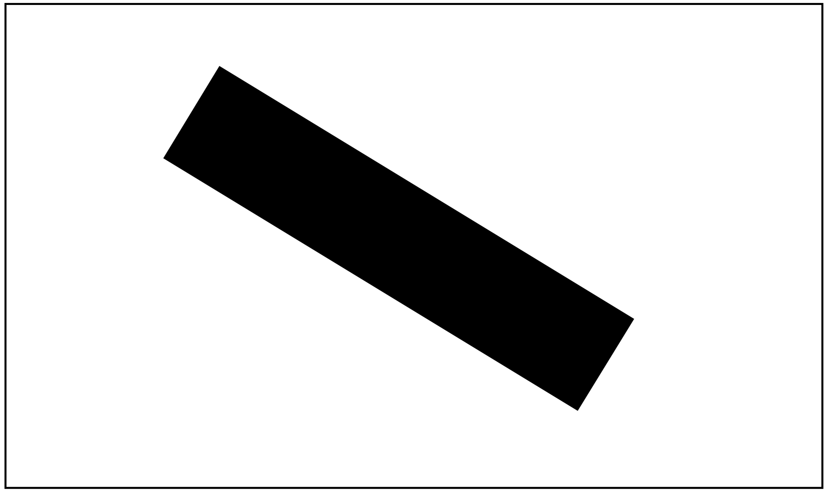


Bild (näherungsweise, Grauwerte invertiert und skaliert auf 0..255)

Zunächst Bestimmung der geometrischen Momente:

$$M_{00} = \sum_{x=0}^{M} g(x, y) = 14$$

$$M_{10} = \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} x \cdot g(x, y) = 63 \qquad M_{01} = \sum_{x=0}^{M} \sum_{y=0}^{N} y \cdot g(x, y) = 63$$

Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Hauptachsen eines Objektes

Ermittlung der Schwerpunktkoordinaten:

$$x_S = \frac{M_{10}}{M_{00}} = \frac{63}{14} = \underline{\underline{4{,}5}};\qquad y_S = \frac{M_{01}}{M_{00}} = \frac{63}{14} = \underline{\underline{4{,}5}};$$

Ermittlung der zentralen Momente μ_{20}; μ_{02} und μ_{11}:

$$\mu_{20} = \sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N}(x-x_s)^2 \cdot g(x,y) = \underline{\underline{27{,}5}}$$

$$\mu_{02} = \sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N}(y-y_s)^2 \cdot g(x,y) = \underline{\underline{27{,}5}}$$

$$\mu_{11} = \sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N}(x-x_s)(y-y_s) \cdot g(x,y) = \underline{\underline{22{,}5}}$$

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0
0	0	0	0	0	**1**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Hauptachsen eines Objektes

Aufstellen der Kovarianz-Matrix

$$\operatorname{cov}[I(x,y)] = \begin{pmatrix} \frac{\mu_{20}}{\mu_{00}} & \frac{\mu_{11}}{\mu_{00}} \\ \frac{\mu_{11}}{\mu_{00}} & \frac{\mu_{02}}{\mu_{00}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}96 & 1{,}6 \\ 1{,}6 & 1{,}96 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenwerte erhält man:

$\lambda_1 = 3{,}57;\ \lambda_2 = 0{,}357$

Somit ergeben sich folgende homogene Gleichungssysteme zur Bestimmung der Eigenvektoren für λ_1 und λ_2:

$-1{,}6x + 1{,}6y = 0$	$1{,}6x + 1{,}6y = 0$
$1{,}6x - 1{,}6y = 0$	$1{,}6x + 1{,}6y = 0$

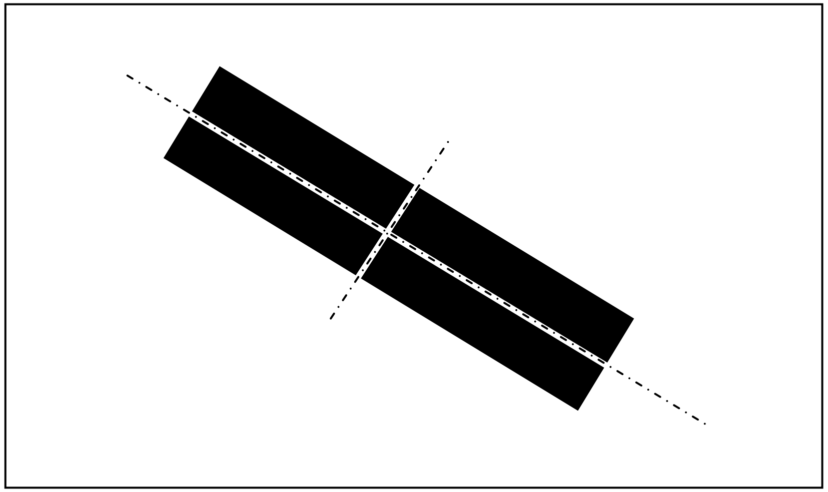
Die Lösungen (Eigenvektoren) lauten: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Hauptachsen eines Objektes

Damit ergeben sich für die Hauptachsen die folgenden Winkel:

für λ = 3,57: α = arctan(1 / 1) = **45°**

für λ = 0,357: α = arctan(-1/1) = **-45°**



Anwendungsbeispiel zur Bestimmung der Hauptachsen eines Objektes

Änderung der Verhältnisse bei Änderung des Grauwertprofils:

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	0	0	0	0
0	0	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	0	0	**1**	**1**	**1**	0	0
0	0	0	0	**1**	**1**	**1**	0
0	0	0	0	0	**15**	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

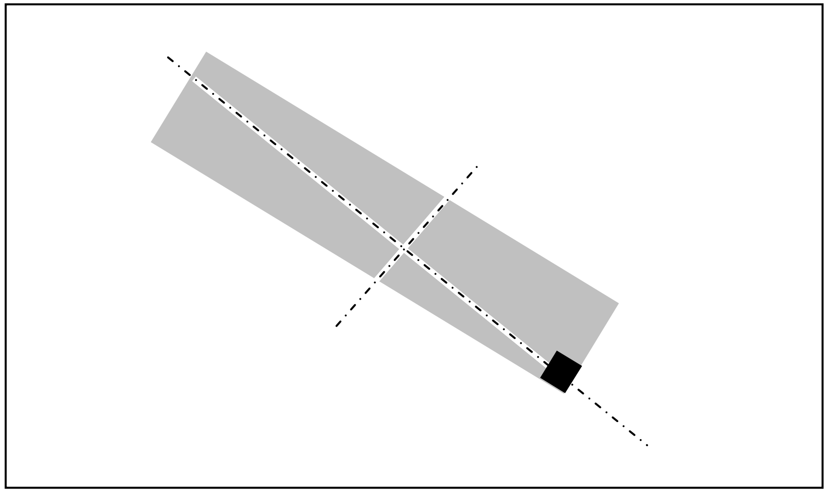


Bild (näherungsweise, Grauwerte invertiert und skaliert auf 0..255)

→ Verschiebung des Schwerpunktes und Drehung der Hauptachsen gegenüber ursprüngl. Profil mit homogener Grauwertverteilung

Literatur (empfohlen)

/1/ Lipschutz, S.: Lineare Algebra, Theorie und Anwendungen McGraw Hill Inc. 1977