

2D-Fourieranalyse und Farbräume

Industrielle Bildverarbeitung, Vorlesung No. 12¹

M. O. Franz

¹ falls nicht anders vermerkt, sind die Abbildungen entnommen aus Burger & Burge, 2005. 

Übersicht

- 1 Diskrete 2D-Fouriertransformation
- 2 Windowing
- 3 Beispiele und Anwendungen
- 4 RGB- und HSV-Farbraum

Übersicht

- 1 Diskrete 2D-Fouriertransformation
- 2 Windowing
- 3 Beispiele und Anwendungen
- 4 RGB- und HSV-Farbraum

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

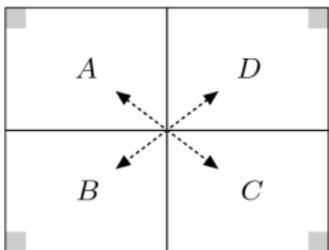
Für eine zweidimensionale, periodische Funktion $g(u, v)$ der Größe $M \times N$ ist die **2D-DFT**

$$\begin{aligned} G(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} e^{-i2\pi \frac{nv}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \end{aligned}$$

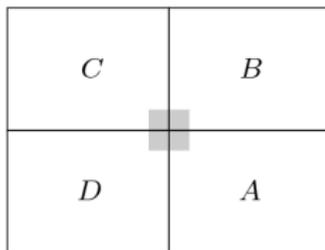
Inverse 2D-DFT⁻¹:

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) e^{i2\pi \frac{um}{M}} e^{i2\pi \frac{vn}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) e^{i2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)} \end{aligned}$$

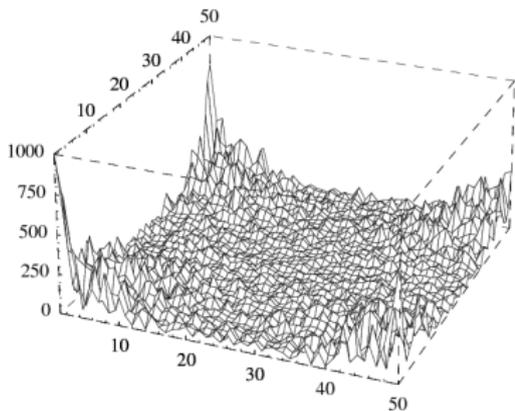
Zentrierte Darstellung



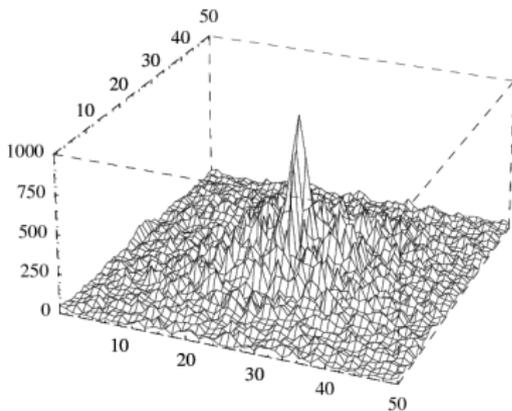
(a)



(b)



(c)



(d)

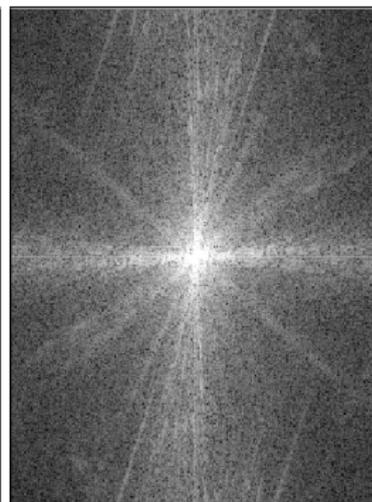
Darstellung als logarithmiertes Intensitätsbild



(a)

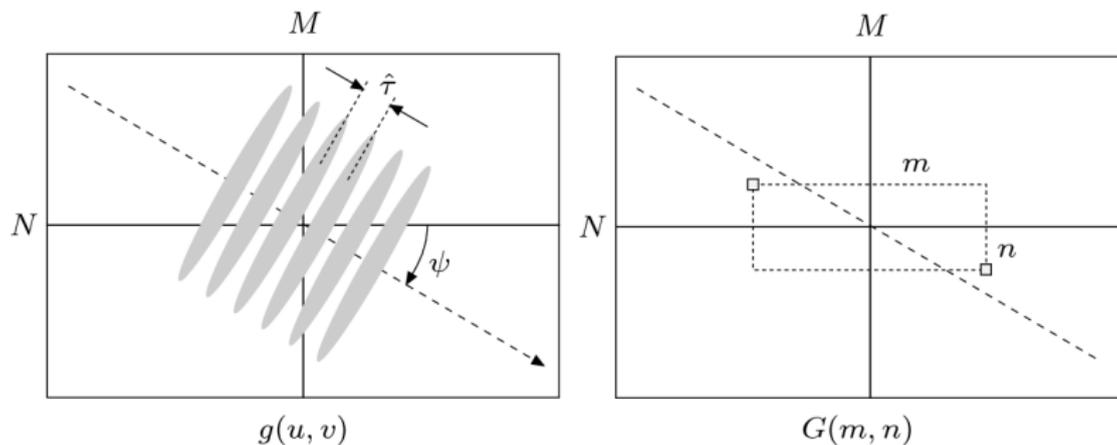


(b)



(c)

Frequenz und Orientierung



Effektive Frequenz in Wellenrichtung: $\hat{f}_{(m,n)} = \frac{1}{\tau} \sqrt{\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \left(\frac{n}{N}\right)^2}$

Orientierung: $\psi_{(m,n)} = \arctan_2\left(\frac{n}{N}, \frac{m}{M}\right)$ bzw. $(m, n) = \pm \hat{f}(M \cos \psi, N \sin \psi)$

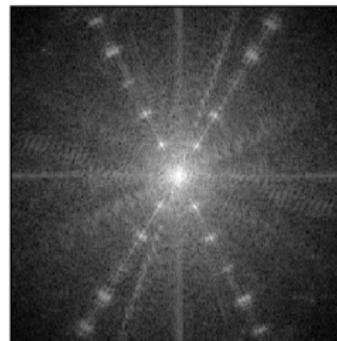
Richtungswinkel in Bild und Spektrum sind nur bei quadratischen Bildern gleich. \Rightarrow Korrektur durch quadratische Skalierung des Spektrums.

Geometrische Korrektur des 2D-Spektrums

(a)

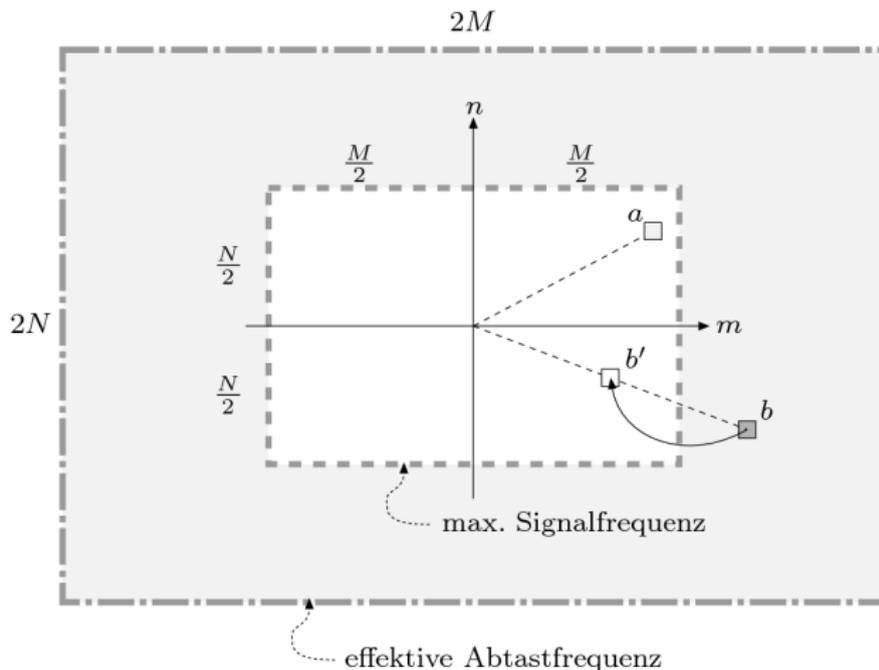


(b)



(c)

Frequenzlimits und Aliasing in 2D

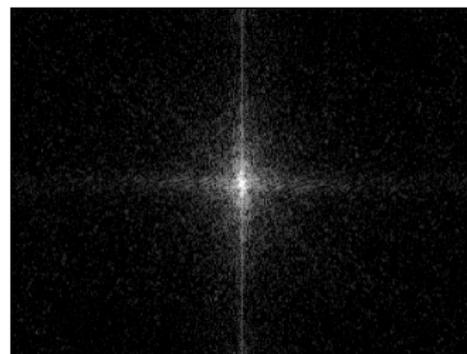


Effektive Abtastfrequenz ist am geringsten entlang der Koordinatenachsen, am höchsten entlang der Diagonalen.

Übersicht

- 1 Diskrete 2D-Fouriertransformation
- 2 Windowing**
- 3 Beispiele und Anwendungen
- 4 RGB- und HSV-Farbraum

Auswirkungen der Periodizität



Die implizite Annahme eines periodischen Bildes führt zu breitbandigen Signalen entlang der Koordinatenachsen durch die Diskontinuitäten an den Bildrändern.

Windowing

Zur Reduktion der durch die Periodizität verursachten Artefakte wird das gesamte Bild **vor** der DFT mit einer **Fensterfunktion** multipliziert:

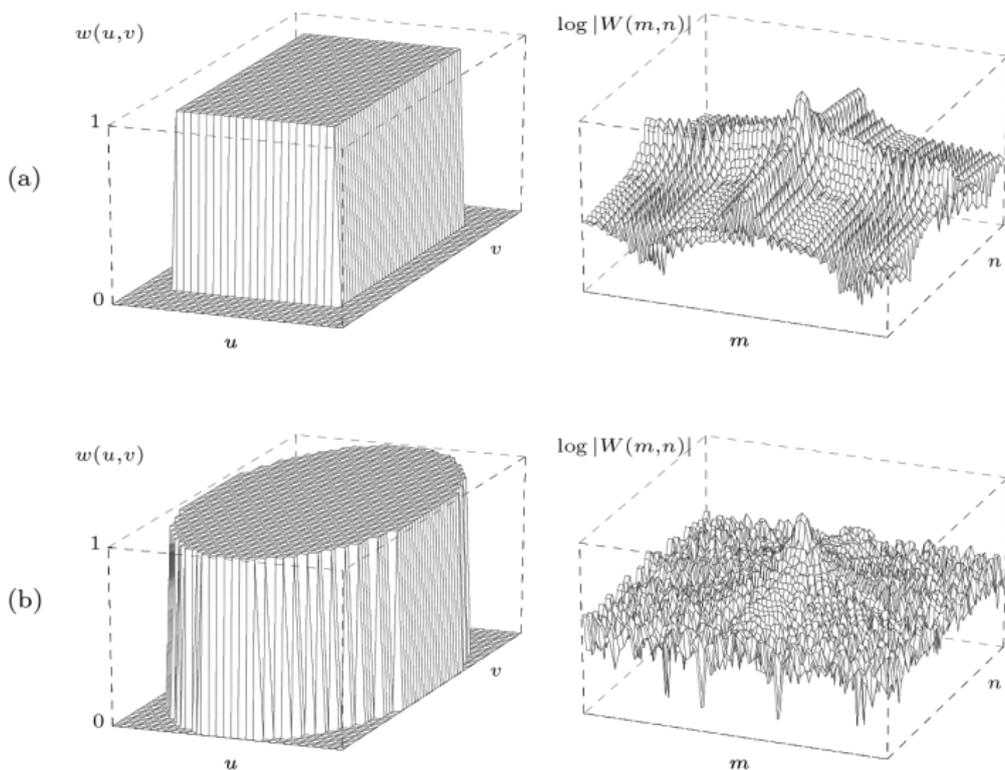
$$\tilde{g}(u, v) = g(u, v) \cdot w(u, v)$$

Die Fensterfunktion wird so gewählt, daß sie möglichst gleichmäßig an den Rändern gegen 0 abfällt und damit die Diskontinuitäten an den Bildrändern unterdrückt.

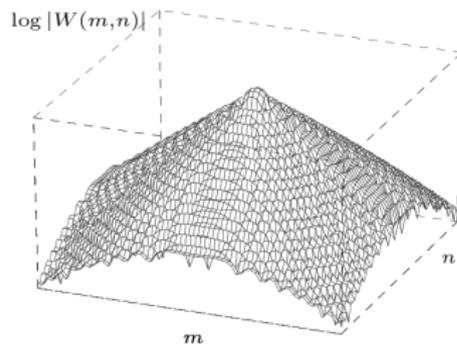
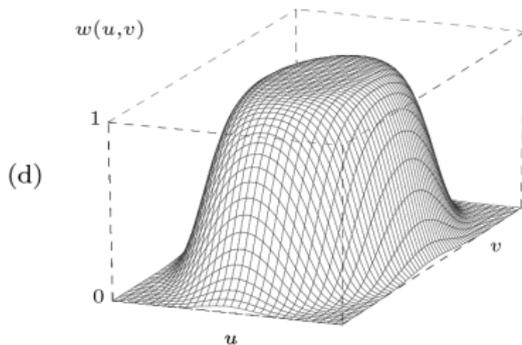
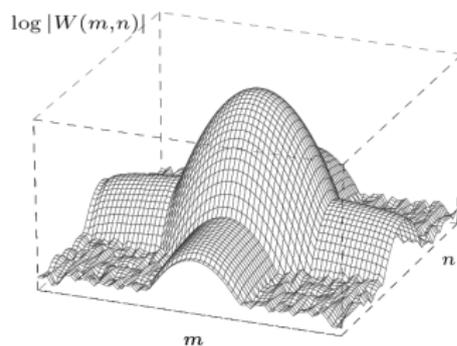
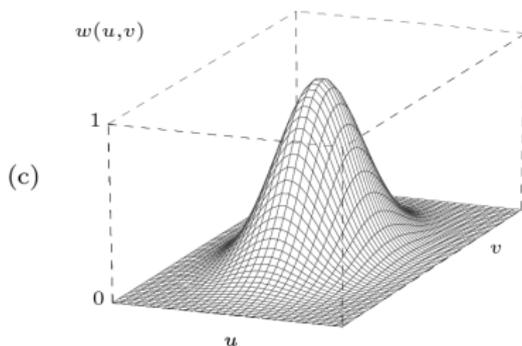
Aber: Multiplikation im Bildraum führt zu Faltung des Spektrums mit der DFT der Fensterfunktion im Frequenzraum.

Tradeoff: Je steiler $w(u, v)$ an den Bildrändern abfällt, desto größer ist der Bildanteil, der zum Spektrum beiträgt, aber desto stärker sind die Rand-Artefakte, und desto stärker wird das Spektrum "verwischt".

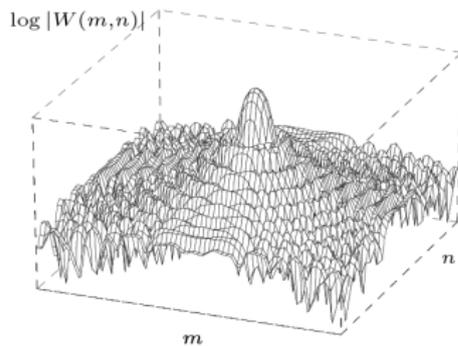
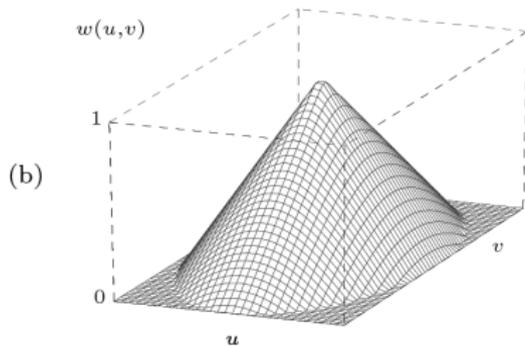
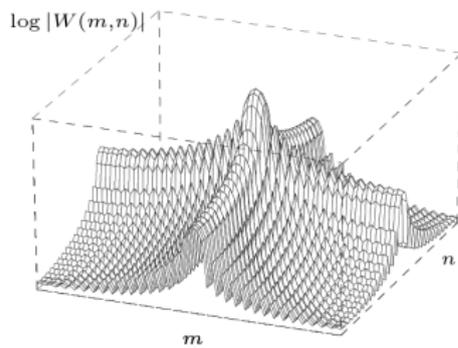
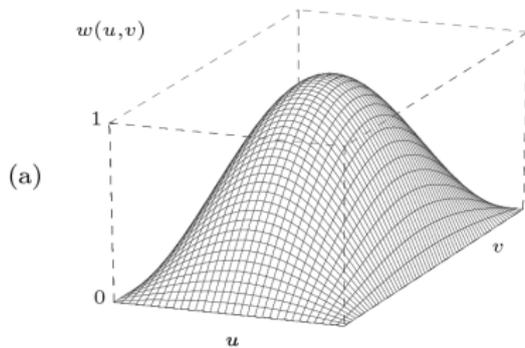
Rechteckiges und elliptisches Fenster



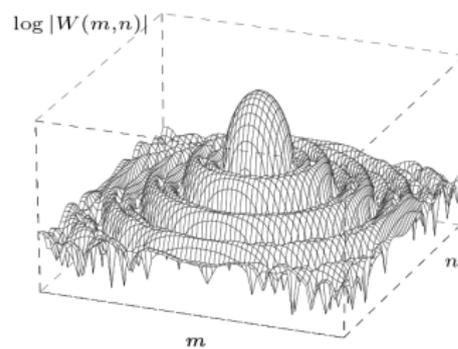
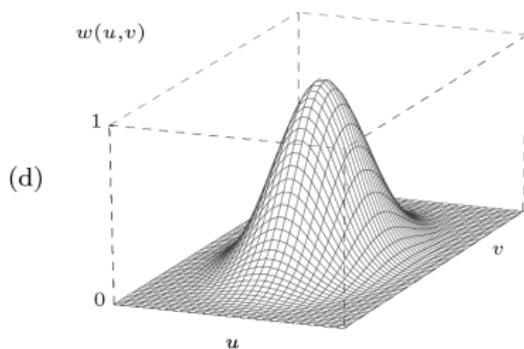
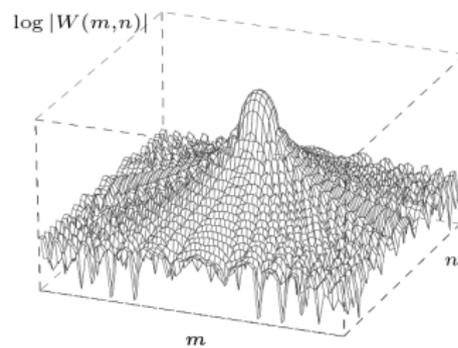
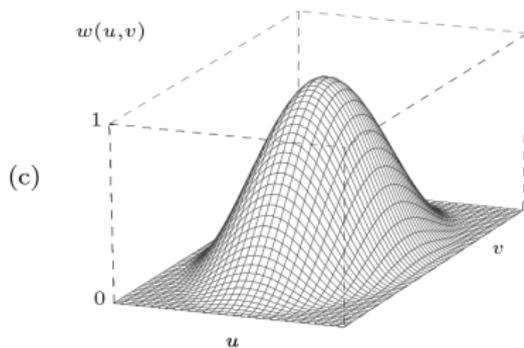
Gauß- und Supergauß($n = 6$)-Fenster



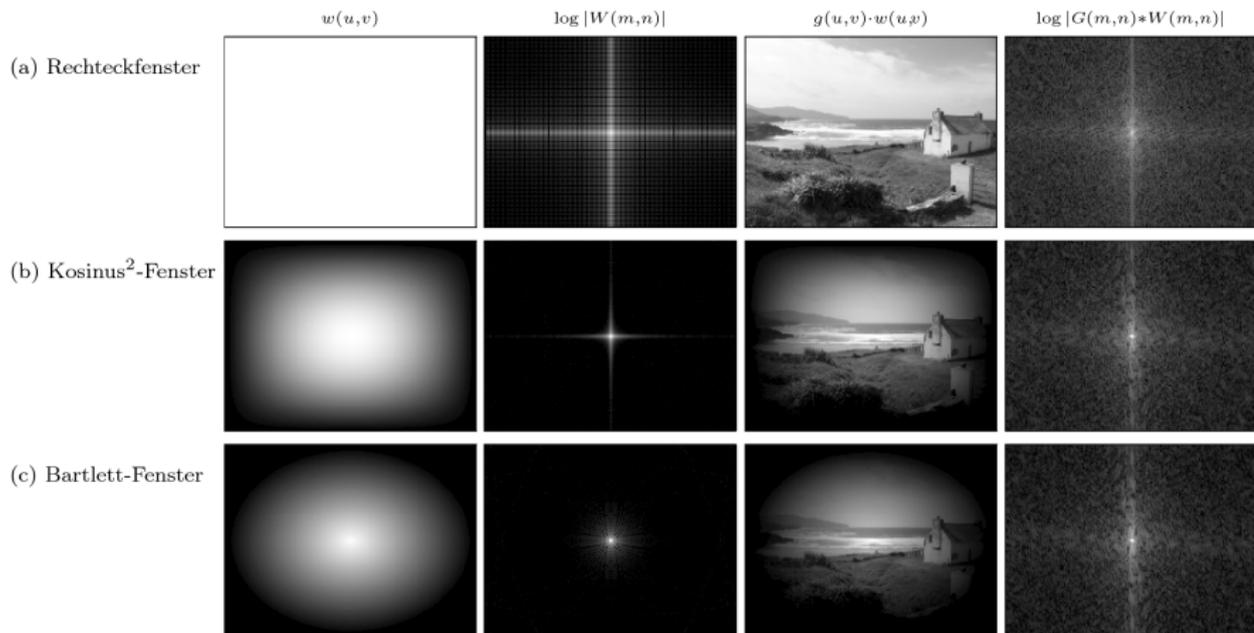
Cos²- und Bartlett-Fenster



Hanning- und Parzen-Fenster



Beispiel: Auswirkung der Fensterfunktion (1)



Beispiel: Auswirkung der Fensterfunktion (2)

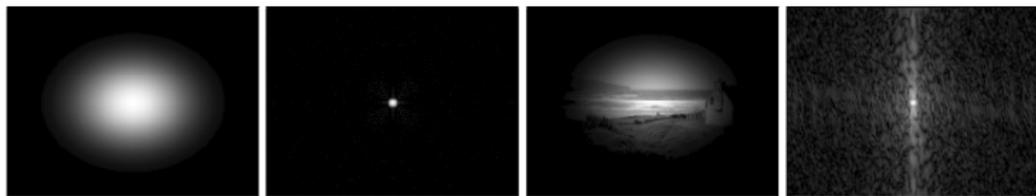
(d) Hanning-Fenster



(e) Parzen-Fenster



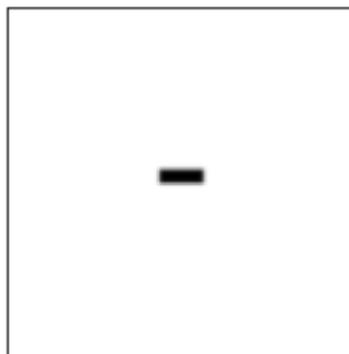
(f) Gauß-Fenster



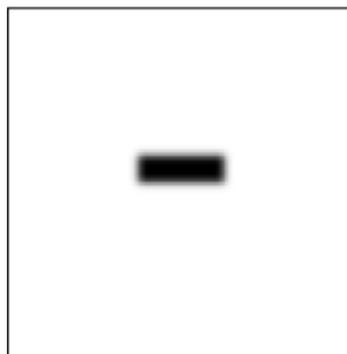
Übersicht

- 1 Diskrete 2D-Fouriertransformation
- 2 Windowing
- 3 Beispiele und Anwendungen**
- 4 RGB- und HSV-Farbraum

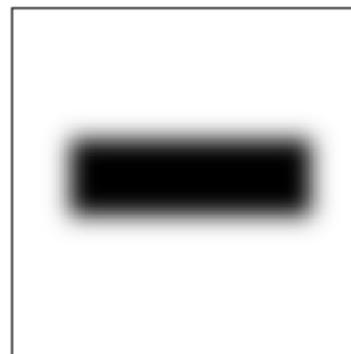
Beispiel: Skalierung



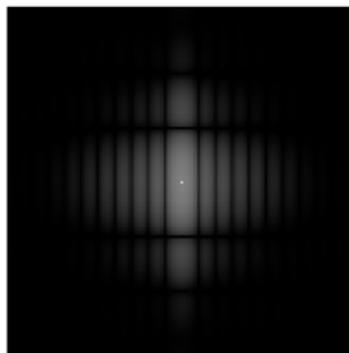
(a)



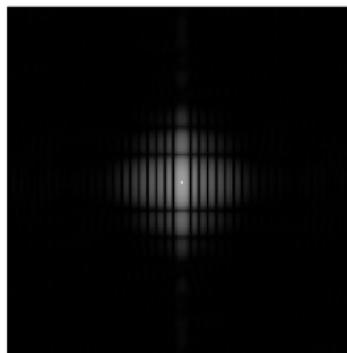
(b)



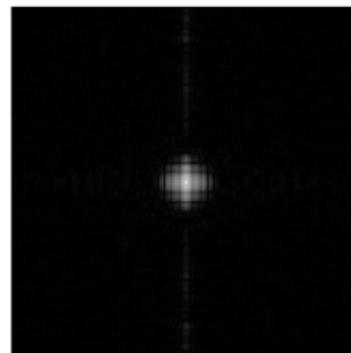
(c)



(d)

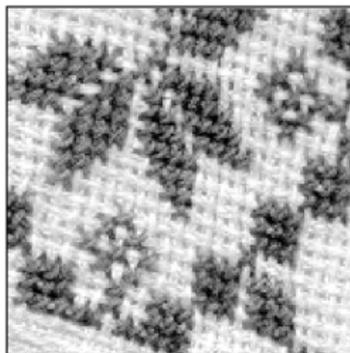


(e)

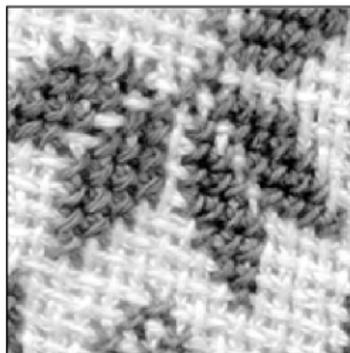


(f)

Beispiel: periodisches Bildmuster



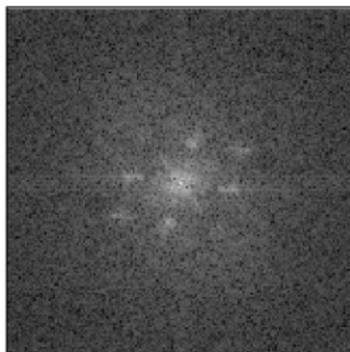
(a)



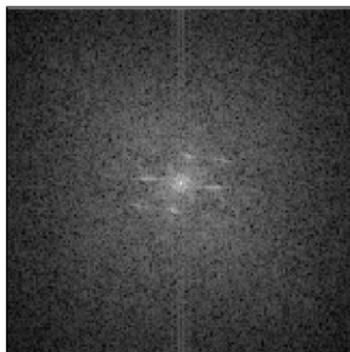
(b)



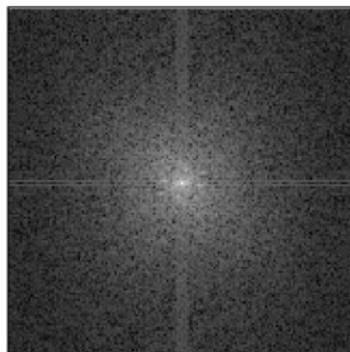
(c)



(d)

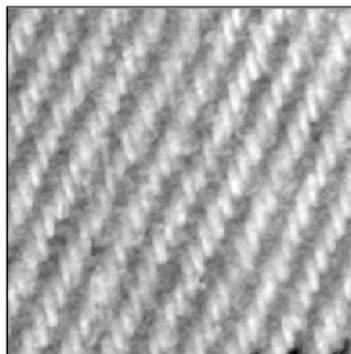


(e)

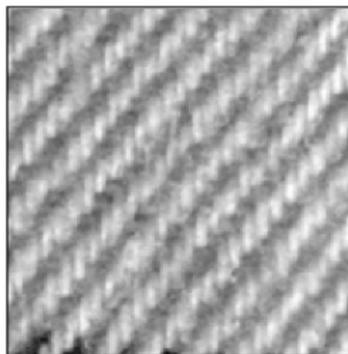


(f)

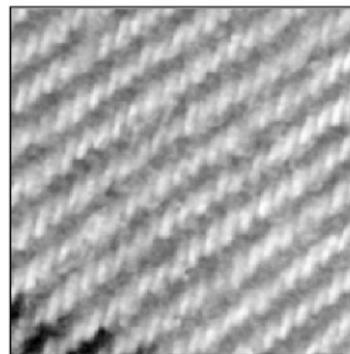
Beispiel: Drehung



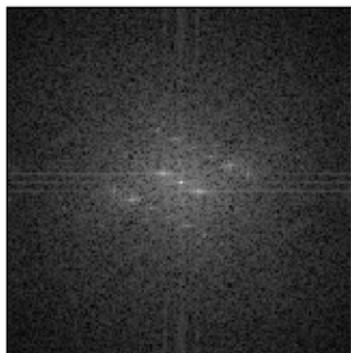
(a)



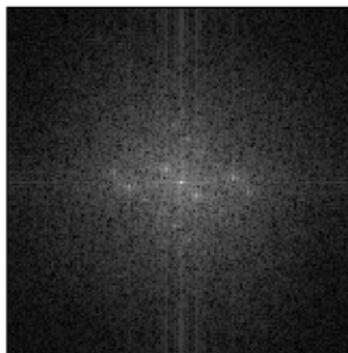
(b)



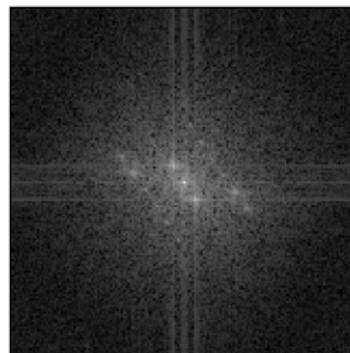
(c)



(d)

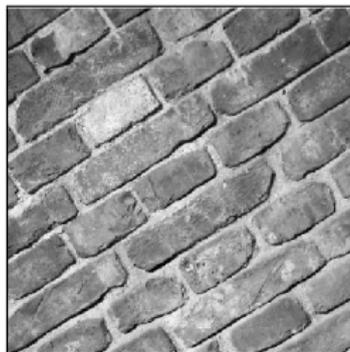


(e)



(f)

Beispiel: gerichtete, längliche Strukturen



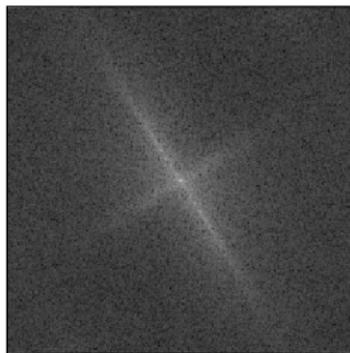
(a)



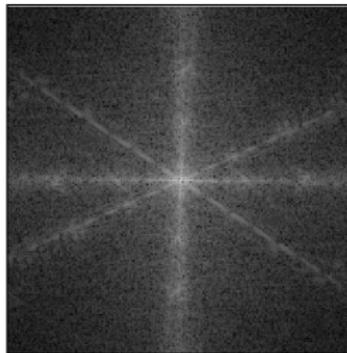
(b)



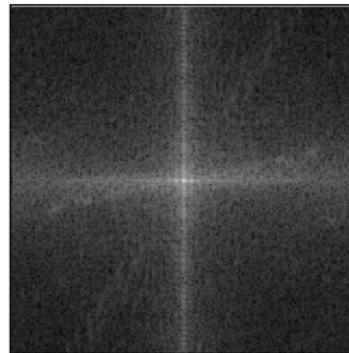
(c)



(d)



(e)



(f)

Beispiel: Natürliche Bilder (1)



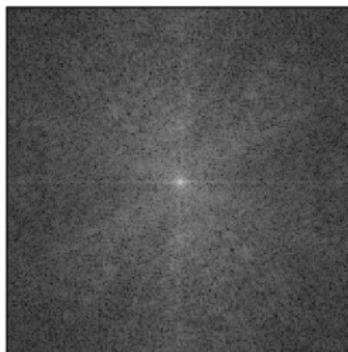
(a)



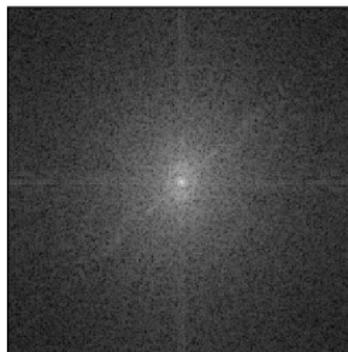
(b)



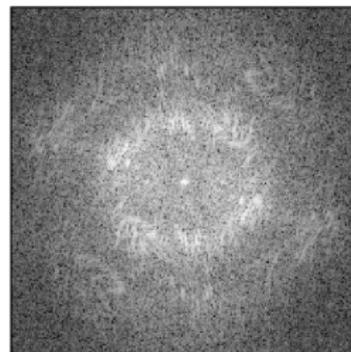
(c)



(d)



(e)



(f)

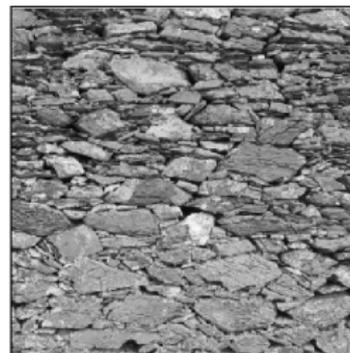
Beispiel: Natürliche Bilder (2)



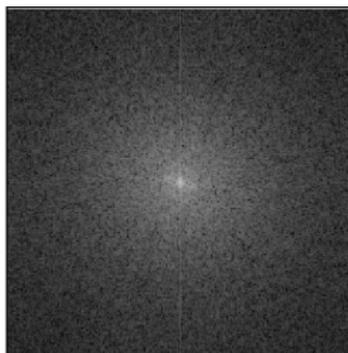
(a)



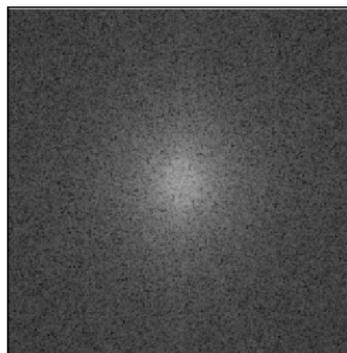
(b)



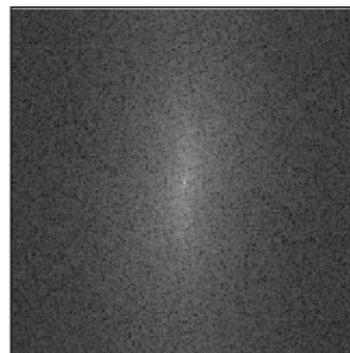
(c)



(d)

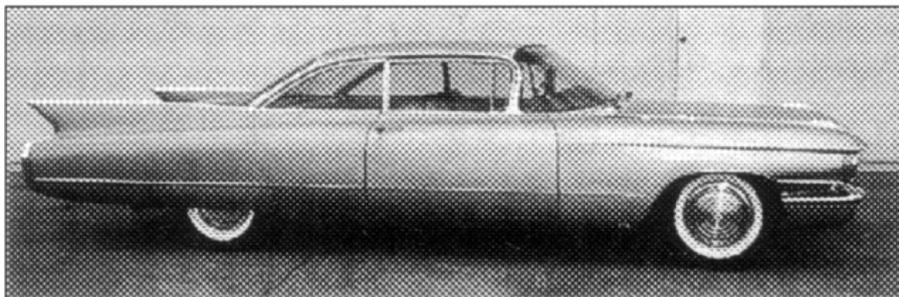


(e)



(f)

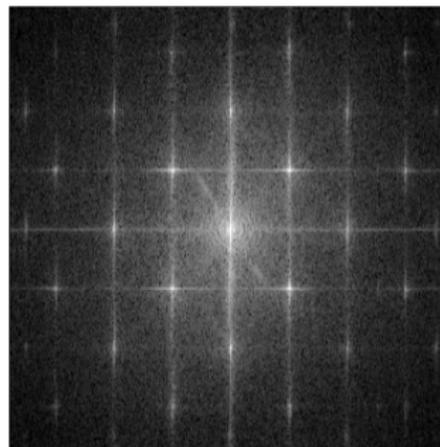
Beispiel: Druckmuster



(a)



(b)



(c)

Anwendungen der DFT

- **Filterung im Spektralraum:** bei sehr großen $N \times N$ -Filtermasken auf $M \times M$ -Bildern sind $O(M^2N^2)$ Operationen notwendig, FFT und inverse FFT benötigen $O(M \log M)$ Operationen plus M^2 Multiplikationen, unabhängig von der Filtergröße N .
- **Korrelation bei *Template Matching*:** Korrelation ist identisch zur linearen Faltung mit gespiegelter Fensterfunktion \Rightarrow Anwendung bei der Suche nach großen Objekten.
- **Entfernung der Unschärfe durch inverse Filterung:** Ein unscharfes Bild entsteht durch Faltung mit der **Punktverwaschungsfunktion** der Optik, d.h. Multiplikation der DFT des Bildes mit der DFT der PVF (**Modulationstransferfunktion**, MTF) \Rightarrow Entfernung durch Division durch MTF.



(a)

(b)

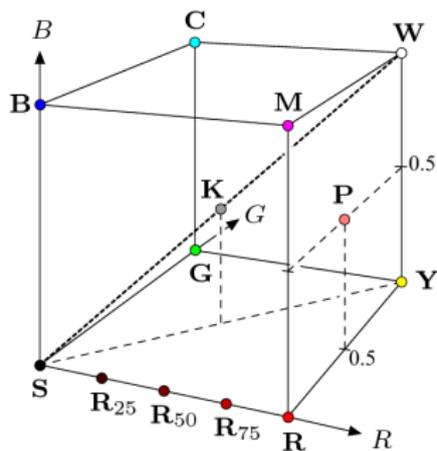
(c)

Übersicht

- 1 Diskrete 2D-Fouriertransformation
- 2 Windowing
- 3 Beispiele und Anwendungen
- 4 RGB- und HSV-Farbraum**

RGB-Farbraum

Das RGB-Farbsystem basiert auf der **additiven** Mischung der drei Primärfarben Rot, Grün und Blau, d.h. ausgehend von Schwarz wird farbiges Licht in den Primärfarben überlagert, was sowohl den **Farbton**, die **Intensität** und die **Sättigung** des Farbwertes bestimmt.

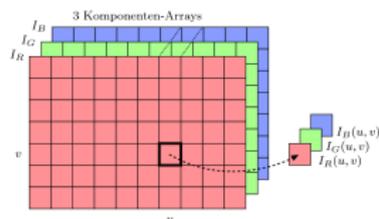


RGB-Werte

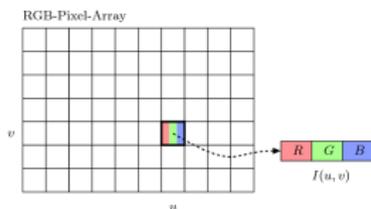
Pkt.	Farbe	R	G	B
S	Schwarz	0.00	0.00	0.00
R	Rot	1.00	0.00	0.00
Y	Gelb	1.00	1.00	0.00
G	Grün	0.00	1.00	0.00
C	Cyan	0.00	1.00	1.00
B	Blau	0.00	0.00	1.00
M	Magenta	1.00	0.00	1.00
W	Weiß	1.00	1.00	1.00
K	50% Grau	0.50	0.50	0.50
R ₇₅	75% Rot	0.75	0.00	0.00
R ₅₀	50% Rot	0.50	0.00	0.00
R ₂₅	25% Rot	0.25	0.00	0.00
P	Pink	1.00	0.50	0.50

Aufbau von Farbbildern

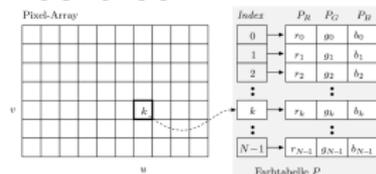
Komponenten-anordnung



Gepackte Anordnung



Indexbilder



- Bei gepackter Anordnung müssen die einzelnen Farbkanäle über spezielle Zugriffsfunktionen aus den Pixeln ausgelesen und beschrieben werden.
- Indexbilder erlauben nur eine beschränkte Anzahl von Farben. Die Pixel enthalten nur den Index k einer Farbtabelle oder Palette

$$P[k] = (P_R[k], P_G[k], P_B[k])$$

und erlauben so eine "flache" Bildrepräsentation.

- Interessantes Problem: Umwandlung eines Vollfarbenbildes in ein Indexbild (nächste Vorlesung).

Umwandlung in Grauwertbilder

Einfachster Ansatz: Durchschnittswert der drei Farbkomponenten

$$y = \frac{R + G + B}{3}$$

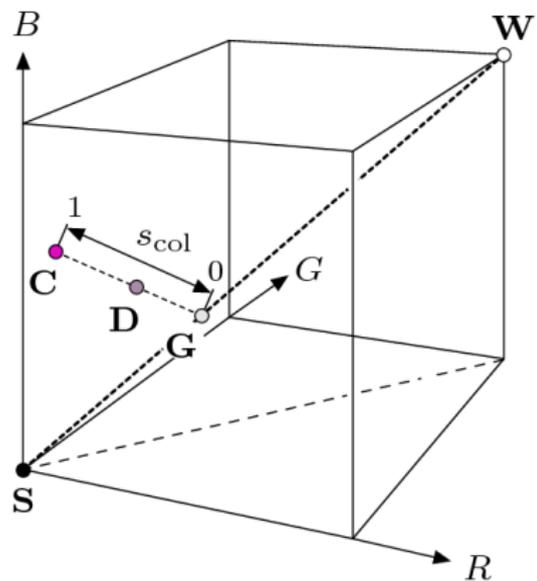
aber die wahrgenommene Helligkeit von Rot und Grün ist wesentlich höher als die von Blau \Rightarrow Gebiete mit hohem Rot- und Grünanteil werden zu dunkel, Gebiete mit hohem Blauanteil zu hell wiedergegeben.

Idealerweise müßte die relative Helligkeit Y_R, Y_G, Y_B jedes Farbkanals des Wiedergabegerätes mit einem Photometer vermessen werden (z.B. in TV- oder ITU-BT709- Norm). Die wahrgenommene Intensität (**Luminanz**) ergibt sich dann als

$$Y = R \cdot Y_R + G \cdot Y_G + B \cdot Y_B \quad \text{mit} \quad Y_R + Y_G + Y_B = 1$$

z.B. $Y_R = 0.299, Y_G = 0.587, Y_B = 0.114$ bei TV-Geräten. Diese Formel gilt aber nur näherungsweise, da die wahrgenommene Intensität in Wirklichkeit nichtlinear von den einzelnen Farbwerten abhängt.

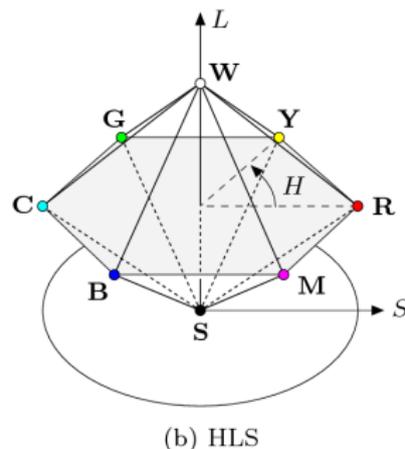
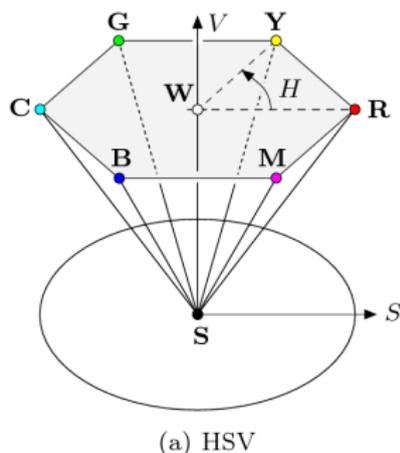
Desaturierung im RGB-Raum



$$\begin{pmatrix} R_D \\ G_D \\ B_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{pmatrix} + s_{col} \cdot \begin{pmatrix} R - Y \\ G - Y \\ B - Y \end{pmatrix}$$

HSV- und HLS-Farbraum

Veränderungen an RGB-Werten ändern i.A. immer alle vom Menschen wahrgenommenen Farbattribute (Ton, Sättigung, Helligkeit) gleichzeitig. Daher sind für manche Anwendungen Farbräume vorteilhafter, die eine direkte Manipulation dieser Attribute erlauben.



HSV: Hue (Ton), Saturation (Sättigung), Value (Helligkeit), manchmal auch HSB oder HSI, HLS: Hue, Luminance, Saturation

Umrechnung RGB in HSV

RGB-Werte befinden sich im Intervall $[0, C_{\max}]$, C_{\min} sei das Minimum der drei Werte R,G,B, C_{high} das Maximum, der Wertebereich

$$\Delta C = C_{\text{high}} - C_{\min}, \text{ die relativen Farbkomponenten } R' = \frac{C_{\text{high}} - R}{\Delta C},$$

$$G' = \frac{C_{\text{high}} - G}{\Delta C}, B' = \frac{C_{\text{high}} - B}{\Delta C}$$



$$\text{Sättigung: } S = \begin{cases} \frac{\Delta C}{C_{\max}} & \text{für } C_{\max} > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



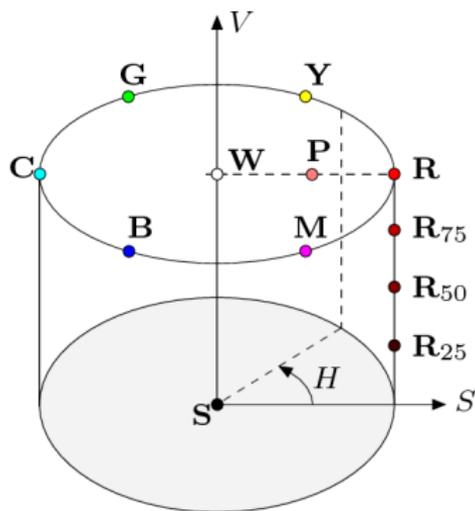
$$\text{Helligkeit (Value): } V = \frac{C_{\text{high}}}{C_{\max}}$$



$$\text{Farbton: } H' = \begin{cases} B' - G' & \text{wenn } R = C_{\text{high}} \\ B' - B' + 2 & \text{wenn } G = C_{\text{high}} \\ G' - R' + 4 & \text{wenn } B = C_{\text{high}} \end{cases}$$

$$\text{Normierung } H = \frac{1}{6}(H' + 6) \text{ für } H' < 0, \text{ sonst } H = \frac{1}{6}H'.$$

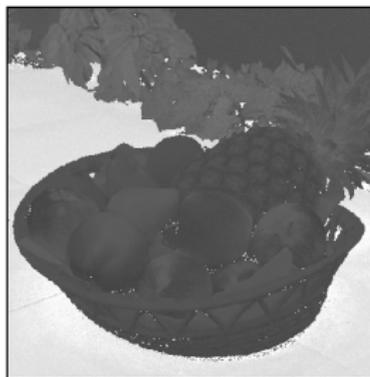
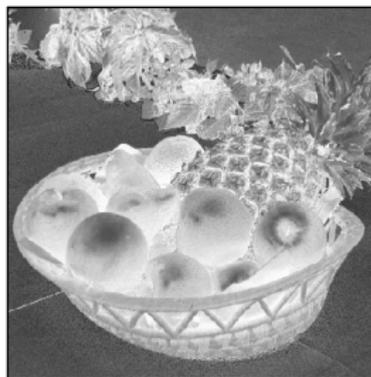
HSV-Farbraum



RGB-/HSV-Werte

Pkt.	Farbe	R	G	B	H	S	V
S	Schwarz	0.00	0.00	0.00	—	0.00	0.00
R	Rot	1.00	0.00	0.00	0	1.00	1.00
Y	Gelb	1.00	1.00	0.00	1/6	1.00	1.00
G	Grün	0.00	1.00	0.00	2/6	1.00	1.00
C	Cyan	0.00	1.00	1.00	3/6	1.00	1.00
B	Blau	0.00	0.00	1.00	4/6	1.00	1.00
M	Magenta	1.00	0.00	1.00	5/6	1.00	1.00
W	Weiß	1.00	1.00	1.00	—	0.00	1.00
R₇₅	75% Rot	0.75	0.00	0.00	0	1.00	0.75
R₅₀	50% Rot	0.50	0.00	0.00	0	1.00	0.50
R₂₅	25% Rot	0.25	0.00	0.00	0	1.00	0.25
P	Pink	1.00	0.50	0.50	0	0.5	1.00

Beispiel: HSV-Darstellung

 h_{HSV}  s_{HSV}  v_{HSV}

Umrechnung HSV in RGB

Farbsektor: $H' = (6 \cdot H) \bmod 6$

Zwischenwerte ($v = V_{\text{HSV}}$):

$$\begin{aligned} c_1 &= \lfloor H' \rfloor & x &= (1 - S_{\text{HSV}}) \cdot v \\ c_2 &= H' - c_1 & y &= (1 - (S_{\text{HSV}} \cdot c_2)) \cdot V_{\text{HSV}} \\ & & z &= (1 - (S_{\text{HSV}} \cdot (1 - c_2))) \cdot V_{\text{HSV}} \end{aligned}$$

Normalisierte RGB-Werte in $[0, 1]$:

$$(R', G', B') \leftarrow \begin{cases} (v, z, x) & \text{wenn } c_1 = 0 \\ (y, v, x) & \text{wenn } c_1 = 1 \\ (x, v, z) & \text{wenn } c_1 = 2 \\ (x, y, v) & \text{wenn } c_1 = 3 \\ (z, x, v) & \text{wenn } c_1 = 4 \\ (v, x, y) & \text{wenn } c_1 = 5 \end{cases}$$

Danach Skalierung auf $[0, C_{\text{max}}]$.