Filter

Industrielle Bildverarbeitung, Vorlesung No. 5[1]

M. O. Franz

[1] falls nicht anders vermerkt, sind die Abbildungen entnommen aus Burger & Burge, 2005.

Übersicht

Übersicht

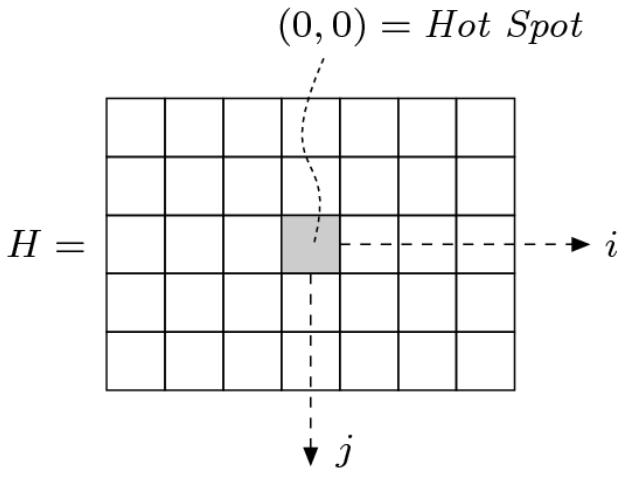
Lineare Filter

Lineare Filter: Wert des Zielpixels wird als gewichtete Summe der Quellpixel berechnet.

Größe und Form der Filterregion und Gewichte des Filter werden durch eine Matrix von *Filterkoeffizienten* spezifiziert, der Filtermatrix H_{ij} oder Filtermaske, z.B.

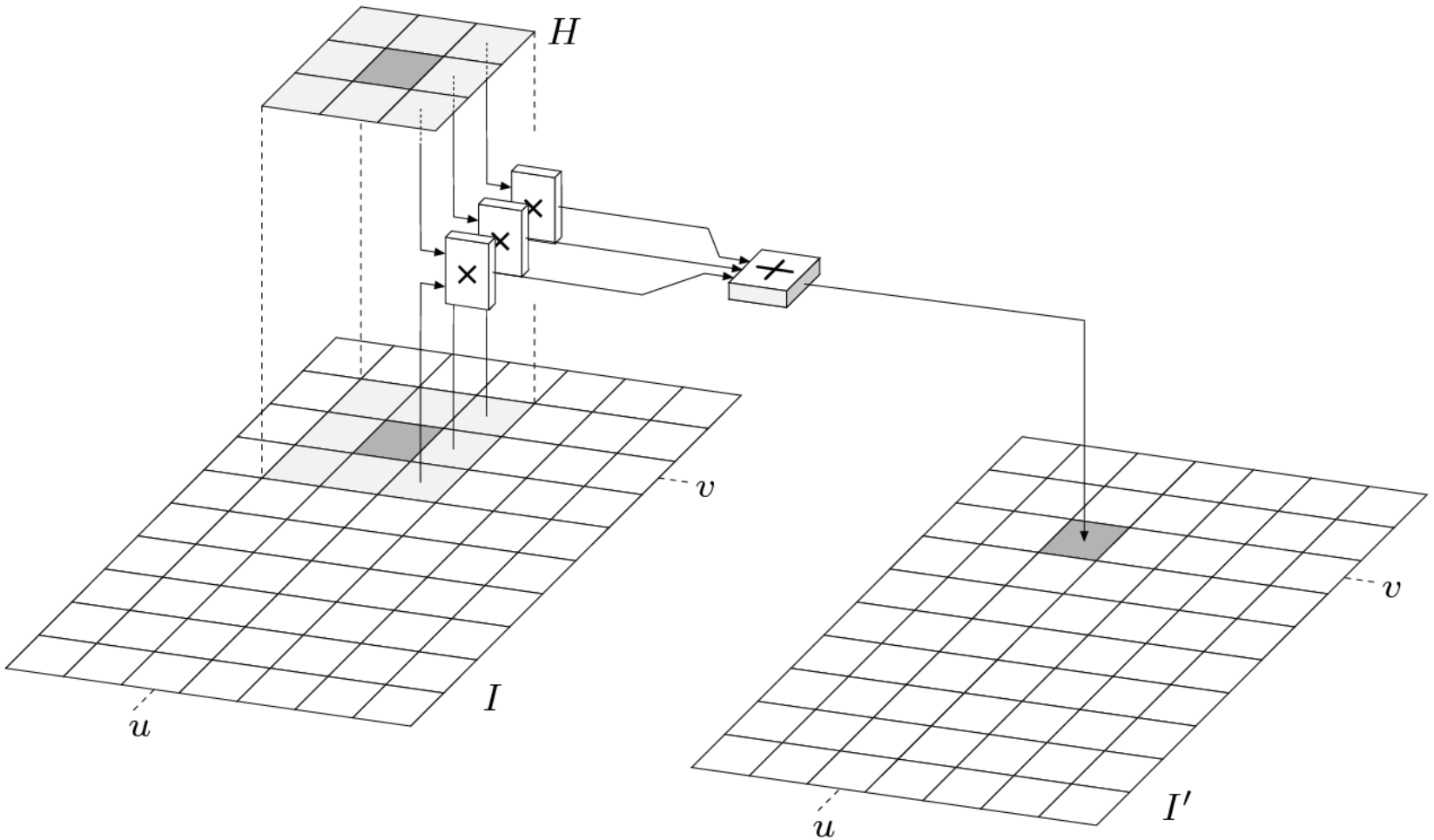
$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Filtermatrix ist - wie ein Bild - eine diskrete zweidimensionale Funktion. Koordinaten werden meist relativ zum Zentrum angegeben (”hot spot”).



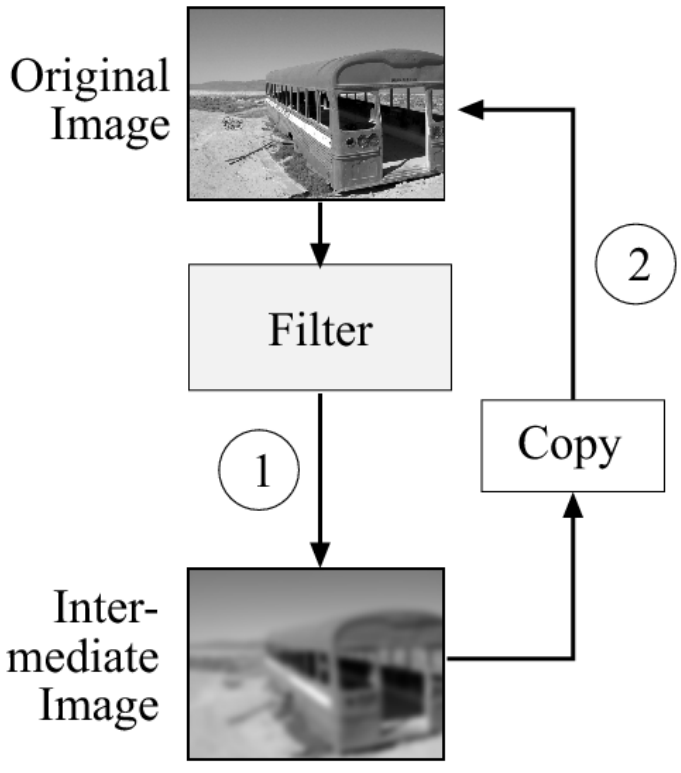
Anwendung eines Filters

$$I'(u,v) = \sum_i \sum_j \cdot I(u+i, v+j) H(i,j)$$

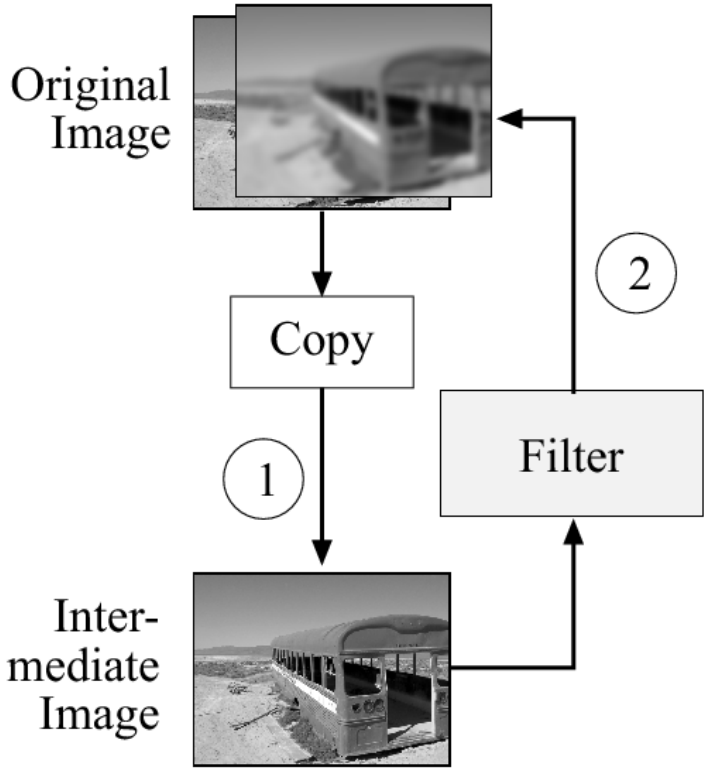


Praktische Implementierung von Filteroperationen

Im Gegensatz zu Punktoperationen ist bei Filtern keine ”in place”-Verarbeitung möglich, da die Quellpixel mehrere Male benötigt werden.



Variante A



Variante B

Beispiel: 3×3-Glättungsfilter mit unterschiedlichen Koeffizienten

Glockenförmiger Glättungsfilter:

$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 0.075 & 0.125 & 0.075 \\ 0.125 & \underline{0.200} & 0.125 \\ 0.075 & 0.125 & 0.075 \end{bmatrix}$$

```
2         int w = orig.getWidth();
3         int h = orig.getHeight();
4         // 3 × 3 filter matrix
5         double[][] filter = {
6             {0.075, 0.125, 0.075},
7             {0.125, 0.200, 0.125},
8             {0.075, 0.125, 0.075}
9         };
10        ImageProcessor copy = orig.duplicate();
11
12        for (int v=1; v<=h-2; v++) {
13            for (int u=1; u<=w-2; u++) {
14                // compute filter result for position (u, v)
15                double sum = 0;
16                for (int j=-1; j<=1; j++) {
17                    for (int i=-1; i<=1; i++) {
18                        int p = copy.getPixel(u+i,v+j);
19                        // get the corresponding filter coefficient:
20                        double c = filter[j+1][i+1];
21                        sum = sum + c * p;
22                    }
23                }
24                int q = (int) Math.round(sum);
25                orig.putPixel(u,v,q);
26            }
27        }
```

Ganzzahlige Filterkoeffizienten

Oft ist es vorteilhafter, mit ganzzahligen Filterkoeffizienten zu arbeiten:

- keine Umwandlung und Speicherung des Bildes in Gleitkommaformat notwendig
- auf manchen Rechnerarchitekturen sind Ganzzahloperationen schneller.
- auf FPGAs sind Gleitkommaoperationen extrem aufwendig.

Realisierung über einen Skalierungsfaktor, z.B.

$$H(i,j) = \begin{bmatrix} 0.075 & 0.125 & 0.075 \\ 0.125 & \underline{0.200} & 0.125 \\ 0.075 & 0.125 & 0.075 \end{bmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & \underline{8} & 5 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

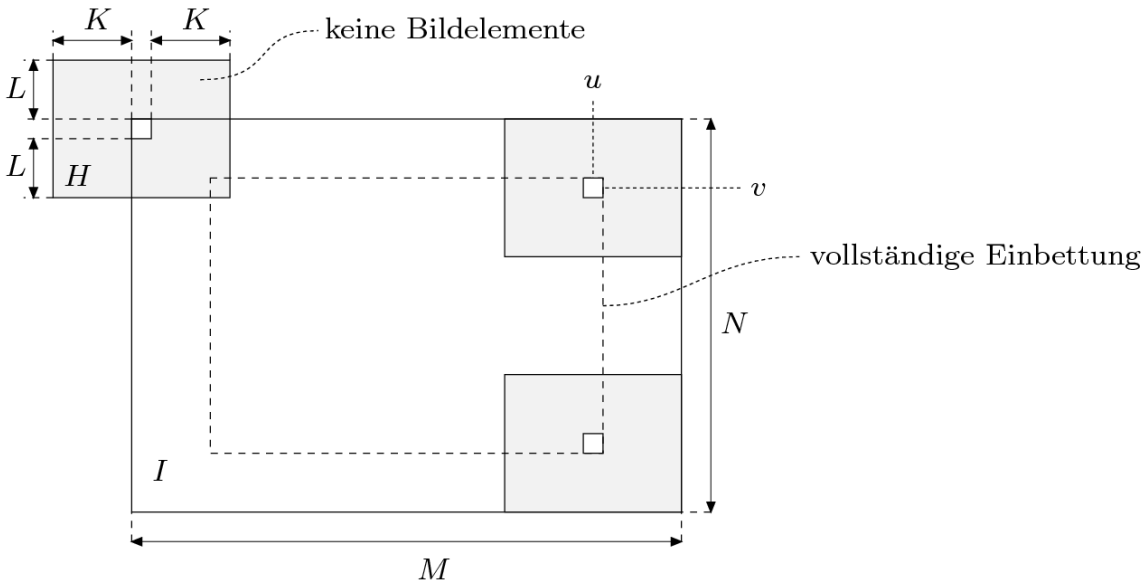
Beispiel: ganzzahliger $(2K+1) \times (2L+1)$-Filter

Typisch:

- ungeradzahlige Größe
- zentriert

```
5         // filter matrix of size (2K + 1) × (2L + 1)
6         int[][] filter = {
7             {0,0,1,1,1,0,0},
8             {0,1,1,1,1,1,0},
9             {1,1,1,1,1,1,1},
10            {0,1,1,1,1,1,0},
11            {0,0,1,1,1,0,0}
12        };
13        double s = 1.0/23;   // sum of filter coefficients is 23
14
15        int K = filter[0].length/2;
16        int L = filter.length/2;
17
18        ImageProcessor copy = orig.duplicate();
19
20        for (int v=L; v<=N-L-1; v++) {
21            for (int u=K; u<=M-K-1; u++) {
22                // compute filter result for position (u, v)
23                int sum = 0;
24                for (int j=-L; j<=L; j++) {
25                    for (int i=-K; i<=K; i++) {
26                        int p = copy.getPixel(u+i,v+j);
27                        int c = filter[j+L][i+K];
28                        sum = sum + c * p;
29                    }
30                }
31                int q = (int) Math.round(s * sum);
32                if (q < 0)  q = 0;
33                if (q > 255) q = 255;
34                orig.putPixel(u,v,q);
35            }
36        }
```

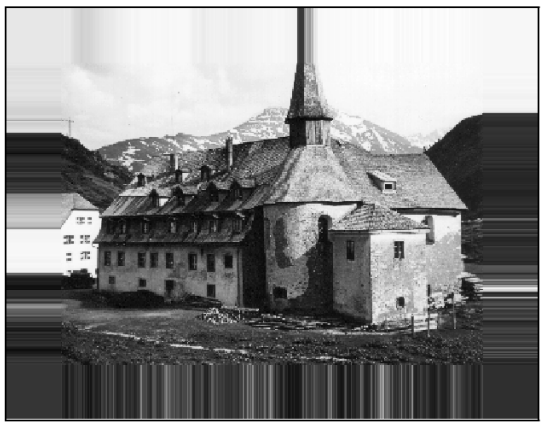
Behandlung von Randproblemen bei Filtern



- nur Zentralbereich auswerten, bei dem die Filtermaske ganz ins Bild passt $\Rightarrow$ Outputbild wird kleiner.
- Zero padding: Inputbild wird um 0 erweitert $\Rightarrow$ In- und Outputbild gleich groß.
- Gespiegelte Randbedingungen
- Konstante Randbedingungen

Beispiel: Randbedingungen

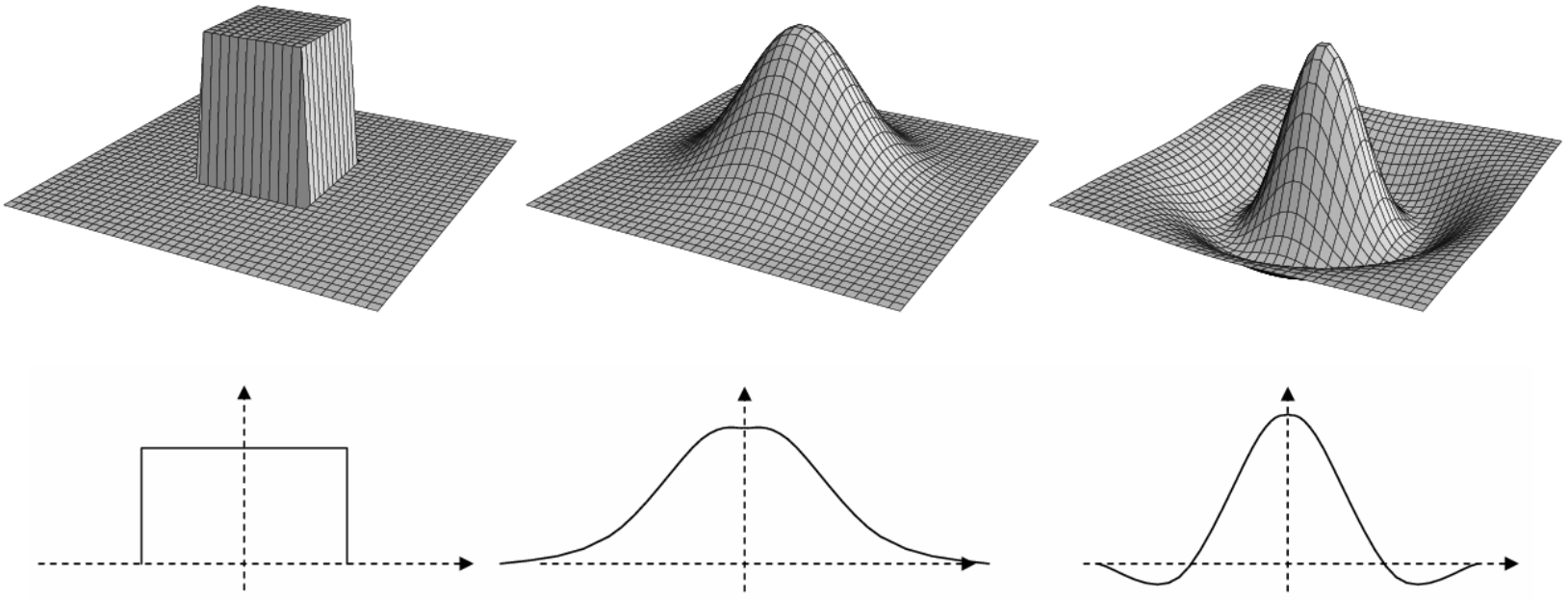
(a)



(b)

(c)

Beispiele für lineare Filter



0	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	1	1	1	0
0	0	0	0	0

(a)

0	1	2	1	0
1	3	5	3	1
2	5	9	5	2
1	3	5	3	1
0	1	2	1	0

(b)

0	0	-1	0	0
0	-1	-2	-1	0
-1	-2	16	-2	-1
0	-1	-2	-1	0
0	0	-1	0	0

(c)

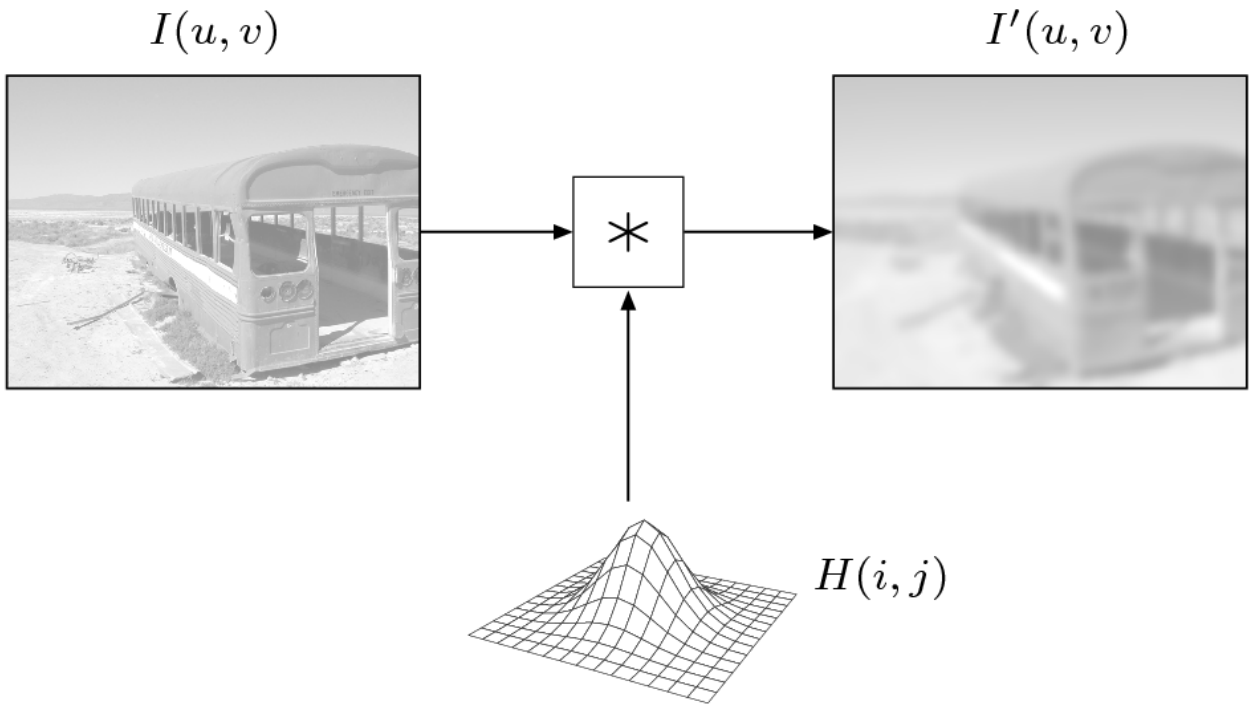
Übersicht

Lineare Faltung

Für diskrete 2-dimensionale Funktionen I und H

$$I'(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i,j)$$

kurz: $I' = I * H$



Faltung und Korrelation

Bisherige Notation für Inputbild I und Filterkern H: lineare Korrelation

$$I'(u,v) = \sum_{i=-\lfloor K/2 \rfloor}^{\lfloor K/2 \rfloor} \sum_{j=-\lfloor L/2 \rfloor}^{\lfloor L/2 \rfloor} I(u+i, v+j) \cdot H(i,j)$$

Definition Faltung (mit R: Bereich von H mit $H(i,j) \neq 0$):

$$\begin{aligned} I'(u,v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} I(u-i, v-j) \cdot H(i,j) &= \sum_{i,j \in R} I(u-i, v-j) \cdot H(i,j) \\ &= \sum_{i,j \in R} I(u+i, v+j) \cdot H(-i,-j) \end{aligned}$$

d.h. Faltung entspricht Korrelation mit gespiegelter Filtermatrix.

Eigenschaften der Faltung

- Kommutativität:

$$I * H = H * I$$

- Linearität:

$$(a \cdot I) * H = I * (a \cdot H) = a \cdot (I * H)$$

$$(I_1 + I_2) * H = I_1 * H + I_2 * H$$

aber:

$$(b + I) * H \neq b + I * H$$

- Assoziativität:

$$A * (B * C) = (A * B) * C$$

Separable Filter

Aus der Assoziativität ergibt sich, daß ein großer Filter H in mehrere kleine Filter H_i zerlegt werden kann:

$$I * H = I * (H_1 * H_2 * \dots) = (\dots((I * H_1) * H_2) * \dots)$$

Insbesondere bei 2 eindimensionalen Filtern in x- und y-Richtung (x/y-Separabilität), z.B

$$H_x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad H_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$I' = (I * H_x) * H_y = I * (H_x * H_y) = I * H_{xy}$$

z.B. $H_{xy} = H_x * H_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ d.h. 8 statt 15 Operationen

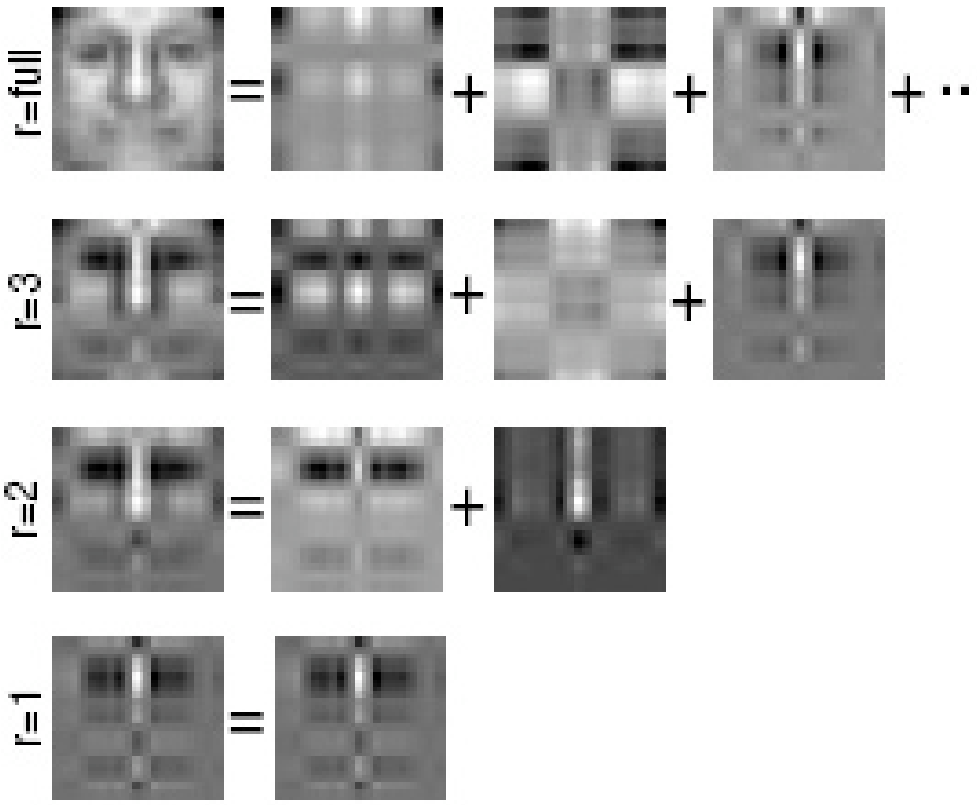
Beispiele für separable Filter

Zweidimensionale Filter sind separabel, wenn sie als äußeres Produkt geschrieben werden können:

$$H_{xy}(i,j) = H_x(i) \cdot H_y(j)$$

Beispiel: Gaußfilter

$$\begin{aligned} G_{xy}(x,y) &= e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \\ &= e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\ &= G_x(x) \cdot G_y(y) \end{aligned}$$



[Kienzle et al., 2002]

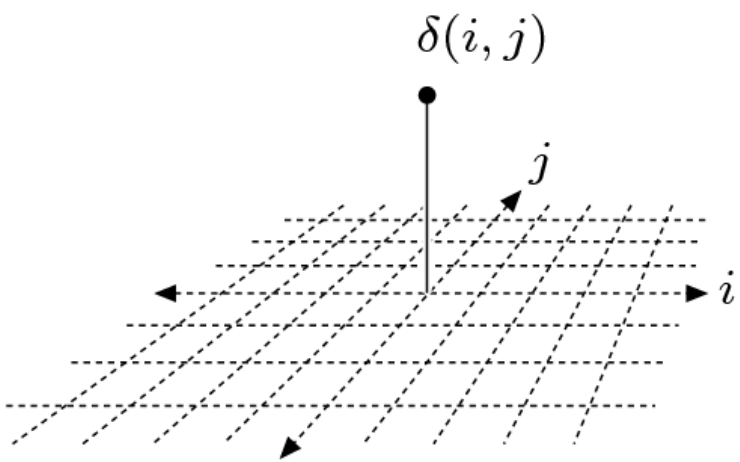
Dirac-Funktion

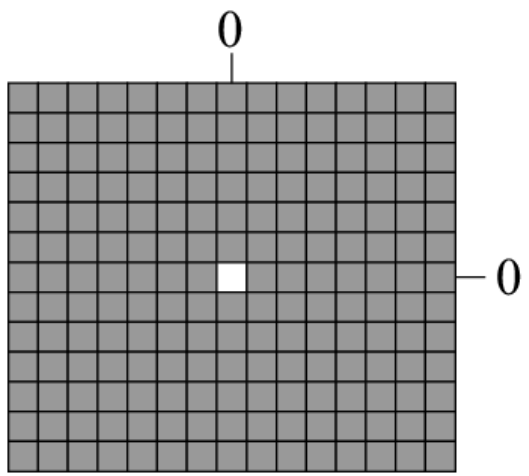
Die Impuls- oder Dirac-Funktion δ ist das neutrale Element der Faltung

$$I * \delta = I$$

Definition (zweidimensional, diskret):

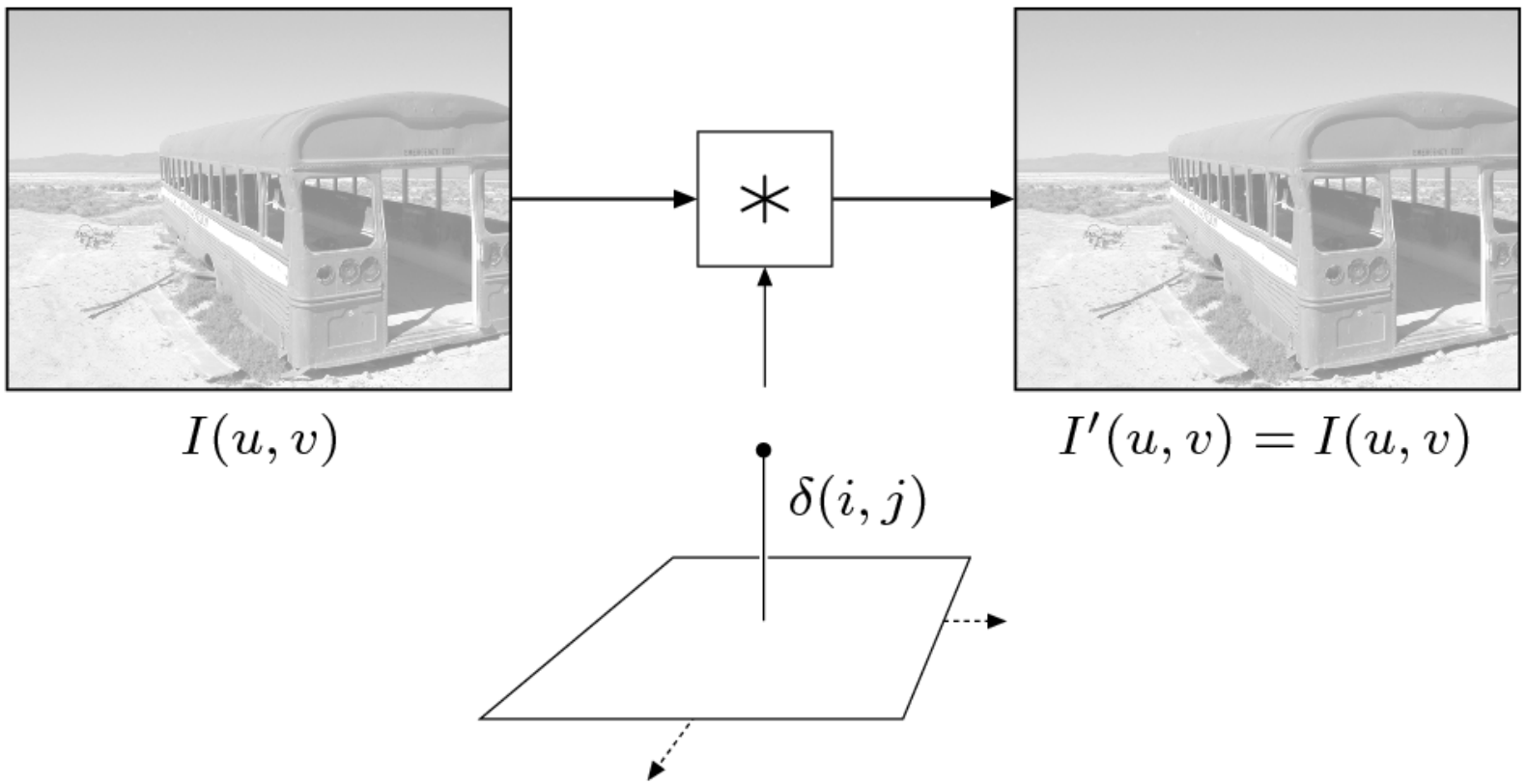
$$\delta(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j = 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$





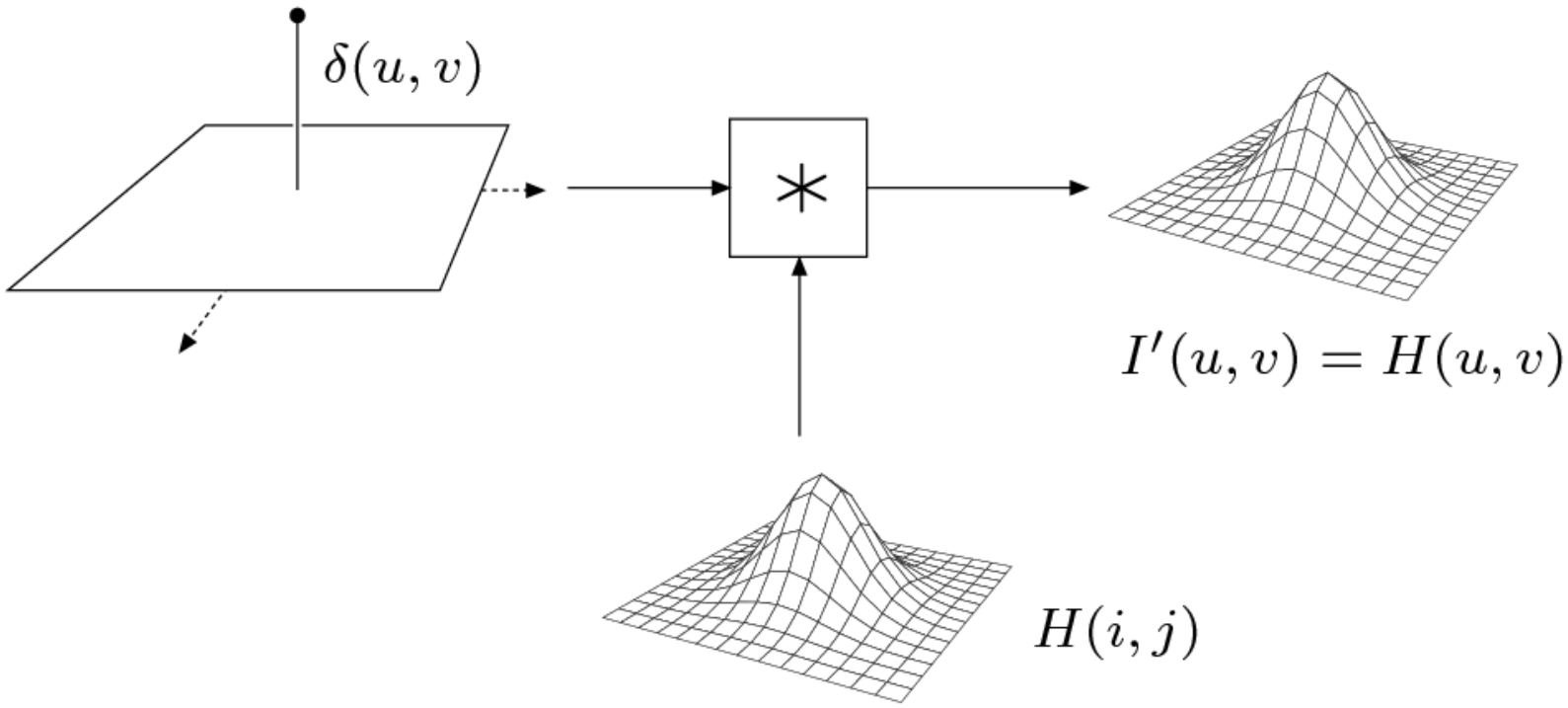
Dirac-Funktion als neutrales Element der Faltung

Die Faltung mit der Impulsfunktion ergibt wieder das ursprüngliche Bild.



Impulsantwort

Die Impulsfunktion als Input eines linearen Filters liefert die Filterfunktion H als Ergebnis.

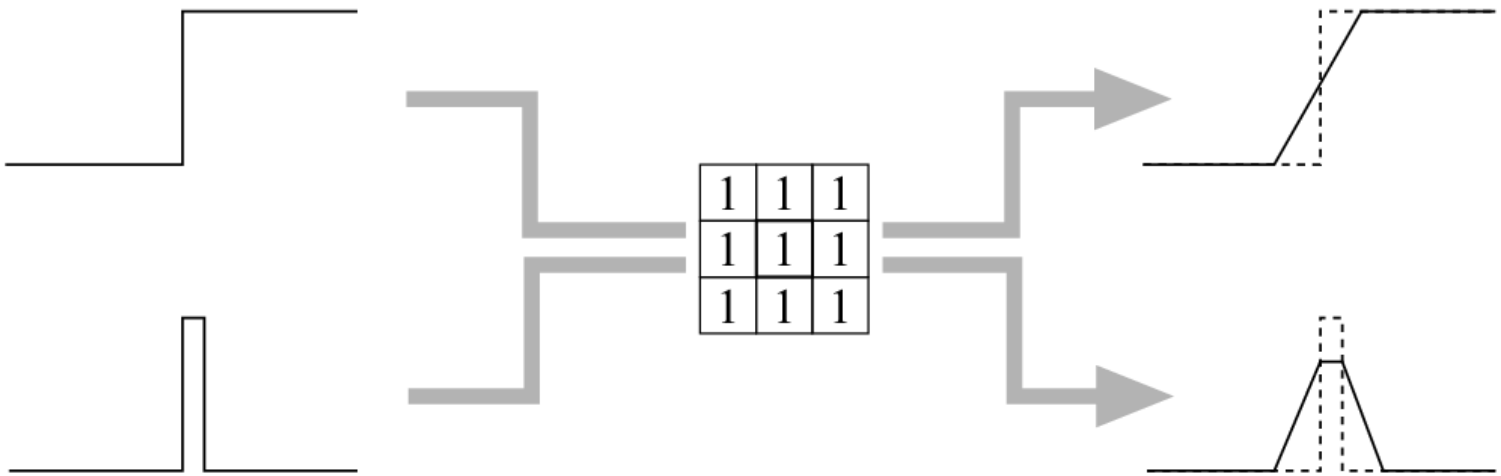


Ein Impuls charakterisiert ein lineares System vollständig!

Übersicht

Rauschunterdrückung mit linearen Filtern

Lineare Glättungsfilter reduzieren zwar das Rauschen im Bild, aber gleichzeitig werden Kanten oder Linien verbreitert und im Kontrast reduziert.



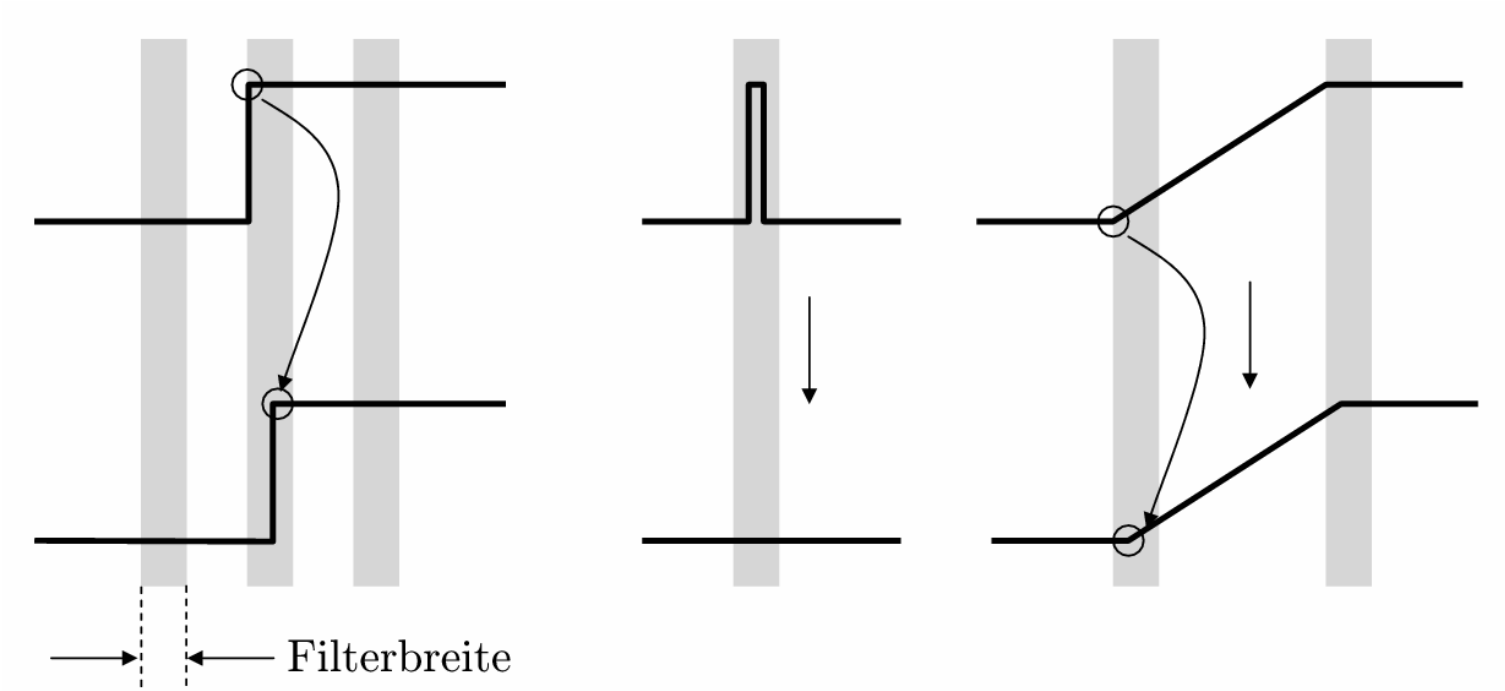
Nichtlineare Filter

Nichtlineare Filter werden so wie lineare Filter über eine Umgebung R des Zielpixels mit einer nichtlinearen Funktion $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ berechnet:

$$I'(u,v) = f(I(u,v), I(u+1,v), I(u-1,v), I(u,v+1), \ldots)$$

z.B. Minimum- und Maximumfilter:

$$\begin{aligned} I'(u,v) &= \min\{I(u+i,v+j) | i,j \in R\} \\ I'(u,v) &= \max\{I(u+i,v+j) | i,j \in R\} \end{aligned}$$



Beispiel: Minimum- und Maximumfilter auf Salt-and-Pepper-Rauschen

(a) (b) (c)

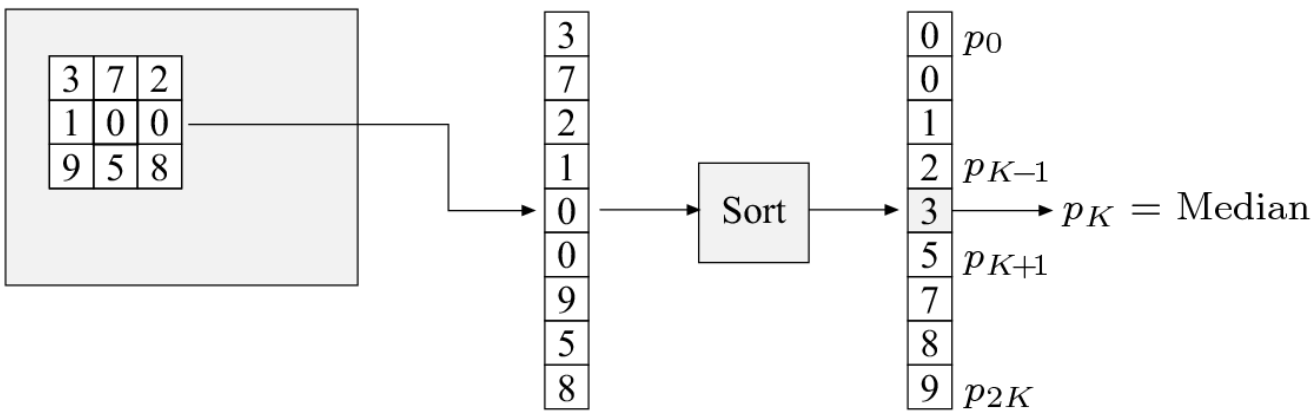
Minimumfilter eliminiert weiße Punkte und verbreitert dunkle Regionen, Maximumfilter macht das Gegenteil.

Medianfilter

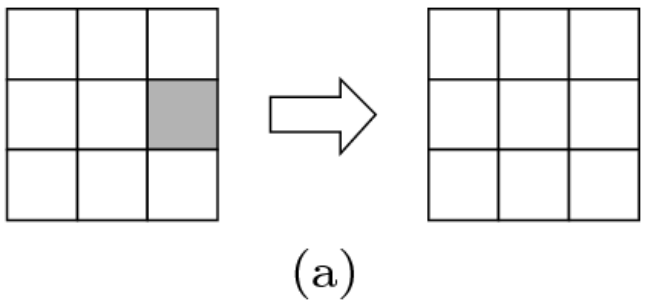
Der Medianfilter ersetzt jeden Pixel durch den Median seiner Umgebung R. Bei $2k+1$ aufsteigend sortierten Pixeln ist der Median definiert als

$$\text{median}\{p_0, p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_{2k}\} = p_k,$$

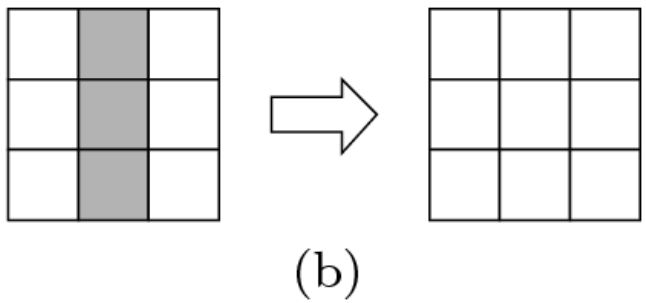
bei $2k$ aufsteigend sortierten Pixeln $\{p_0, \ldots, p_{2k-1}\}$ als $(p_{k-1} + p_k)/2$.



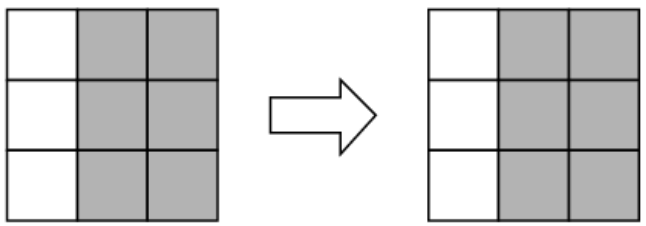
Beispiel: 3×3-Medianfilter



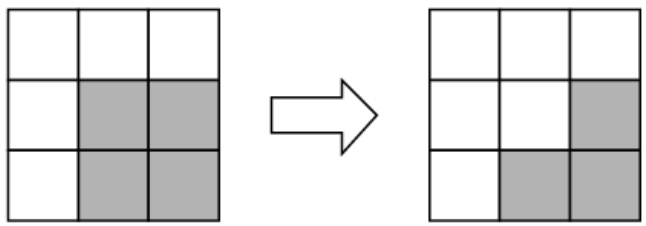
(a)



(b)



(c)



(d)

Vergleich linearer Glättungs- und Medianfilter

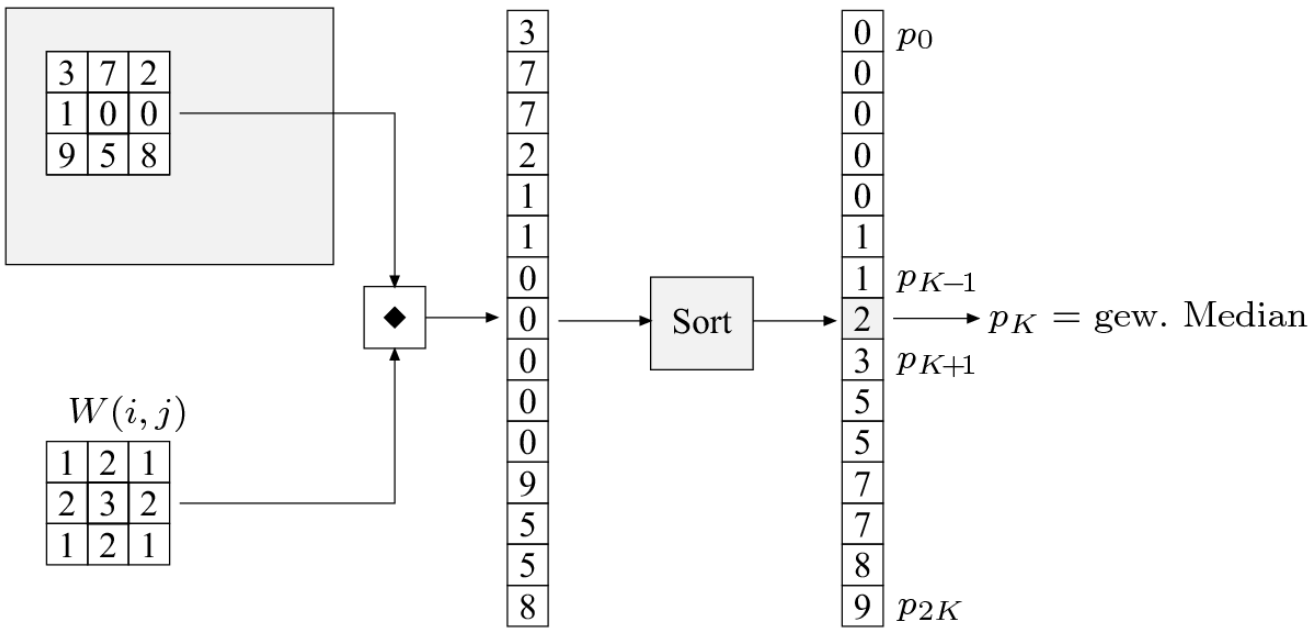
(a) (b) (c)

- Der lineare Filter dämpft das Rauschen, macht aber das Bild unscharf.
- Der Medianfilter eliminiert Spitzen/Höhen, erzeugt örtlich Flecken mit konstanter Intensität.

Gewichteter Medianfilter

Grundidee: Wert wird in der sortierten Liste so oft wiederholt, wie sein Gewicht ist, d.h. die Liste wird dadurch $L = \sum_{i,j \in R} W(i,j)$ lang.

Beispiel:



Weitere nichtlineare Filter...

- Morphologische Filter
- Interest-Point-Detektoren
- Volterra-Filter:

$$
\begin{aligned}
y(t) = h^{(0)} &+ \int_{\mathbb{R}} h^{(1)}(\tau_1) x(t-\tau_1)\, d\tau_1 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} h^{(2)}(\tau_1,\tau_2) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} h^{(3)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) x(t-\tau_1) x(t-\tau_2) x(t-\tau_3)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_2 \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$