Spektraltechniken

Industrielle Bildverarbeitung, Vorlesung No. 11[1]

M. O. Franz

[1] falls nicht anders vermerkt, sind die Abbildungen entnommen aus Burger & Burge, 2005.

Übersicht

Übersicht

Impulsfunktion

Impulsfunktion (auch Dirac- oder Deltafunktion):

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

- einzelner Puls am Ursprung
- unendlich dünn und unendlich hoch
- endliche Fläche unter der Kurve

Verhalten bei Skalierung $\delta(x) \rightarrow \delta(sx)$:

$$\delta(sx) = \frac{1}{|s|}\delta(x) \quad \text{für} \quad s \neq 0$$

Benötigt wird die Impulsfunktion u.a. zur formalen Beschreibung des Abtastvorgangs.

Abtastung mit Impulsfunktion (1)

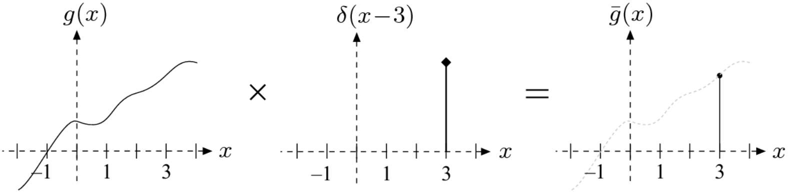
Wird eine kontinuierliche Funktion punktweise mit der Impulsfunktion multipliziert, so erhält man

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x) = \begin{cases} g(0) & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. einen einzelnen, diskreten Abtastwert bei 0.

Durch Verschiebung von $\delta(x)$ an x_0 kann $g(x)$ an beliebigen Stellen abgetastet werden:

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{für} \quad x = x_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Abtastung mit Impulsfunktion (2)

Um eine Funktion an mehreren Stellen abzutasten (z.B. x_1 und x_2), werden zuerst 2 verschobene Exemplare von $\delta(x)$ mit $g(x)$ multipliziert und dann addiert:

$$\begin{aligned}
\bar{g}(x) &= g(x)\delta(x-x_1) + g(x)\delta(x-x_2) \\
&= g(x)[\delta(x-x_1) + \delta(x-x_2)] \\
&= \begin{cases} g(x_1) & \text{für} \quad x = x_1 \\ g(x_2) & \text{für} \quad x = x_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

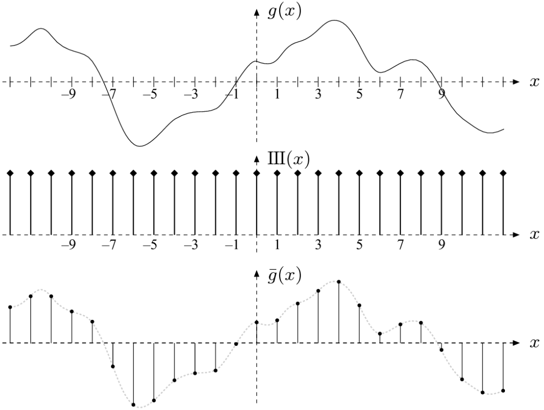
Die Abtastung einer Funktion an einer Folge von N Positionen $x_i = 1, 2, \ldots, N$ kann daher als Summe von N Einzelabtastungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
g(x) &= g(x)[\delta(x-1) + \delta(x-2) + \cdots + \delta(x-N)] \\
&= g(x) \sum_{i=1}^{N} \delta(x-i)
\end{aligned}$$

Abtastung mit der Kammfunktion

Kammfunktion: Verlängerung der Pulsfolge nach ∞ und $-\infty$

$$\text{III}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - i)$$



Abtastung:

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}(x)$$

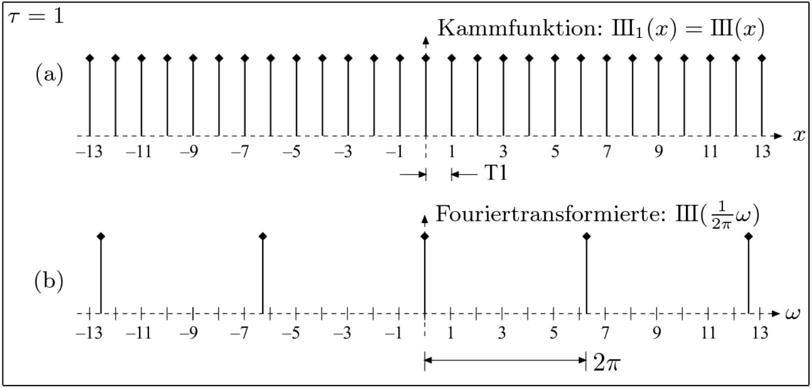
Abtastung im Abstand τ:

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

Fouriertransformierte der Kammfunktion (1)

Die Fouriertransformierte der Kammfunktion ist wieder eine Kammfunktion:

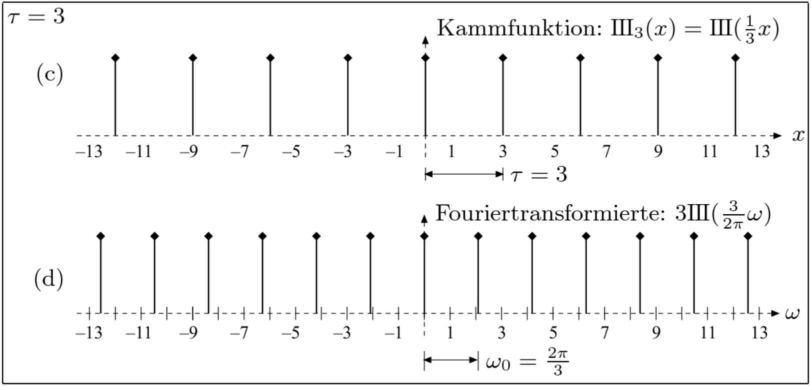
$$\text{III}(x) \circ\!\!-\!\!\bullet \text{III}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right)$$



Fouriertransformierte der Kammfunktion (2)

Kammfunktion mit Abtastinterval τ:

$$\text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet \; \tau\, \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$



Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (1)

- Dem Produkt im Ortsraum entspricht die Faltung im Spektralraum:

$$g(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ g(\omega) * \tau\, \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$

- Faltung mit der Impulsfunktion ergibt wieder die Originalfunktion:

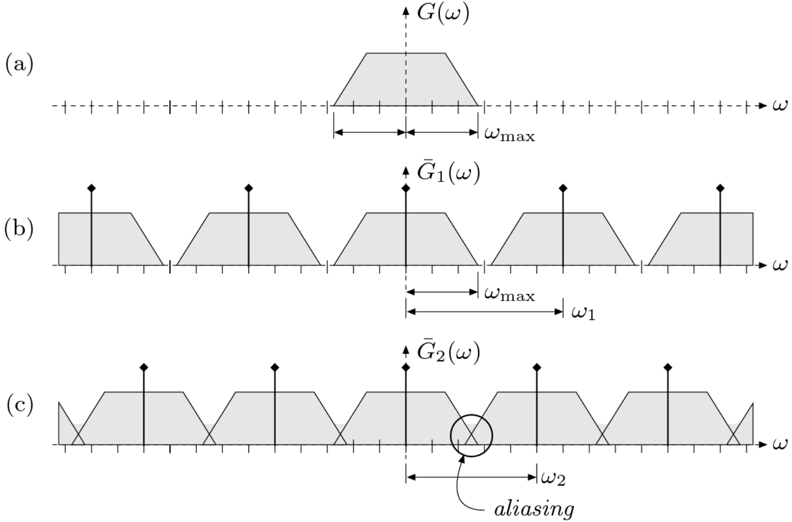
$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

- Faltung mit einem um d verschobenen Impuls reproduziert ebenfalls die Funktion, aber verschoben um Distanz d :

$$f(x) * \delta(x-d) = f(x-d)$$

- Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion: Spektrum des ursprünglichen, nicht abgetasteten Signals wird unendlich oft an jedem Puls der Kammfunktion repliziert. Das resultierende Spektrum ist also periodisch mit Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$ (Abtastfrequenz).

Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (2)



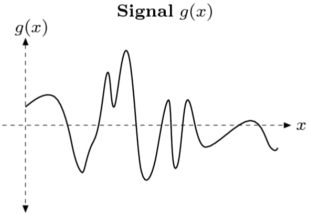
Aliasing und Abtasttheorem

- Solange sich die replizierten Spektren des Originalsignals nicht überlappen, kann das ursprüngliche Signal ohne Verlust aus einer der Kopien im Spektrum bzw. aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden.
- Spektrum muß dafür bandbegrenzt sein: Maximalfrequenz ω_{max} darf also die halbe Abtastfrequenz ω_s nicht überschreiten:

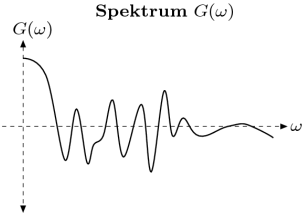
$$\omega_{\text{max}} \leq \frac{1}{2}\omega_s \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \geq 2\omega_{\text{max}}$$

  Abtastfrequenz muß mindestens das Doppelte der Bandbreite betragen (Abtasttheorem).
- Wird diese Bedingung nicht eingehalten, kann das kontinuierliche Signal nicht mehr fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden: Aliasing.

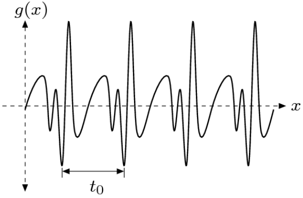
Diskrete und periodische Funktionen (1)



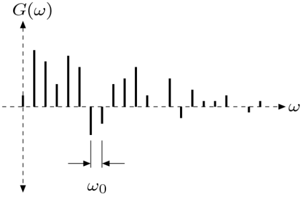
(a) Kontinuierliches, nicht periodisches Signal.



(b) Kontinuierliches, nicht periodisches Spektrum.

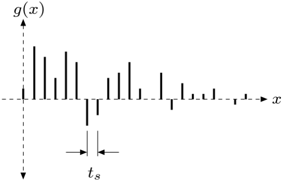


(c) Kontinuierliches, periodisches Signal mit Periodenlänge t_0.

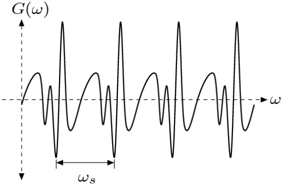


(d) Diskretes, nicht periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$.

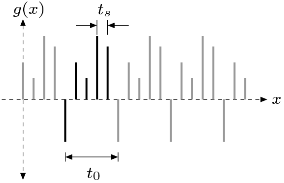
Diskrete und periodische Funktionen (2)



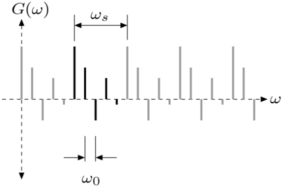
(e) Diskretes, nicht periodisches Signal mit Abtastwerten im Abstand t_s.



(f) Kontinuierliches, periodisches Spektrum mit der Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s$.



(g) Diskretes, periodisches Signal, abgetastet im Abstand t_s mit der Periodenlänge $t_0 = t_s M$.



(h) Diskretes, periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$ und Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s = \omega_0 M$.

Übersicht

Diskrete Fouriertransformation

Diskrete, periodische Signale haben ein diskretes, periodisches Spektrum.

Geg.: diskretes Signal $g(u)$ der Länge $M(u = 0, 1, \ldots, M-1)$.

Vorwärtstransformation (DFT):

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u)\, e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für} \quad 0 \leq m < M$$

Inverse Transformation (DFT^{-1}):

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m)\, e^{i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für} \quad 0 \leq u < M$$

DFT - Beispiel

u	$g(u)$ Re	$g(u)$ Im		$G(m)$ Re	$G(m)$ Im	m
0	1.0000	0.0000		14.2302	0.0000	0
1	3.0000	0.0000	DFT	−5.6745	−2.9198	1
2	5.0000	0.0000	$\longrightarrow$	*0.0000	*0.0000	2
3	7.0000	0.0000		−0.0176	−0.6893	3
4	9.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	4
5	8.0000	0.0000		0.3162	0.0000	5
6	6.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	6
7	4.0000	0.0000	DFT^{-1}	−0.0176	0.6893	7
8	2.0000	0.0000	$\longleftarrow$	*0.0000	*0.0000	8
9	0.0000	0.0000		−5.6745	2.9198	9

Diskrete Basisfunktionen

Komponentennotation statt Eulersche Schreibweise:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \Big[\underbrace{g_{\mathrm{Re}}(u) + \mathrm{i} \cdot g_{\mathrm{Im}}(u)}_{g(u)}\Big] \cdot \Big[\underbrace{\cos\big(2\pi \tfrac{mu}{M}\big)}_{\boldsymbol{C}_m^M(u)} - \mathrm{i} \cdot \underbrace{\sin\big(2\pi \tfrac{mu}{M}\big)}_{\boldsymbol{S}_m^M(u)}\Big]$$

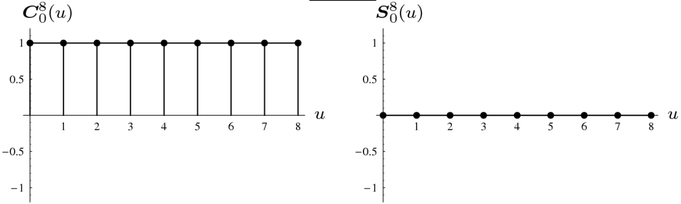
Real- und Imaginärteil des diskreten Fourierspektrums:

$$\begin{aligned} G_{\mathsf{Re}}(m) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\mathsf{Re}}(u) C_m^M(u) + g_{\mathsf{Im}}(u) S_m^M(u) \\ G_{\mathsf{Im}}(m) &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\mathsf{Im}}(u) C_m^M(u) - g_{\mathsf{Re}}(u) S_m^M(u) \end{aligned}$$

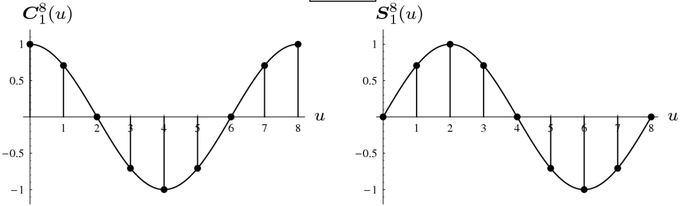
Die Basisfunktionen sind Cosinus- und Sinusfunktionen mit einer diskreten Frequenz m und einer Länge von M Abtastpunkten.

Diskrete Basisfunktionen (1)

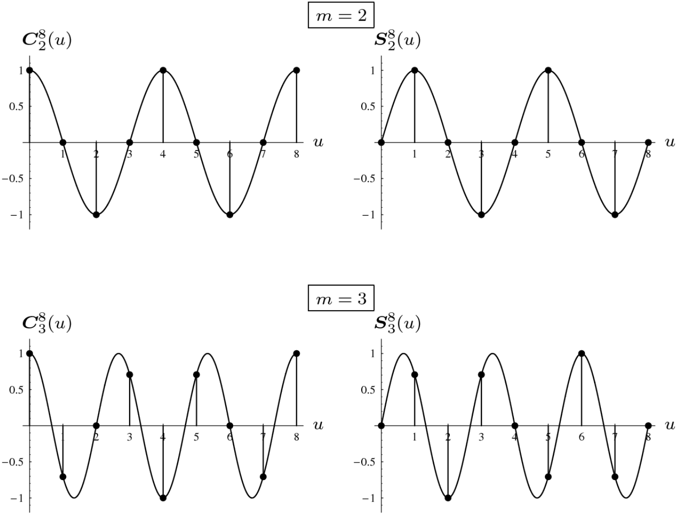
$\boxed{m = 0}$



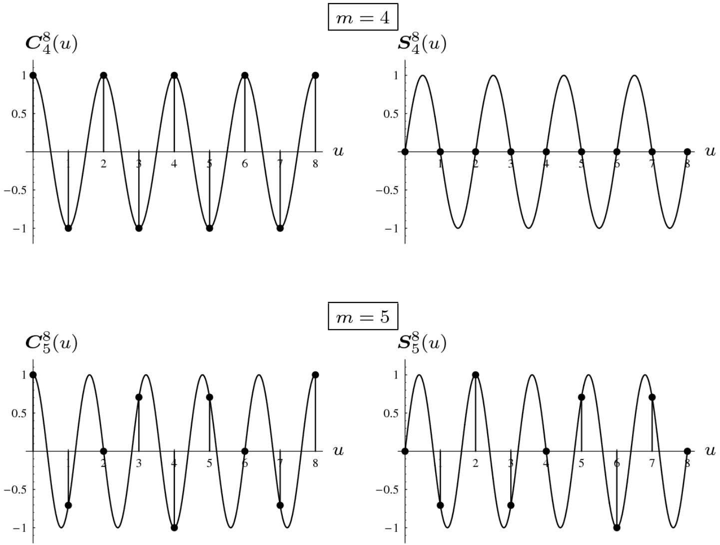
$\boxed{m = 1}$



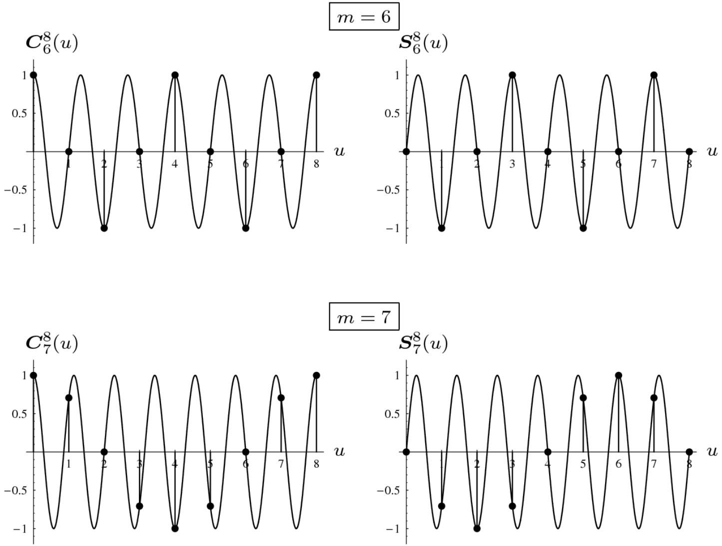
Diskrete Basisfunktionen (2)



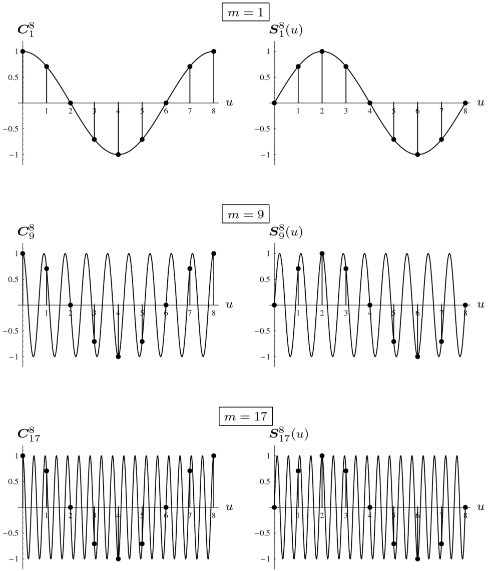
Diskrete Basisfunktionen (3)



Diskrete Basisfunktionen (4)



nochmals Aliasing...



Zu jeder Komponente mit Wellenzahl $m > M/2$ gibt es eine identische Komponente mit $m \leq M/2$. Durch diese Überlagerung können diese Komponenten aus dem abgetasteten Signal nicht rekonstruiert werden.

Symmetrien:

$$
\begin{aligned}
& |G(m)| \\
= \quad & |G(M-m)| = |G(M+m)| \\
= \quad & |G(2M-m)| = |G(2M+m)| \\
= \quad & |G(kM-m)| = |G(kM+m)|
\end{aligned}
$$

Einheiten im Orts- und Spektralraum

Annahme: periodisches Signal wird innerhalb einer Periode an M Punkten im Abstand τ abgetastet.

Der Wellenzahl $m = 1$ entspricht dann der Grundperiode des Signals, d.h. einer Schwingung im Intervall $M\tau$ mit der Frequenz

$$f_1 = \frac{1}{M\tau}$$

I.A. entspricht der Wellenzahl m des diskreten Spektrums der Frequenz bzw. Kreisfrequenz

$$f_m = m\frac{1}{M\tau} = m \cdot f_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_m = 2\pi f_m = m\frac{2\pi}{M\tau} = m\omega_1$$

Die Abtastfrequenz $f_s = 1/\tau = Mf_1$ entspricht der Wellenzahl $m_s = M$, die Grenzfrequenz (Nyquistfrequenz)

$$m_{\text{max}} = \frac{M}{2} = \frac{m_s}{2}$$

Aufgabe 11

1. Das Zeitsignal $g(u)$ (z.B. ein Tonsignal) besteht aus $M = 500$ Abtastwerten im Intervall $\tau =$ 1ms.

   a. Was ist die Abtastfrequenz? Was ist die Grundperiode des Signals? Was ist seine Grundfrequenz?

   b. Welcher realen Frequenz entspricht die Wellenzahl $m = 2$? Was ist hier die Nyquistfrequenz?

2. Ein eindimensionales Druckraster mit einer Auflösung (Abtastfrequenz) von 120 Punkten pro cm hat die Länge $M = 1800$ Punkte. Was ist die Grundfrequenz in Zyklen pro cm? Was ist hier die feinste Struktur (Frequenz), die aufgelöst werden kann?

Übersicht

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

Für eine zweidimensionale, periodische Funktion $g(u,v)$ der Größe $M \times N$ ist die 2D-DFT

$$\begin{aligned} G(m,n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v)\, e^{-i2\pi \frac{mu}{M}}\, e^{-i2\pi \frac{nv}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u,v)\, e^{-i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)} \end{aligned}$$

Inverse 2D-DFT^{-1}:

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n)\, e^{i2\pi \frac{um}{M}}\, e^{i2\pi \frac{vn}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m,n)\, e^{i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N}\right)} \end{aligned}$$

2D-Basisfunktionen

Die zweidimensionale Funktion $g(u, v)$ wird beschrieben als eine gewichtete Summe von zweidimensionalen, komplexen Funktionen

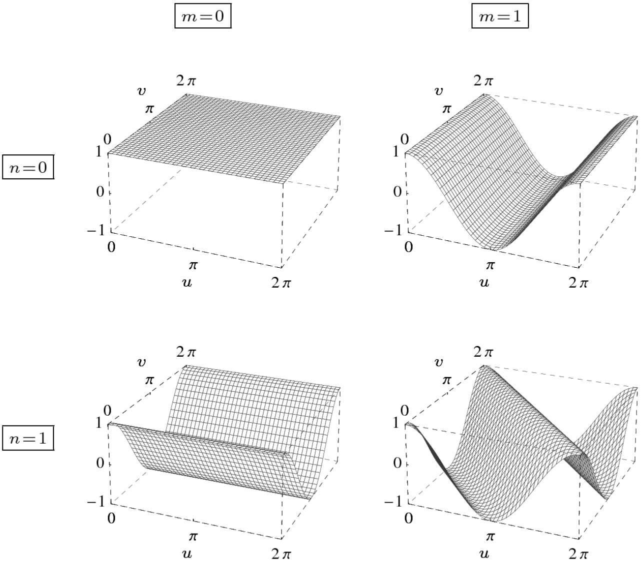
$$e^{\mathrm{i}2\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)} = \underbrace{\cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)\right]}_{\boldsymbol{C}_{m,n}^{M,N}(u,v)} + \mathrm{i}\cdot\underbrace{\sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)\right]}_{\boldsymbol{S}_{m,n}^{M,N}(u,v)}$$

Dabei sind $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ und $S_{m,n}^{M,N}(u, v)$ zweidimensionale Cosinus- bzw. Sinusfunktionen mit horizontaler Wellenzahl m und vertikaler Wellenzahl n

$$\begin{aligned} C_{m,n}^{M,N}(u,v) &= \cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)\right] \\ S_{m,n}^{M,N}(u,v) &= \sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)\right] \end{aligned}$$

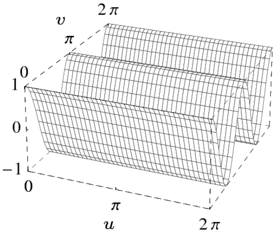
d.h. orientierte Wellenfunktionen.

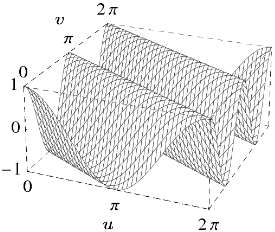
2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u,v)$ (1)



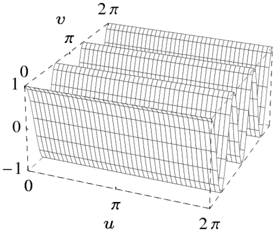
2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u,v)$ (2)

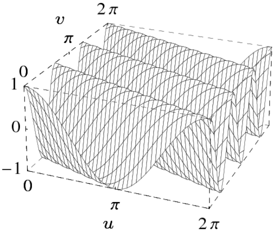
$\boxed{n=2}$



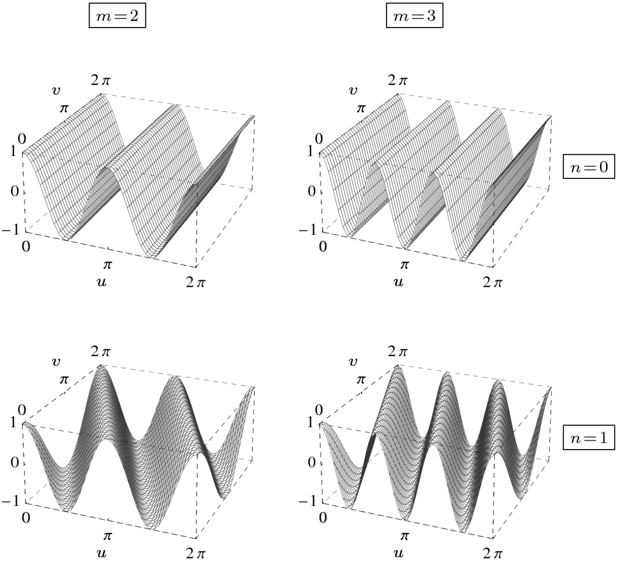


$\boxed{n=3}$

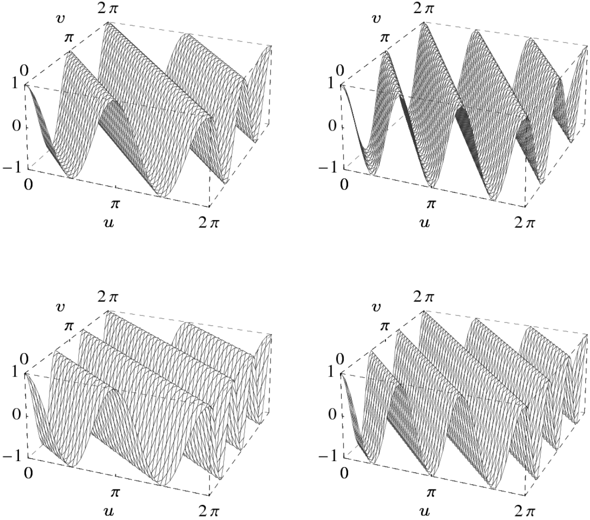




2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u,v)$ (3)



2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u,v)$ (4)



$n=2$

$n=3$

Implementierung der zweidimensionalen DFT

Umformung der 2D-DFT

$$G(m,n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} \underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u,v) \cdot e^{-\mathrm{i}2\pi \frac{um}{M}} \right]}_{\text{1-dim. DFT der Zeile } g(\cdot,v)} \cdot e^{-\mathrm{i}2\pi \frac{vn}{N}}$$

d.h. Hintereinanderausführung zweier eindimensionaler DFTs.

1: SEPARABLE 2D-DFT $(g(u,v) \in \mathbb{C})$ $\triangleright\ 0 \leq u < M,\ 0 \leq v < N$
2: **for** $v \leftarrow 0 \ldots N{-}1$ **do**
3: Let $g(\cdot,v)$ be the v^{th} row vector of g:
Replace $g(\cdot,v)$ by $\mathsf{DFT}\big(g(\cdot,v)\big)$.
4: **for** $u \leftarrow 0 \ldots M{-}1$ **do**
5: Let $g(u,\cdot)$ be the u^{th} column vector of g:
Replace $g(u,\cdot)$ by $\mathsf{DFT}\big(g(u,\cdot)\big)$.
6: *Remark:*
$g(u,v) = G(u,v) \in \mathbb{C}$ now contains the discrete 2D spectrum.

Darstellung der Fouriertransformierten in 2D

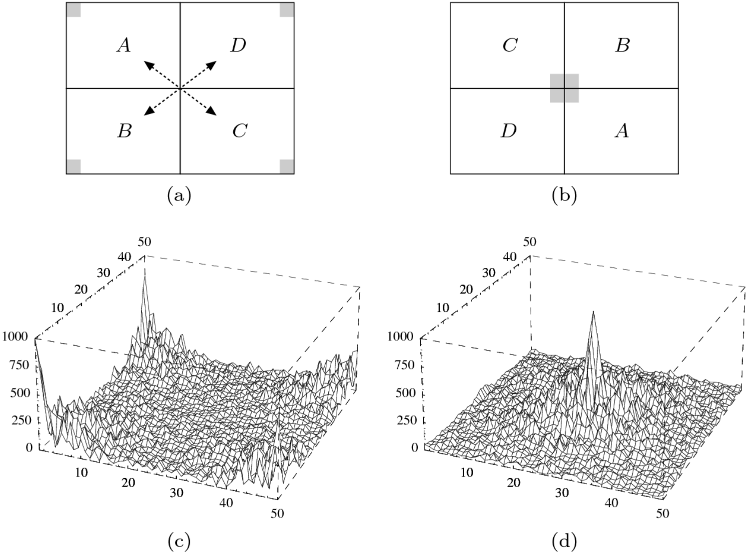
Statt ein Bild des Real- und eines des Imaginärteils zu zeigen, wird häufig der Betrag $|G(m,n)|$ der DFT dargestellt (Amplitudenspektrum), oft auch logarithmiert.

Da die transformierten Bilder rellwertig sind, ist das Amplitudenspektrum symmetrisch zum Ursprung, d.h.

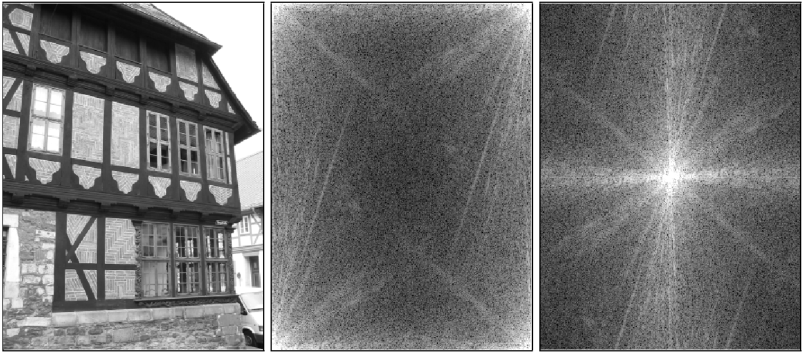
$$|G(m,n)| = |G(-m,-n)|$$

Üblicherweise wird daher der Ursprung zentriert dargestellt. Dies geschieht durch eine Umordnung der Quadranten unter der Nutzung dieser Symmetrieeigenschaft.

Zentrierte Darstellung



Darstellung als logarithmiertes Intensitätsbild



(a) (b) (c)