Fouriertransformation allgemein

f-Form

$$x(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(jf) \cdot e^{j2\pi ft} dt$$

ω-Form

$$x(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$$

Variante der ω-Form:

Aufteilen des Faktors 1/2π auf die Hin- und Rücktransformation:

$$x(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(j\omega) \cdot e^{j\omega t} dt$$

mit $e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t)$

(Eulersche Formel)

Spezialfall periodische Funktionen

$$\underline{c_k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cdot e^{-jk2\pi f_0 t}\,dt \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c_k}\cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Vereinfachte Variante: Fourierreihenentwicklung ohne Transformation in den Bildraum für periodische Signale:

$$a_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underline{x_n}\cdot\cos(k\omega_0 t_n); \quad b_k = \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underline{x_n}\cdot\sin(k\omega_0 t_n);$$

Rückgewinnung des zeitabh. Signals: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot\cos(k\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_k\cdot\sin(k\omega_0 t_n);$

Beispiel: Es ist die Funktion $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$ hin- und rückzutransformieren

$$\underline{c_k} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t)\cdot e^{-jk2\pi f_0 t}\,dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t)\cdot(\cos(2\pi f_0 t) - j\sin(2\pi f_0 t))dt$$

Beispiel / Forts.

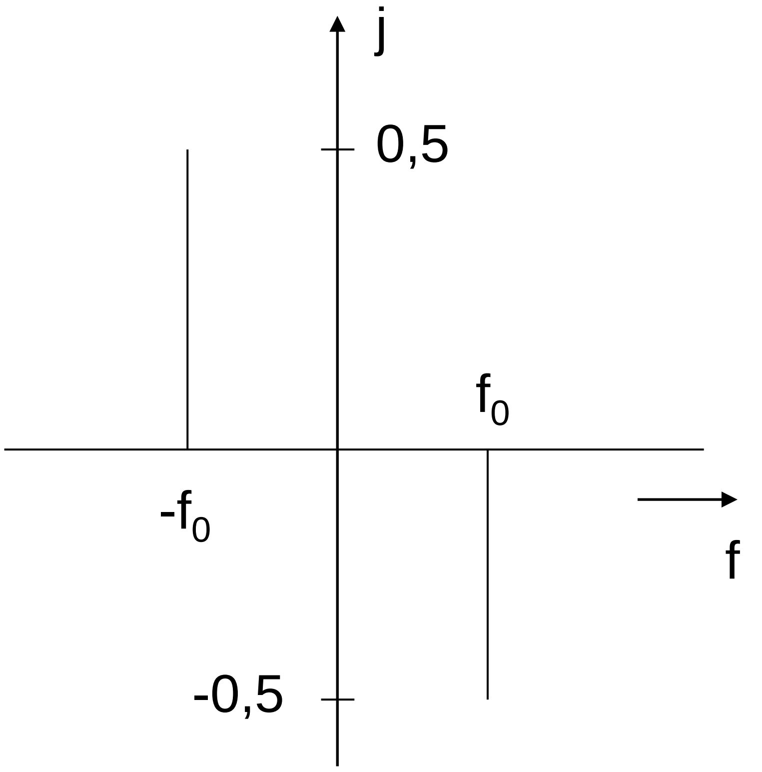
Von null verschiedene Lösungen für k=-1; +1 (nur Sinus-Anteile)

$$\underline{c_{-1}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(-2\pi f_0 t)\cdot(-j\sin(2\pi f_0 t)dt$$

$$= \frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(2\pi f_0 t)dt \qquad \underline{\underline{= \frac{j}{2}}}$$

$$\underline{c_1} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_0 t)\cdot(-j\sin(2\pi f_0 t)dt$$

$$= \frac{-j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(2\pi f_0 t)dt \qquad \underline{\underline{= -\frac{j}{2}}}$$



→ $x(jf) = 0{,}5\delta_0(f+f_0) - 0{,}5\delta_0(f-f_0)$

Beispiel / Forts.

Rücktransformation

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underline{c_k} \cdot e^{j2\pi f_0 t}$$

Da c_k nur für k=-1 und k=1 existieren, kann man schreiben:

$$x(t) = \frac{j}{2}(\cos(-2\pi f_0 t) + j\sin(-2\pi f_0 t) - \frac{j}{2}(\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)))$$

$$\underline{\underline{= \sin(2\pi f_0 t)}}$$