

Wavelets

It is hardly an exaggeration to say that we will introduce almost as many analysis algorithms as there are signals ... signals are so rich and complex that a single method ... cannot serve them all.

Yves Meyer

Examining a few trees should give us a good feeling for the forest of wavelet transforms.

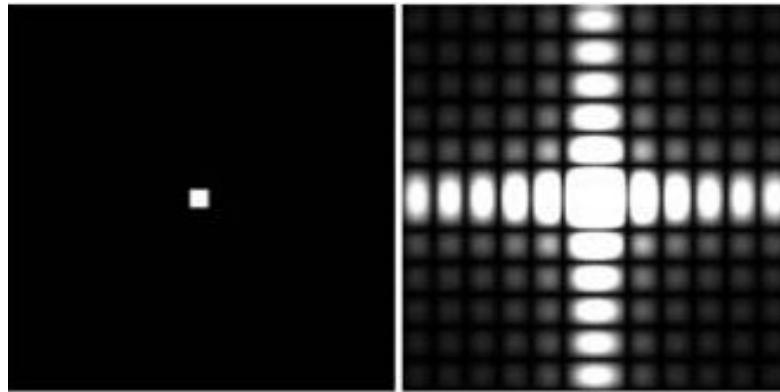
James S. Walker

Inhalt:

- 1-level Haar-Transformation (1D)
- Multiple-level Haar-Transformation (1D)
- Haar-Wavelets (1D)
- Daubechies-Wavelets (1D)
- 2D Wavelet-Transformation
- Bildkompression
- Wavelet Paket Transformationen

Motivation (1)

Bei Fourier oder DCT wird angenommen, dass die Wellen unterschiedlicher Frequenz überall im Bild existieren. Meistens gibt es allerdings Bereiche, wo niedrige Frequenzen vorherrschen, und solche, wo kleine detailreiche Strukturen durch hohe Frequenzen repräsentiert werden.



Im obigen Extrembeispiel werden Wellen hoher Frequenz nur an den Kanten des Quadrats benötigt, um den abrupten Wechsel von schwarz nach weiss zu modellieren. Es sind aber eine große Anzahl von ausgleichenden Wellen erforderlich. Ihr einziger Zweck besteht darin, dafür zu sorgen, dass nach Summierung aller Wellen das Resultat an allen Stellen mit Ausnahme der Kante konstant ist.

Motivation (2)

Großer Nachteil von Fourier/DCT:

Basisfunktionen besitzen einen unendlichen Support im Ortsraum

- Mangelnde Effizienz in der Repräsentation
- Verlust jeglicher Ortsinformationen
- Operationen im Frequenzraum können nicht auf bestimmte Gebiete im Ortsraum beschränkt werden

Motivation (2)

Großer Nachteil von Fourier/DCT:

Basisfunktionen besitzen einen unendlichen Support im Ortsraum

- Mangelnde Effizienz in der Repräsentation
- Verlust jeglicher Ortsinformationen
- Operationen im Frequenzraum können nicht auf bestimmte Gebiete im Ortsraum beschränkt werden

Analog Fourier/DCT stellt Wavelet-Transformation ein Signal/Bild als lineare Kombination von Basisfunktionen unterschiedlicher Frequenzen dar

Wavelets (Basisfunktionen der Wavelet-Transformation) besitzen nur örtlich beschränkten Support

1-level Haar-Transformation (1)

Haar-Wavelets gehören zu den einfachsten Wavelets und bilden die Basisfunktionen der Haar-Transformation

1-level Haar-Transformation:

Annahme: 1D Signal f von Länge $N = 2^n$

1-level Haar-Transformation für $f = (x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$f \xrightarrow{H_1} (a^1 \mid d^1)$$

wobei

$$a^1 = \left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3 + x_4}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_{N-1} + x_N}{\sqrt{2}} \right)$$

$$d^1 = \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_3 - x_4}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{x_{N-1} - x_N}{\sqrt{2}} \right)$$

a^1 bzw. d^1 wird als *Trend* bzw. *Details* bezeichnet

1-level Haar-Transformation (2)

Beispiel:

$$\begin{aligned}f &= (9, 7, 3, 5) \\a^1 &= \left(\frac{16}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}}\right) \\d^1 &= \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Transformation H_1 ist umkehrbar, d.h. Rekonstruktion von f aus (a^1, d^1)

$$\begin{aligned}a^1 &= (a_1, \dots, a_{N/2}) \\d^1 &= (d_1, \dots, d_{N/2}) \\f &= \left(\frac{a_1 + d_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1 - d_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2} + d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2} - d_{N/2}}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

1-level Haar-Transformation (3)

Eigenschaft (Small Fluctuations Feature):

Details d^1 haben in der Regel wesentlich kleinere Werte als Trend a^1

Begründung: Kontinuierliches Signal f mit sehr kleinem Zeitabstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Messungen, d.h. $x_k \approx x_{k+1} \implies$

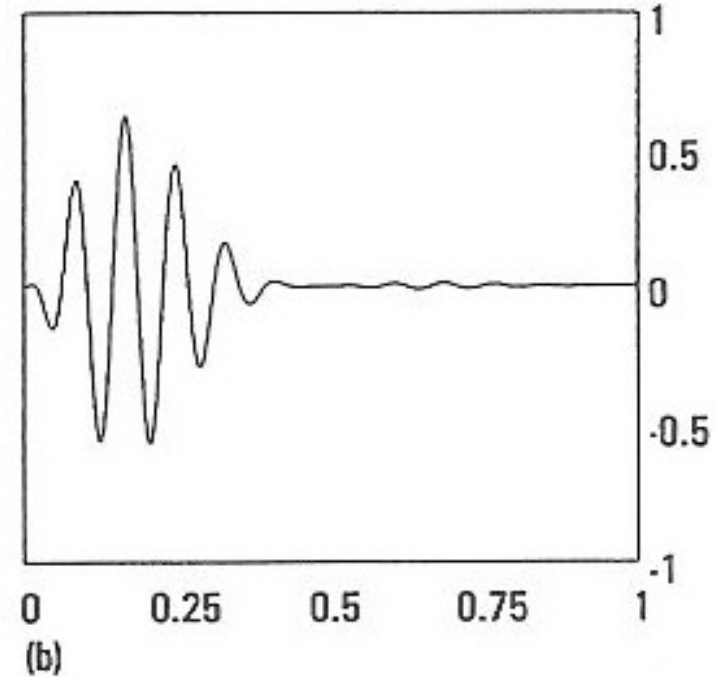
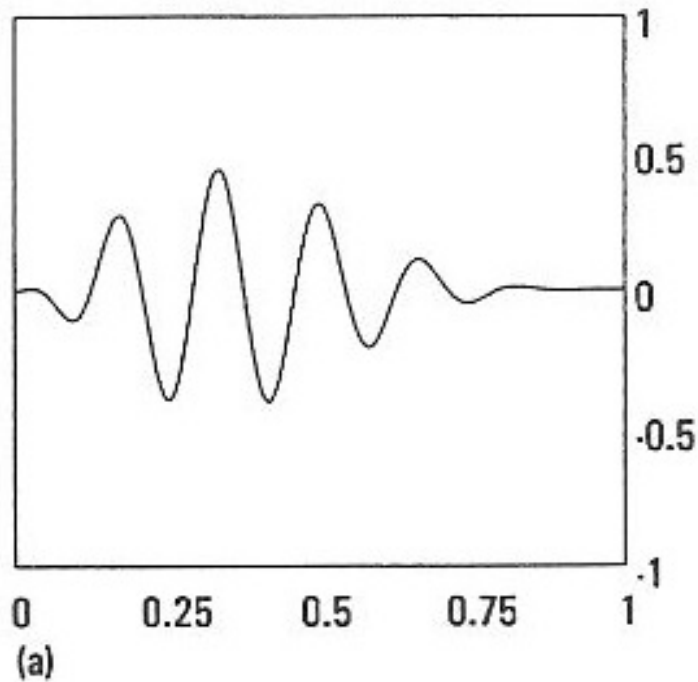
$$d_i = \frac{x_{2i-1} - x_{2i}}{\sqrt{2}} \approx 0$$

$$a_i = \frac{x_{2i-1} + x_{2i}}{\sqrt{2}} \approx \sqrt{2}x_{2i}$$

Trend a^1 hat dieselbe Form wie f (Wertvergrößerung um Faktor $\sqrt{2}$ bei Halbierung der Länge)

1-level Haar-Transformation (4)

Beispiel: a) Signal f ; b) 1-level Haar-Transformation



Diese Eigenschaft gilt für alle Wavelet-Transformationen und bildet die Grundlage für entsprechende Operationen zur Signalverarbeitung

1-level Haar-Transformation (5)

Erhaltung der Energie:

Energie eines Signals $f = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ wird definiert als:

$$E_f = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$$

Wichtige Eigenschaft der (1-level) Haar-Transformation: Energie durch die Transformation nicht verändert

Begründung: Energie von $(a^1 \mid d^1)$

$$\begin{aligned} & a_1^2 + \dots + a_{N/2}^2 + d_1^2 + \dots + d_{N/2}^2 \\ &= \frac{(x_1+x_2)^2}{2} + \frac{(x_1-x_2)^2}{2} + \dots + \frac{(x_{N-1}+x_N)^2}{2} + \frac{(x_{N-1}-x_N)^2}{2} \\ &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2 + x_N^2 \\ &= E_f \end{aligned}$$

1-level Haar-Transformation (6)

Verdichtung der Energie:

Bei gleich bleibender Summe wird die Energie neu verteilt

Beispiel: $f = (9, 7, 3, 5)$, $a^1 = (\frac{16}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}})$, $d^1 = (\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$

$$E_{a^1} = \left(\frac{16}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 = 160$$

$$E_{d^1} = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4$$

$$E_{a^1} + E_{d^1} = E_f = 164$$

Energieanteil von a^1 : $\frac{160}{164} = 97.6\%$

1-level Haar-Transformation (6)

Verdichtung der Energie:

Bei gleich bleibender Summe wird die Energie neu verteilt

Beispiel: $f = (9, 7, 3, 5)$, $a^1 = (\frac{16}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}})$, $d^1 = (\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$

$$E_{a^1} = (\frac{16}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{8}{\sqrt{2}})^2 = 160$$

$$E_{d^1} = (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{2}{\sqrt{2}})^2 = 4$$

$$E_{a^1} + E_{d^1} = E_f = 164$$

Energieanteil von a^1 : $\frac{160}{164} = 97.6\%$

Beispiel: Signal f auf Folie 7

$$E_f = 127.308, \quad E_{a^1} = 127.305, \quad E_{d^1} = 0.003$$

Anteil von E_{a^1} an Gesamtenergie: 99.998%

Haar-Transformation bewirkt Verschiebung des Hauptanteils der Gesamtenergie in Trend a^1 (Verdichtung der Energie/Information)

Multiple-level Haar-Transformation (1)

2-level Haar-Transformation aus Anwendung der 1-level Haar-Transformation an a^1 :

$$f \xrightarrow{H_2} (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$$

wobei

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{H_1} (a^1 \mid d^1) \\ a^1 &\xrightarrow{H_1} (a^2 \mid d^2) \end{aligned}$$

Multiple-level Haar-Transformation (1)

2-level Haar-Transformation aus Anwendung der 1-level Haar-Transformation an a^1 :

$$f \xrightarrow{H_2} (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$$

wobei

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{H_1} (a^1 \mid d^1) \\ a^1 &\xrightarrow{H_1} (a^2 \mid d^2) \end{aligned}$$

Beispiel: $f = (9, 7, 3, 5)$, $a^1 = (\frac{16}{\sqrt{2}}, \frac{8}{\sqrt{2}})$, $d^1 = (\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$

$$a^2 = (12)$$

$$d^2 = (4)$$

$$f \xrightarrow{H_2} (12 \mid 4 \mid \frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}})$$

Maximal n -level Haar-Transformation für $N = 2^n$

Multiple-level Haar-Transformation (2)

Beispiel: $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$

$$a^1 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{22}{\sqrt{2}}, \frac{14}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}} \right), \quad d^1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$a^2 = (16, 12), \quad d^2 = (-6, 2)$$

$$a^3 = \left(\frac{28}{\sqrt{2}} \right), \quad d^3 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}} \right)$$

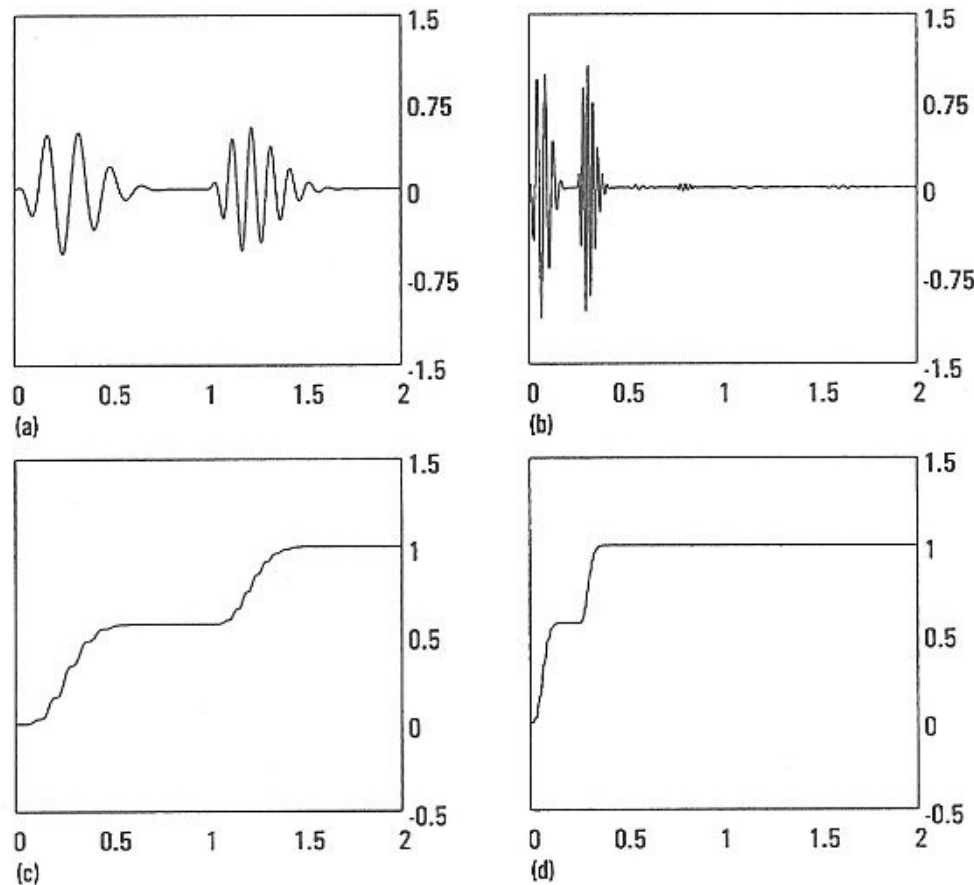
D.h.

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{H_3} (a^3 \mid d^3 \mid d^2 \mid d^1) \\ &= \left(\frac{28}{\sqrt{2}} \mid \frac{4}{\sqrt{2}} \mid -6, 2 \mid -\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right) \end{aligned}$$

Multiple-level Haar-Transformation (3)

Auch bei multiple-level Haar-Transformation bleibt Energie unverändert. Mit zunehmender Anzahl von Levels setzt sich Verdichtung fort.

Beispiel: a) Signal; b) 2-level Haar-Transformation; c)+d) kumulative Energie



Kumulative Energie eines Signals
 $f = (x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$\left(\frac{x_1^2}{E_f}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{E_f}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2}{E_f}, 1 \right)$$

Haar-Transformation bewirkt eine
Konzentration der Gesamtenergie
in a^2

Haar-Wavelets (1)

1-level Haar-Wavelets:

$$\mathbf{W}_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{W}_2^1 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, 0, 0 \right)$$

\vdots

$$\mathbf{W}_{N/2}^1 = \left(0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$\mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1$: verschobene Versionen von \mathbf{W}_1^1 (Diese Wavelets haben nur einen beschränkten Support von zwei Zeiteinheiten)

Kompakte Darstellung von Details d^1 :

$$d^1 = (f\mathbf{W}_1^1, f\mathbf{W}_2^1, \dots, f\mathbf{W}_{N/2}^1)$$

Haar-Wavelets (2)

Small-Fluctuations-Feature Eigenschaft:

Falls ein Signal f über dem Support eines 1-level Haar-Wavelets \mathbf{W}_k^1 (annähernd) konstant ist, dann ist der entsprechende Wert in Details d^1 , $f\mathbf{W}_k^1$, (annähernd) null.

Vgl. weitergehende Aussage bei Daubechies-Wavelets

Haar-Wavelets (3)

Aus sog. Skalierungsfunktionen:

$$\mathbf{V}_1^1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots, 0, 0 \right)$$

$$\mathbf{V}_2^1 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, 0, 0 \right)$$

\vdots

$$\mathbf{V}_{N/2}^1 = \left(0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

ergibt sich kompakte Darstellung von Trend a^1 :

$$a^1 = (f\mathbf{V}_1^1, f\mathbf{V}_2^1, \dots, f\mathbf{V}_{N/2}^1)$$

Haar-Wavelets (4)

Es existiert ähnliche kompakte Darstellung für jede multiple-level Haar-Transformation! Z.B. für 2-level Haar-Transformation:

$$\begin{aligned}a^2 &= (f\mathbf{V}_1^2, f\mathbf{V}_2^2, \dots, f\mathbf{V}_{N/4}^2) \\ \mathbf{V}_1^2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0\right) \\ \mathbf{V}_2^2 &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, 0, 0, 0, 0\right) \\ &\dots \\ \mathbf{V}_{N/4}^2 &= \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}d^2 &= (f\mathbf{W}_1^2, f\mathbf{W}_2^2, \dots, f\mathbf{W}_{N/4}^2) \\ \mathbf{W}_1^2 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0\right) \\ \mathbf{W}_2^2 &= \left(0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, 0, 0, 0, 0\right) \\ &\dots \\ \mathbf{W}_{N/4}^2 &= \left(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{W}_1^2, \mathbf{W}_2^2, \dots, \mathbf{W}_{N/4}^2$ die 2-level Wavelets sind

Haar-Wavelets (5)

Rekonstruktion aus 1-level Haar-Transformation:

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{a_1 + d_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1 - d_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2} + d_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2} - d_{N/2}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}}, \frac{a_{N/2}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}, -\frac{d_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}}, -\frac{d_{N/2}}{\sqrt{2}} \right) \\ &= (a_1 \mathbf{V}_1^1 + \dots + a_{N/2} \mathbf{V}_{N/2}^1) + (d_1 \mathbf{W}_1^1 + \dots + d_{N/2} \mathbf{W}_{N/2}^1) \\ &= \underbrace{(f \mathbf{V}_1^1) \mathbf{V}_1^1 + \dots + (f \mathbf{V}_{N/2}^1) \mathbf{V}_{N/2}^1}_{A^1} + \underbrace{(f \mathbf{W}_1^1) \mathbf{W}_1^1 + \dots + (f \mathbf{W}_{N/2}^1) \mathbf{W}_{N/2}^1}_{D^1} \\ &= A^1 + D^1 \end{aligned}$$

Haar-Wavelets (6)

Wichtig: $V_1^1, V_2^1, \dots, V_{N/2}^1, W_1^1, W_2^1, \dots, W_{N/2}^1$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisfunktionen im N -dimensionalen Raum

$$\begin{aligned} V_i^1 \cdot V_j^1 &= 0, & W_i^1 \cdot W_j^1 &= 0, & i \neq j; & & V_i^1 \cdot W_j^1 &= 0 \\ |V_i^1| &= |W_i^1| & & & & & &= 1 \end{aligned}$$

Sie spannen zusammen ein neues Koordinatensystem auf. Die 1-level Haar-Transformation liefert die Koordinaten (a^1, d^1) von f in diesem neuen Koordinatensystem.

Haar-Wavelets (6)

Wichtig: $V_1^1, V_2^1, \dots, V_{N/2}^1, W_1^1, W_2^1, \dots, W_{N/2}^1$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisfunktionen im N -dimensionalen Raum

$$V_i^1 \cdot V_j^1 = 0, \quad W_i^1 \cdot W_j^1 = 0, \quad i \neq j; \quad V_i^1 \cdot W_j^1 = 0 \\ |V_i^1| = |W_i^1| = 1$$

Sie spannen zusammen ein neues Koordinatensystem auf. Die 1-level Haar-Transformation liefert die Koordinaten (a^1, d^1) von f in diesem neuen Koordinatensystem.

Beispiel: $f = (4, 6, 10, 12, 8, 6, 5, 5)$

$$a^1 = \left(\frac{10}{\sqrt{2}}, \frac{22}{\sqrt{2}}, \frac{14}{\sqrt{2}}, \frac{10}{\sqrt{2}} \right), \quad d^1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Deshalb gilt:

$$f = \frac{10}{\sqrt{2}} V_1^1 + \frac{22}{\sqrt{2}} V_2^1 + \frac{14}{\sqrt{2}} V_3^1 + \frac{10}{\sqrt{2}} V_4^1 - \frac{2}{\sqrt{2}} W_1^1 - \frac{2}{\sqrt{2}} W_2^1 + \frac{2}{\sqrt{2}} W_3^1$$

Haar-Wavelets (7)

Rekonstruktion aus 2-level Haar-Transformation

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{H_2} (a^2 \mid d^2 \mid d^1) \\ f &= A^2 + D^2 + D^1 \\ D^1 &= (f\mathbf{W}_1^1)\mathbf{W}_1^1 + (f\mathbf{W}_2^1)\mathbf{W}_2^1 + \cdots + (f\mathbf{W}_{N/2}^1)\mathbf{W}_{N/2}^1 \\ D^2 &= (f\mathbf{W}_1^2)\mathbf{W}_1^2 + (f\mathbf{W}_2^2)\mathbf{W}_2^2 + \cdots + (f\mathbf{W}_{N/4}^2)\mathbf{W}_{N/4}^2 \\ A^2 &= (f\mathbf{V}_1^2)\mathbf{V}_1^2 + (f\mathbf{V}_2^2)\mathbf{V}_2^2 + \cdots + (f\mathbf{V}_{N/4}^2)\mathbf{V}_{N/4}^2 \end{aligned}$$

Analog sind die N Vektoren:

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2, \dots, \mathbf{V}_{N/4}^2, \\ &\mathbf{W}_1^2, \mathbf{W}_2^2, \dots, \mathbf{W}_{N/4}^2, \\ &\mathbf{W}_1^1, \mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1 \end{aligned}$$

orthonormal und spannen ein neues Koordinatensystem im N -dimensionalen Raum auf. Die 2-level Haar-Transformation liefert die Koordinaten (a^2, d^2, d^1) von f in diesem neuen Koordinatensystem.

Haar-Wavelets (7)

Rekonstruktion aus 2-level Haar-Transformation

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{H_2} (a^2 \mid d^2 \mid d^1) \\ f &= A^2 + D^2 + D^1 \\ D^1 &= (f\mathbf{W}_1^1)\mathbf{W}_1^1 + (f\mathbf{W}_2^1)\mathbf{W}_2^1 + \dots + (f\mathbf{W}_{N/2}^1)\mathbf{W}_{N/2}^1 \\ D^2 &= (f\mathbf{W}_1^2)\mathbf{W}_1^2 + (f\mathbf{W}_2^2)\mathbf{W}_2^2 + \dots + (f\mathbf{W}_{N/4}^2)\mathbf{W}_{N/4}^2 \\ A^2 &= (f\mathbf{V}_1^2)\mathbf{V}_1^2 + (f\mathbf{V}_2^2)\mathbf{V}_2^2 + \dots + (f\mathbf{V}_{N/4}^2)\mathbf{V}_{N/4}^2 \end{aligned}$$

Analog sind die N Vektoren:

$$\begin{aligned} &\mathbf{V}_1^2, \mathbf{V}_2^2, \dots, \mathbf{V}_{N/4}^2, \\ &\mathbf{W}_1^2, \mathbf{W}_2^2, \dots, \mathbf{W}_{N/4}^2, \\ &\mathbf{W}_1^1, \mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1 \end{aligned}$$

orthonormal und spannen ein neues Koordinatensystem im N -dimensionalen Raum auf. Die 2-level Haar-Transformation liefert die Koordinaten (a^2, d^2, d^1) von f in diesem neuen Koordinatensystem.

Rekonstruktion aus n -level Haar-Transformation

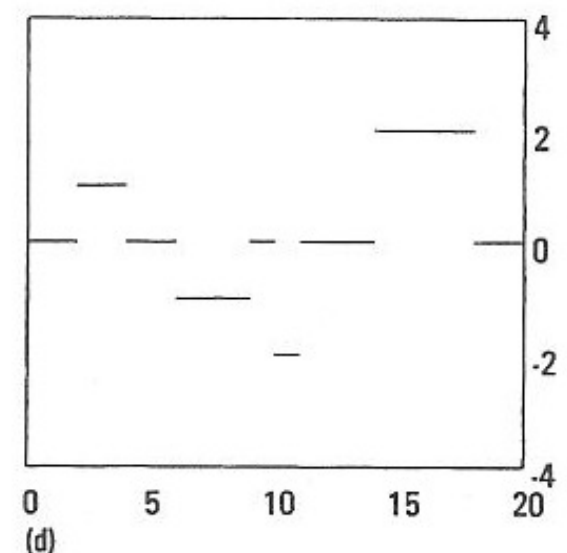
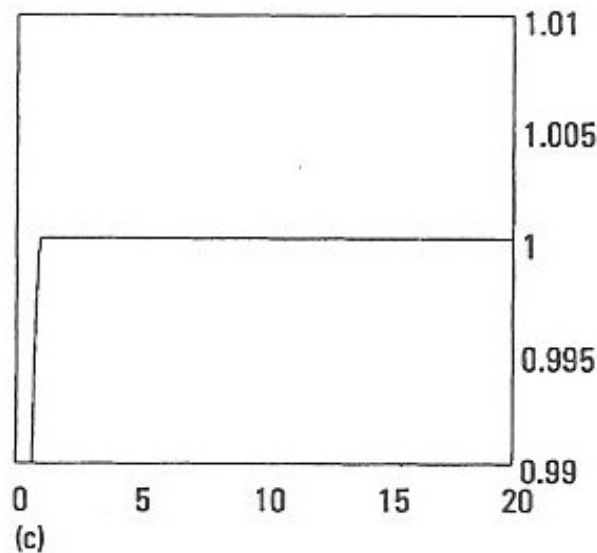
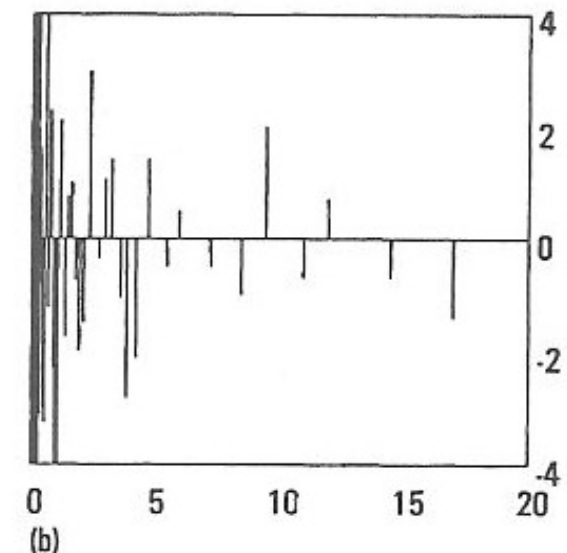
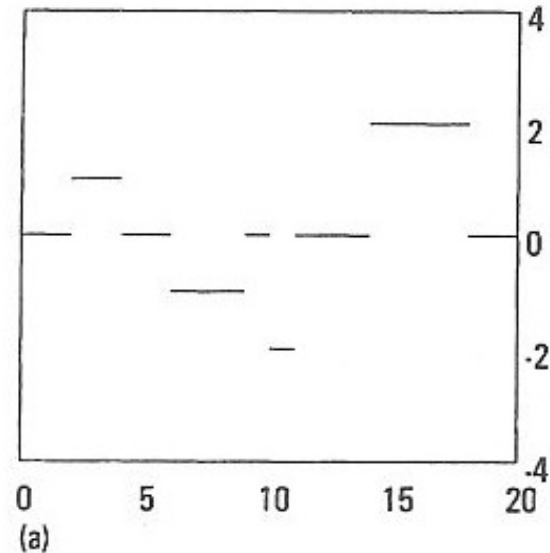
$$\begin{aligned} f &= A^n + D^n + D^{n-1} + \dots + D^2 + D^1 \\ f &\xrightarrow{H_n} (a^n \mid d^n \mid d^{n-1} \mid \dots \mid d^2 \mid d^1) \end{aligned}$$

Haar-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (1)

Kompression:

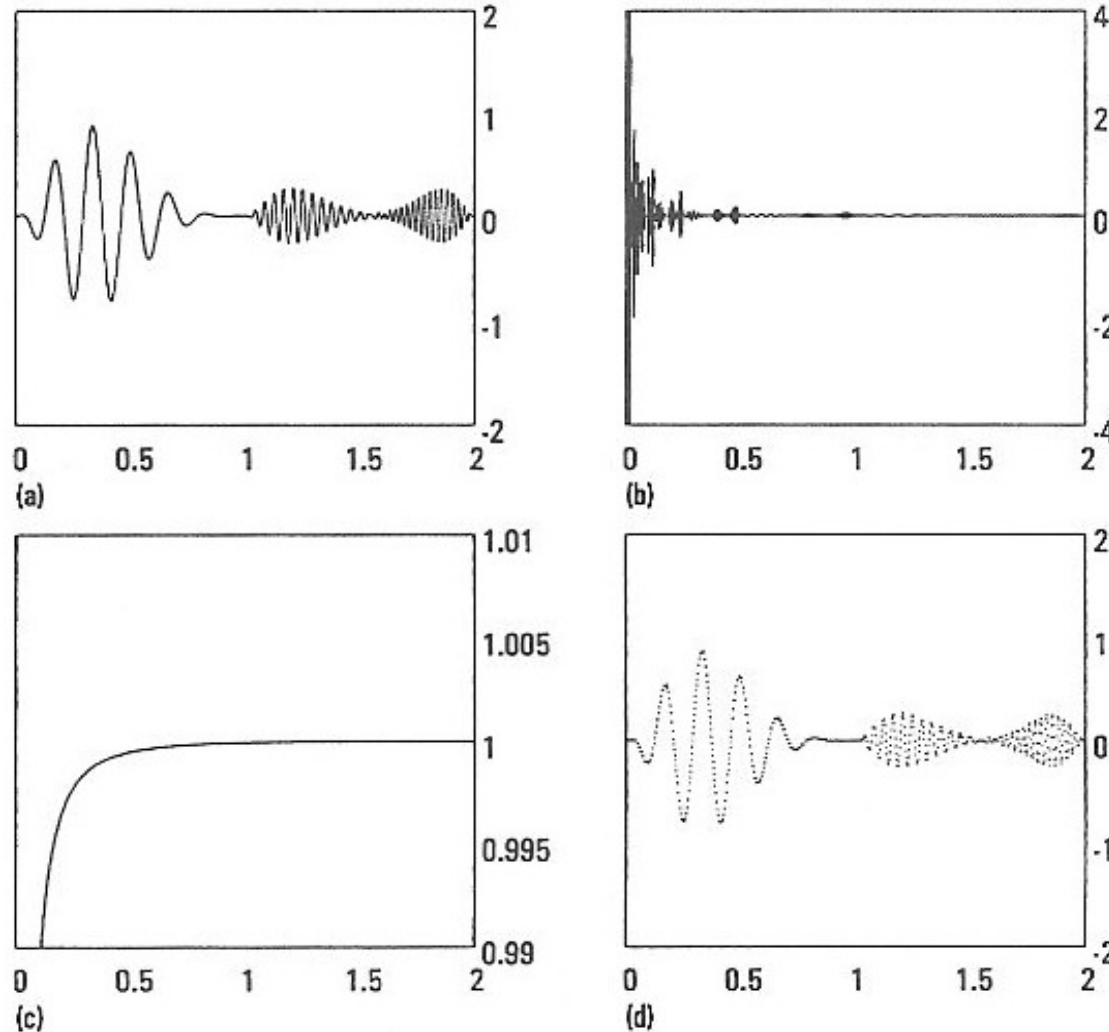
Dank Energieverdichtung kann ein Signal f ohne viel Verlust durch kleine Anzahl m ($\ll |f|$) von Koeffizienten der Haar-Transformation wiedergegeben werden (alle Koeffizienten kleiner als ein Schwellwert auf null gesetzt)

Beispiel: a) Signal f , $|f| = 1024$; b) 10-level Haar-Transformation; c) kumulative Energie; d) 20:1 Kompression, 100% Energieerhaltung



Haar-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (2)

Beispiel: a) Signal f , $|f| = 4096$; b) 12-level Haar-Transformation; c) kumulative Energie; d) 10:1 Kompression, 99.6% Energieerhaltung



Faustregel: $\geq 99.99\%$ Energieerhaltung nötig für akzeptable Wiedergabe

Haar-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (3)

Kompressionsverfahren:

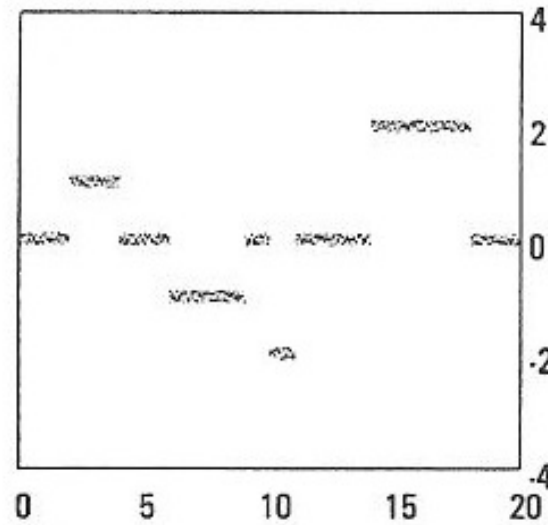
- Wavelet-Transformation durchführen
- alle Koeffizienten kleiner als ein Schwellwert auf null setzen und ignorieren
- das sog. significance map erstellen (binär!)
- alle beibehaltenen Koeffizienten + significance map *geeignet* abspeichern
- Rücktransformation

Haar-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (4)

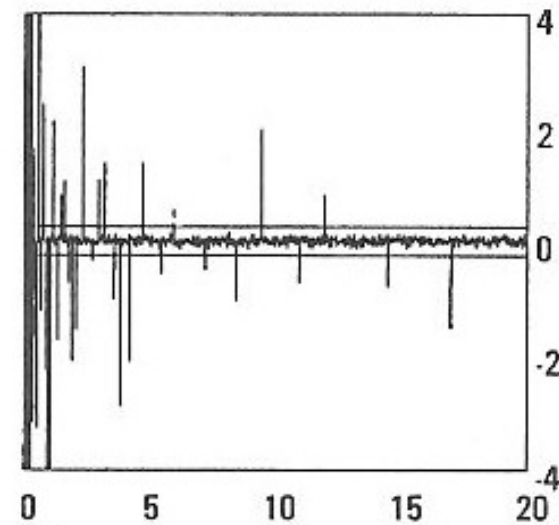
Glättung von Audiosignalen:

Alle Koeffizienten der Haar-Transformation kleiner als ein Schwellwert werden auf null gesetzt

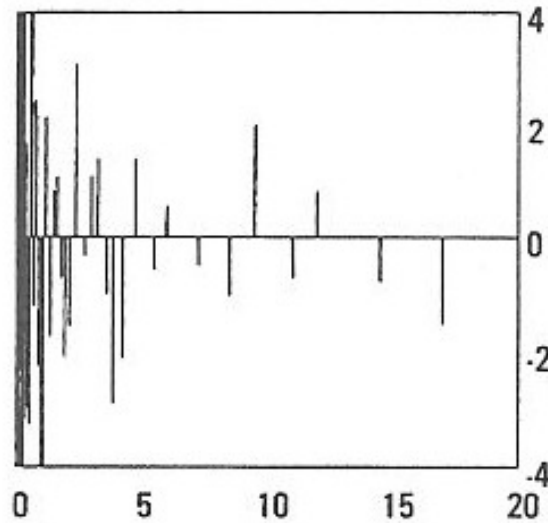
Beispiel: a) Signal f , $|f| = 1024$; b) 10-level Haar-Transformation; c) kleine Koeffizienten werden auf null gesetzt; d) geglättetes Signal



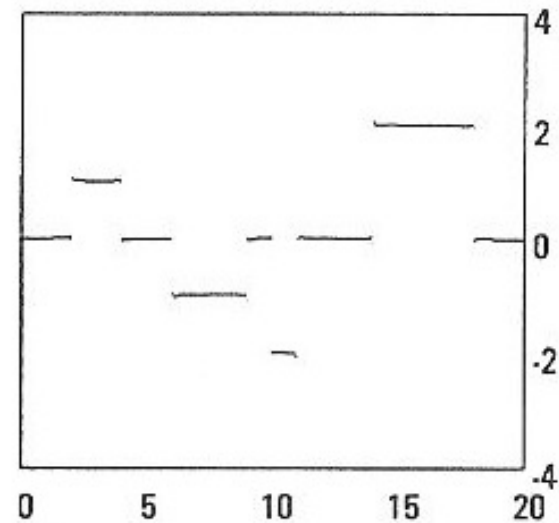
(a)



(b)



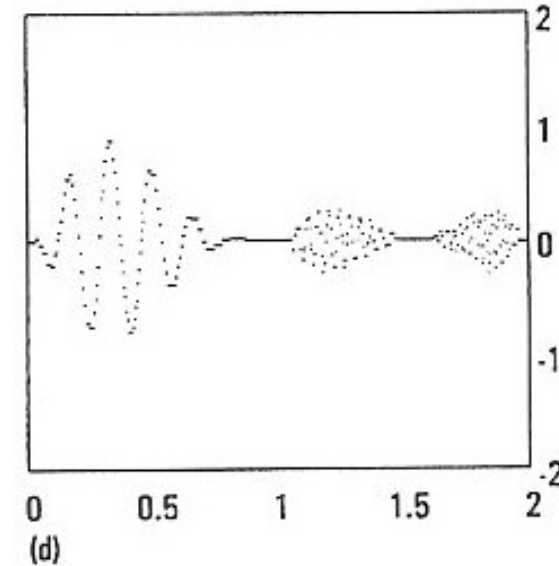
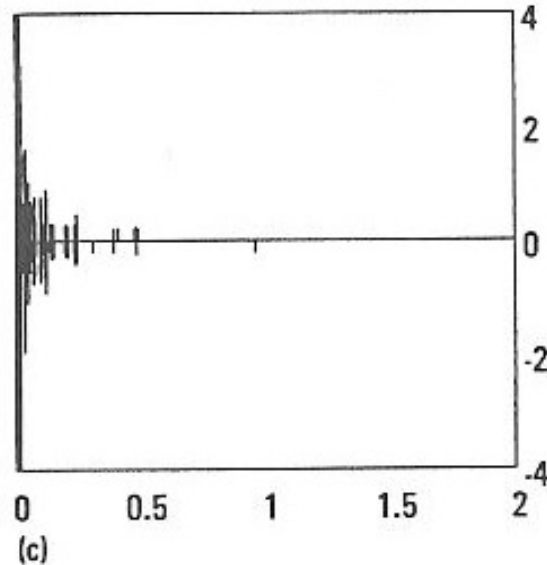
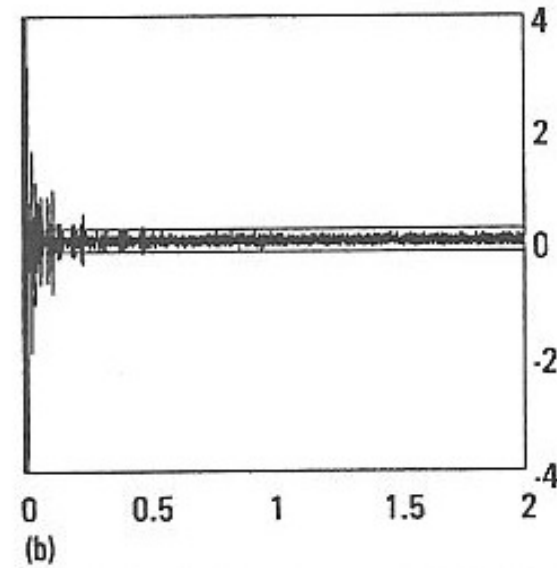
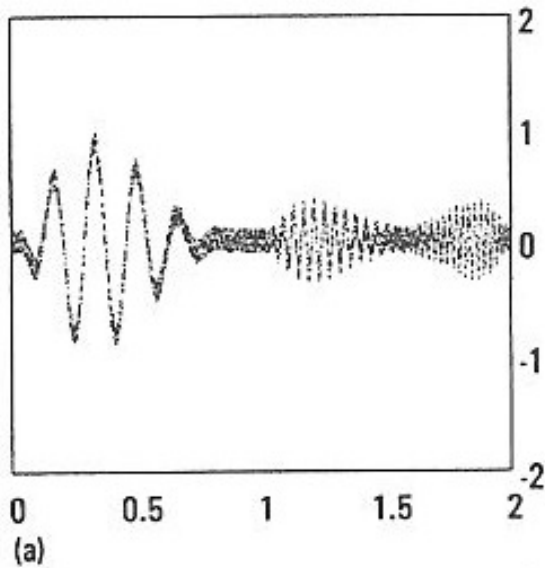
(c)



(d)

Haar-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (5)

Beispiel: a) Signal f , $|f| = 4096$; b) 12-level Haar-Transformation; c) kleine Koeffizienten werden auf null gesetzt; d) geglättetes Signal



Daubechies-Wavelets: Daub4-Transformation (1)

Unterschied Daubechies / Haar-Wavelets: Definition der Basisfunktionen
(Daubechies-Wavelets besitzen größeren Support \implies stärkere Verdichtung
der Energie)

Daub4-Transformation:

$$f \xrightarrow{D_{41}} (a^1 \mid d^1)$$
$$a^1 = (f\mathbf{V}_1^1, f\mathbf{V}_2^1, \dots, f\mathbf{V}_{N/2}^1)$$
$$d^1 = (f\mathbf{W}_1^1, f\mathbf{W}_2^1, \dots, f\mathbf{W}_{N/2}^1)$$

Skalierungsfunktionen:

$$\mathbf{V}_1^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\mathbf{V}_2^1 = (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0, 0)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{V}_{N/2-1}^1 = (0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$
$$\mathbf{V}_{N/2}^1 = (\alpha_3, \alpha_4, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2)$$
$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \alpha_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Daubechies-Wavelets: Daub4-Transformation (2)

1-level Daub4-Wavelets:

$$\mathbf{W}_1^1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathbf{W}_2^1 = (0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

\vdots

$$\mathbf{W}_{N/2-1}^1 = (0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

$$\mathbf{W}_{N/2}^1 = (\beta_3, \beta_4, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2)$$

$$\beta_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta_4 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

Vektoren $\mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1, \dots, \mathbf{V}_{N/2}^1, \mathbf{W}_1^1, \mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisfunktionen im N -d Raum
 \implies neues Koordinatensystem; 1-level Daub4-Transformation liefert Koordinaten (a^1, d^1) von f im neuen Koordinatensystem

Daubechies-Wavelets: Daub4-Transformation (3)

Eigenschaft:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$$

$$0\beta_1 + 1\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 = 0$$

Dies führt zu:

Small-Fluctuations-Feature Eigenschaft:

Falls ein Signal f über dem Support eines 1-level Daub4-Wavelets \mathbf{W}_k^1 (annähernd) linear ist, dann ist der entsprechende Wert in Details d^1 , $f\mathbf{W}_k^1$, (annähernd) null.

Daubechies-Wavelets: Daub4-Transformation (3)

Eigenschaft:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 0$$

$$0\beta_1 + 1\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 = 0$$

Dies führt zu:

Small-Fluctuations-Feature Eigenschaft:
Falls ein Signal f über dem Support eines 1-level Daub4-Wavelets \mathbf{W}_k^1 (annähernd) linear ist, dann ist der entsprechende Wert in Details d^1 , $f\mathbf{W}_k^1$, (annähernd) null.

Fortsetzung des Verdichtungsprozesses mit a^1 analog Haar:

$$f \xrightarrow{D_{42}} (a^2 \mid d^2 \mid d^1)$$

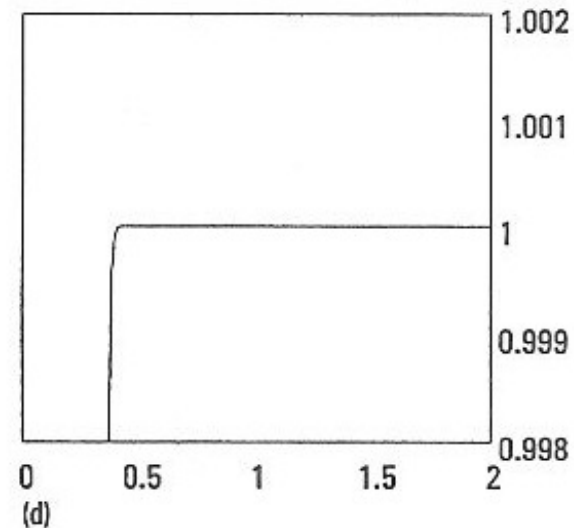
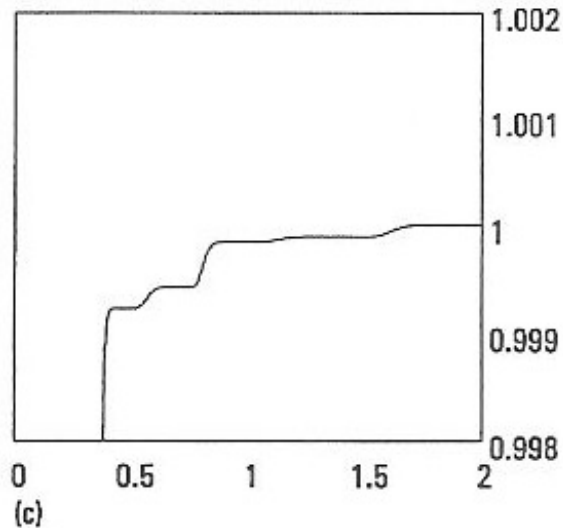
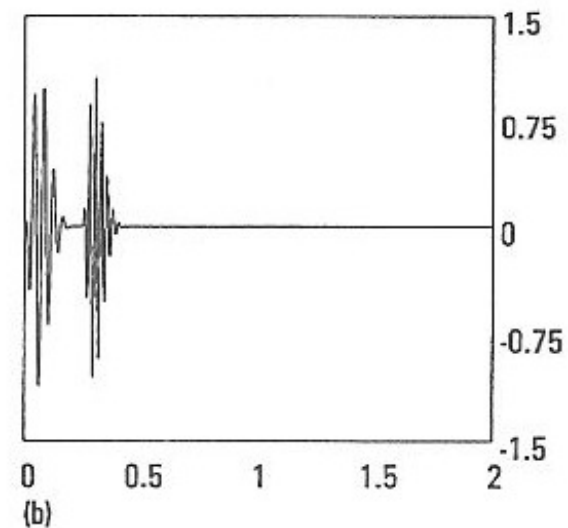
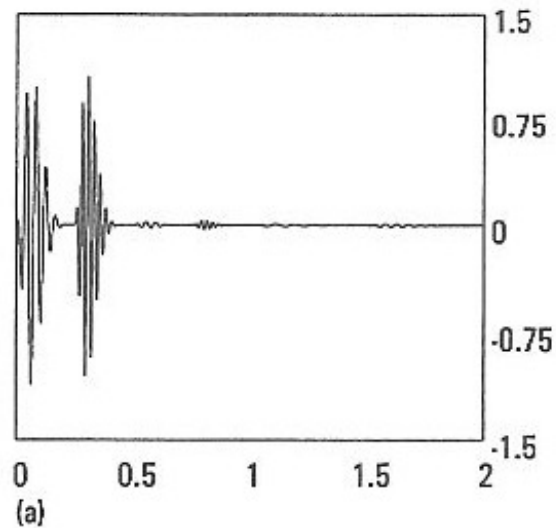
$$a^1 \xrightarrow{D_{41}} (a^2 \mid d^2)$$

In diesem Verdichtungsprozess bleibt die Energie unverändert, d.h.

$$E_f = E_{(a^1 \mid d^1)} = E_{(a^2 \mid d^2 \mid d^1)} = \dots$$

Daubechies-Wavelets: Daub4-Transformation (4)

Beispiel: a) 2-level Haar-Transformation; b) 2-level Daub4-Transformation;
c)+d) kumulative Energie



Daubechies-Wavelets: Daub6-Transformation (1)

$$f \xrightarrow{D_{61}} (a^1 \mid d^1)$$
$$a^1 = (f\mathbf{V}_1^1, f\mathbf{V}_2^1, \dots, f\mathbf{V}_{N/2}^1)$$
$$d^1 = (f\mathbf{W}_1^1, f\mathbf{W}_2^1, \dots, f\mathbf{W}_{N/2}^1)$$

Skalierungsfunktionen:

$$\mathbf{V}_1^1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathbf{V}_2^1 = (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

\vdots

$$\mathbf{V}_{N/2-2}^1 = (0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

$$\mathbf{V}_{N/2-1}^1 = (\alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$$

$$\mathbf{V}_{N/2}^1 = (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = 0.332670552950083, \quad \alpha_2 = 0.806891509311092$$

$$\alpha_3 = 0.459877502118491, \quad \alpha_4 = -0.135011020010255$$

$$\alpha_5 = -0.008544127388200267, \quad \alpha_6 = 0.00352262918857095$$

Daubechies-Wavelets: Daub6-Transformation (2)

1-level Daub6-Wavelets:

$$\mathbf{W}_1^1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathbf{W}_2^1 = (0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

\vdots

$$\mathbf{W}_{N/2-2}^1 = (0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6)$$

$$\mathbf{W}_{N/2-1}^1 = (\beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

$$\mathbf{W}_{N/2}^1 = (\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2)$$

$$\beta_1 = \alpha_6, \beta_2 = -\alpha_5, \beta_3 = \alpha_4, \beta_4 = -\alpha_3, \beta_5 = -\alpha_2, \beta_6 = -\alpha_1$$

Vektoren $\mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1, \dots, \mathbf{V}_{N/2}^1, \mathbf{W}_1^1, \mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisfunktionen im N -d Raum
 \implies neues Koordinatensystem; 1-level Daub6-Transformation liefert Koordinaten (a^1, d^1) von f im neuen Koordinatensystem

Daubechies-Wavelets: Daub6-Transformation (3)

Eigenschaft:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 = 0$$

$$0\beta_1 + 1\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 4\beta_5 + 5\beta_6 = 0$$

$$0^2\beta_1 + 1^2\beta_2 + 2^2\beta_3 + 3^2\beta_4 + 4^2\beta_5 + 5^2\beta_6 = 0$$

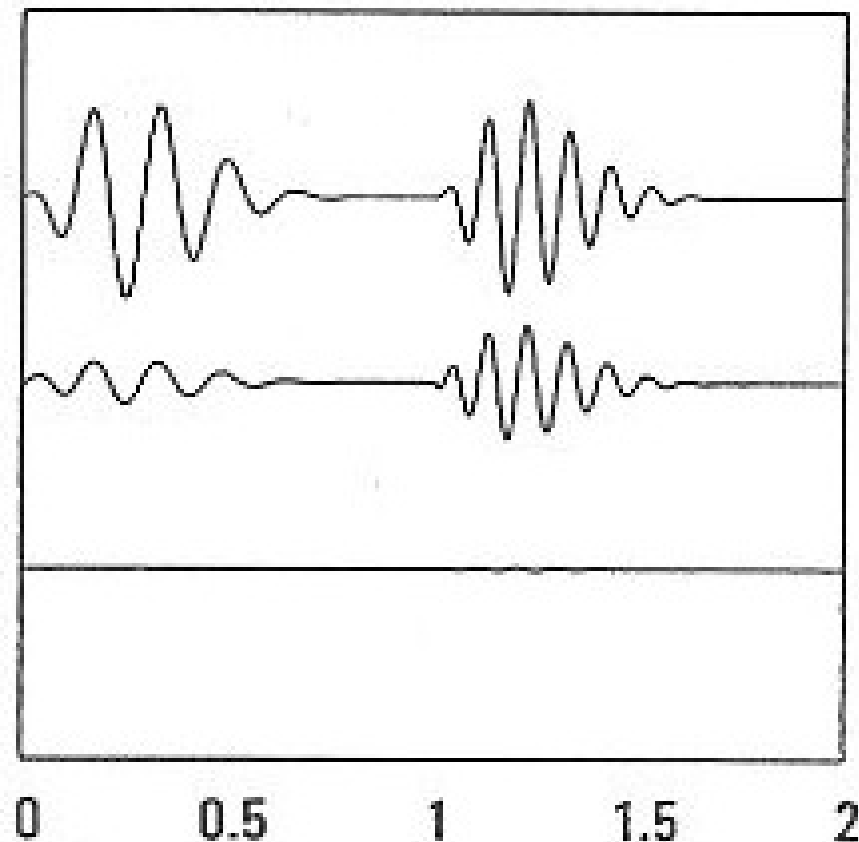
Dies führt zu:

Small-Fluctuations-Feature Eigenschaft:

Falls ein Signal f über dem Support eines 1-level Daub6-Wavelets \mathbf{W}_k^1 (annähernd) quadratisch ist, dann ist der entsprechende Wert in Details d^1 , $f\mathbf{W}_k^1$, (annähernd) null.

Daubechies-Wavelets: Daub6-Transformation (4)

Beispiel: a) Signal; b) Details d^1 nach 1-level Daub4-Transformation; c) Details d^1 nach 1-level Daub6-Transformation; b)+c): 2fach in der Länge gestreckt und 1000fach in der Höhe vergrößert.



Daubechies-Wavelets: Coiflets (1)

Ausgehend von einer Idee von Coifman von Daubechies entwickelt.
Das Einfachste dieser Reihe (Coif6):

$$\begin{aligned} f &\xrightarrow{C_{61}} (a^1 \mid d^1) \\ a^1 &= (f\mathbf{V}_1^1, f\mathbf{V}_2^1, \dots, f\mathbf{V}_{N/2}^1) \\ d^1 &= (f\mathbf{W}_1^1, f\mathbf{W}_2^1, \dots, f\mathbf{W}_{N/2}^1) \end{aligned}$$

Skalierungsfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1^1 &= (\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2) \\ \mathbf{V}_2^1 &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{V}_3^1 &= (0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{V}_{N/2}^1 &= (\alpha_5, \alpha_6, 0, 0, \dots, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \\ \alpha_1 &= \frac{1-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \quad \alpha_2 = \frac{5+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \quad \alpha_3 = \frac{14+2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}} \\ \alpha_4 &= \frac{14-2\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \quad \alpha_5 = \frac{1-\sqrt{7}}{16\sqrt{2}}, \quad \alpha_6 = \frac{-3+\sqrt{7}}{16\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Daubechies-Wavelets: Coiflets (2)

1-level Coif6-Wavelets:

$$\mathbf{W}_1^1 = (\beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2)$$

$$\mathbf{W}_2^1 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{W}_3^1 = (0, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0)$$

\vdots

$$\mathbf{W}_{N/2}^1 = (\beta_5, \beta_6, 0, 0, \dots, 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

$$\beta_1 = \alpha_6, \beta_2 = -\alpha_5, \beta_3 = \alpha_4, \beta_4 = -\alpha_3, \beta_5 = -\alpha_2, \beta_6 = -\alpha_1$$

Vektoren $\mathbf{V}_1^1, \mathbf{V}_2^1, \dots, \mathbf{V}_{N/2}^1, \mathbf{W}_1^1, \mathbf{W}_2^1, \dots, \mathbf{W}_{N/2}^1$ bilden einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisfunktionen im N -d Raum
 \implies neues Koordinatensystem; 1-level Coif6-Transformation liefert die Koordinaten (a^1, d^1) von f im neuen Koordinatensystem

Daubechies-Wavelets: Coiflets (3)

Eigenschaft:

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 = 0$$

$$0\beta_1 + 1\beta_2 + 2\beta_3 + 3\beta_4 + 4\beta_5 + 5\beta_6 = 0$$

Dies führt zu:

Small-Fluctuations-Feature Eigenschaft:
Falls ein Signal f über dem Support eines 1-level Coif6-Wavelets \mathbf{W}_k^1 (annähernd) linear ist, dann ist der entsprechende Wert in Details d^1 , $f\mathbf{W}_k^1$, (annähernd) null.

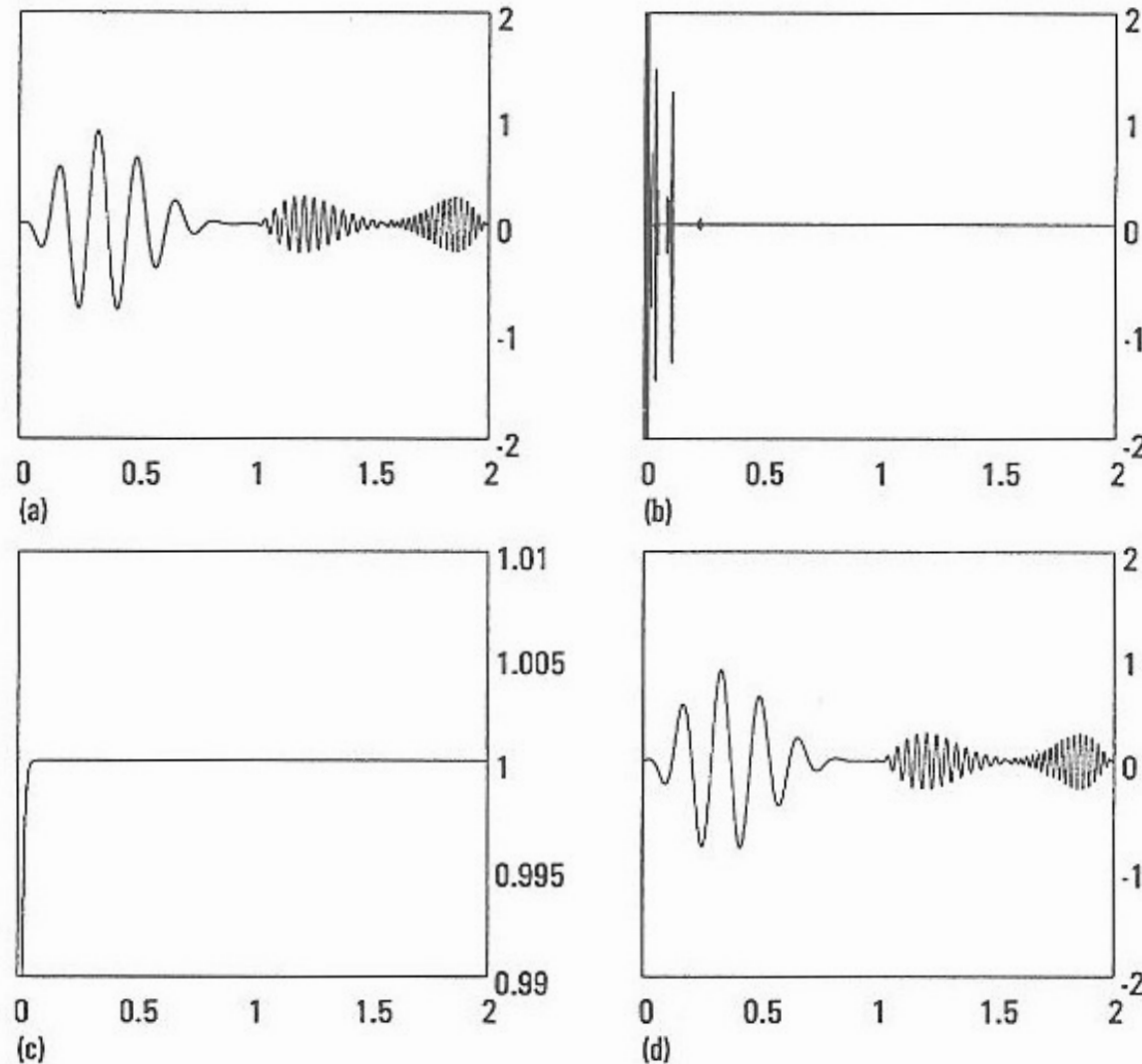
Bezüglich dieser Eigenschaft sind Coif6-Wavelets vergleichbar mit den Daub4-Wavelets

Der Trend a^1 approximiert das eigentliche Signal f besser als der a^1 -Trend der Daub4-Wavelets

Daubechies-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (1)

Kompression von Audiosignalen: vgl. Folie 21

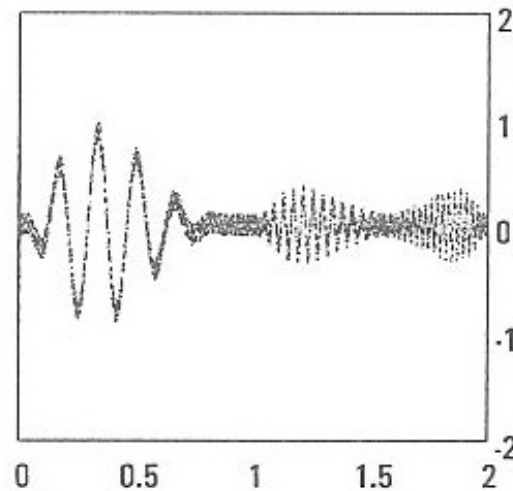
Beispiel: a) Signal f , $|f| = 4096$; b) 12-level Coif30-Transformation; c) kumulative Energie; d) 32:1 Kompression, 99.99% Energieerhaltung



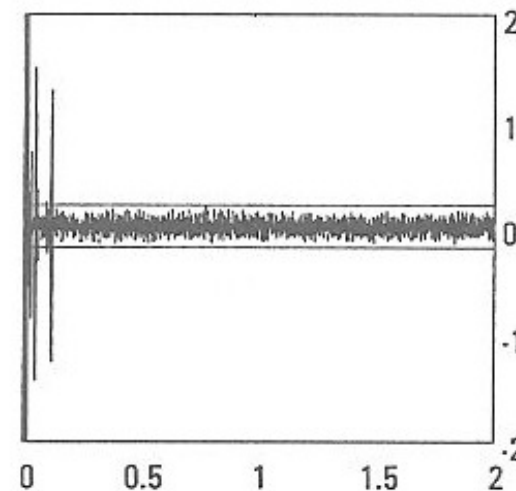
Daubechies-Wavelets: Anwendungen für Audiosignale (2)

Glättung von Audiosignalen: vgl. Folie 24

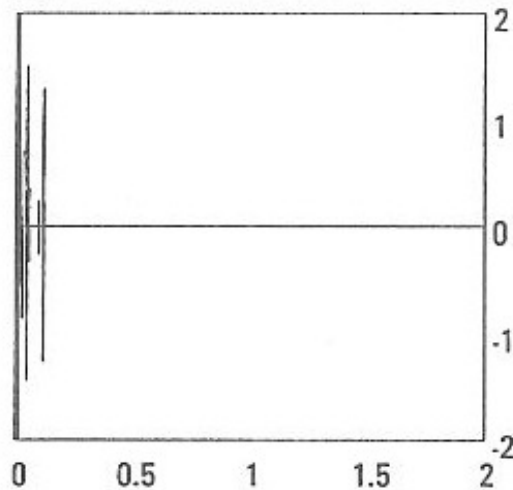
Beispiel: a) Signal f , $|f| = 4096$; b) 12-level Coif30-Transformation; c) kleine Koeffizienten werden auf null gesetzt; d) geglättetes Signal



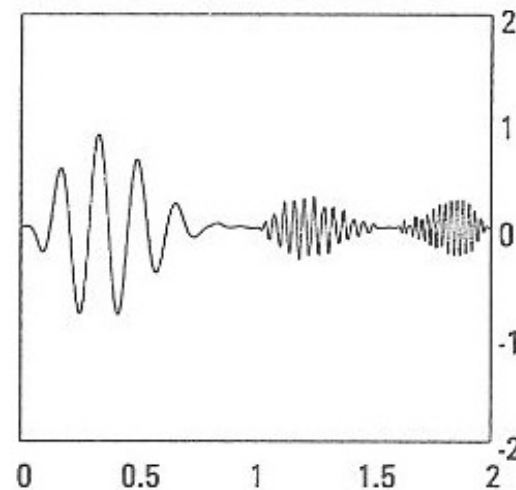
(a)



(b)



(c)



(d)

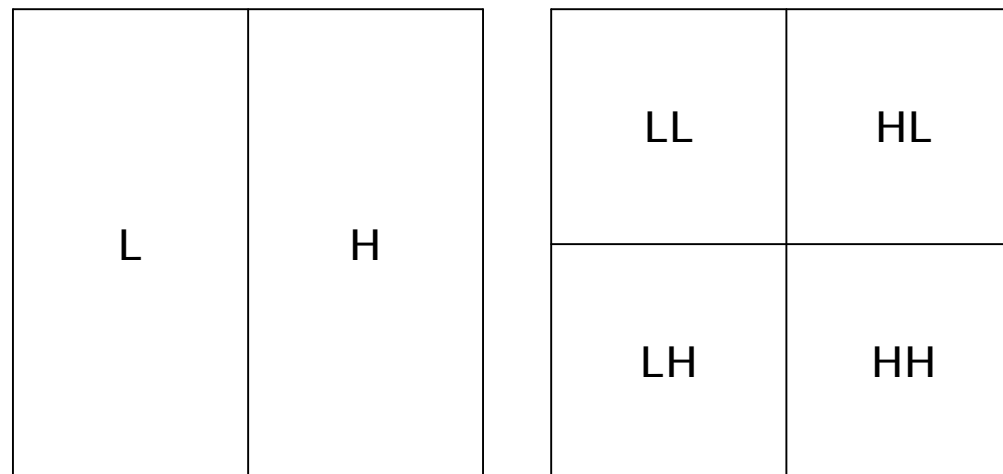
2D Wavelet-Transformation (1)

Annahme: Bildgröße $N \times N = 2^n \times 2^n$

1-level Wavelet-Transformation:

- Durchführung einer 1-level, 1D Wavelet-Transformation an jeder Zeile des Eingabebildes
- Durchführung derselben 1-level, 1D Wavelet-Transformation an jeder Spalte des aus dem vorigen Schritt resultierenden Bildes

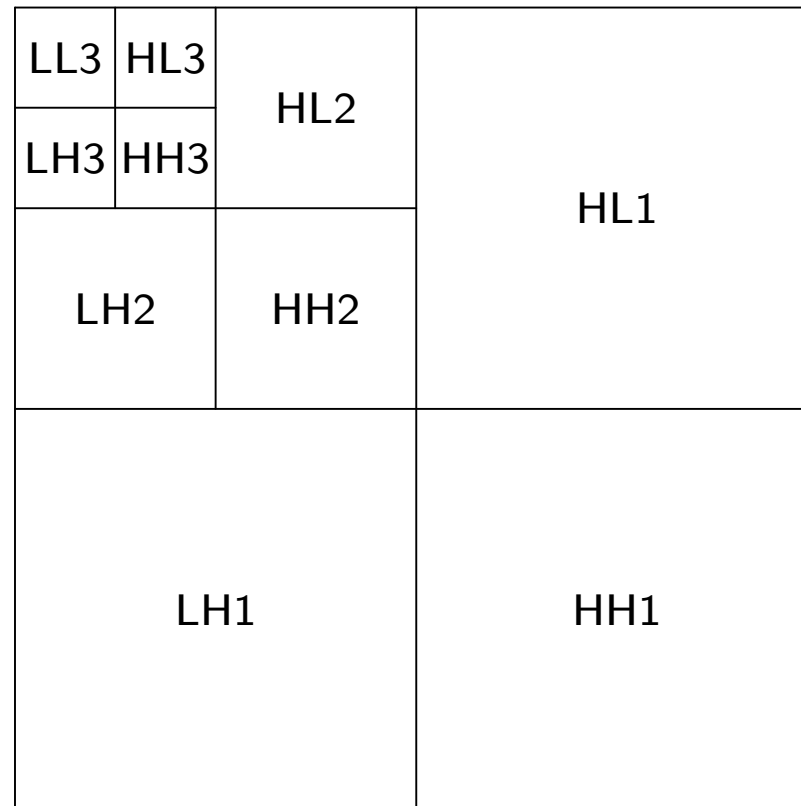
Das folgende Diagramm zeigt schematisch die Zerlegung, wobei L für den mit dem Tiefpaß gefilterten Bereich (Trend) steht und H den Hochpaß gefilterten Anteil (Details) bezeichnet. Im Bereich HL z.B. werden zuerst die Zeilen mit einem Hochpaß und dann die Spalten mit einem Tiefpaß gefiltert.



2D Wavelet-Transformation (2)

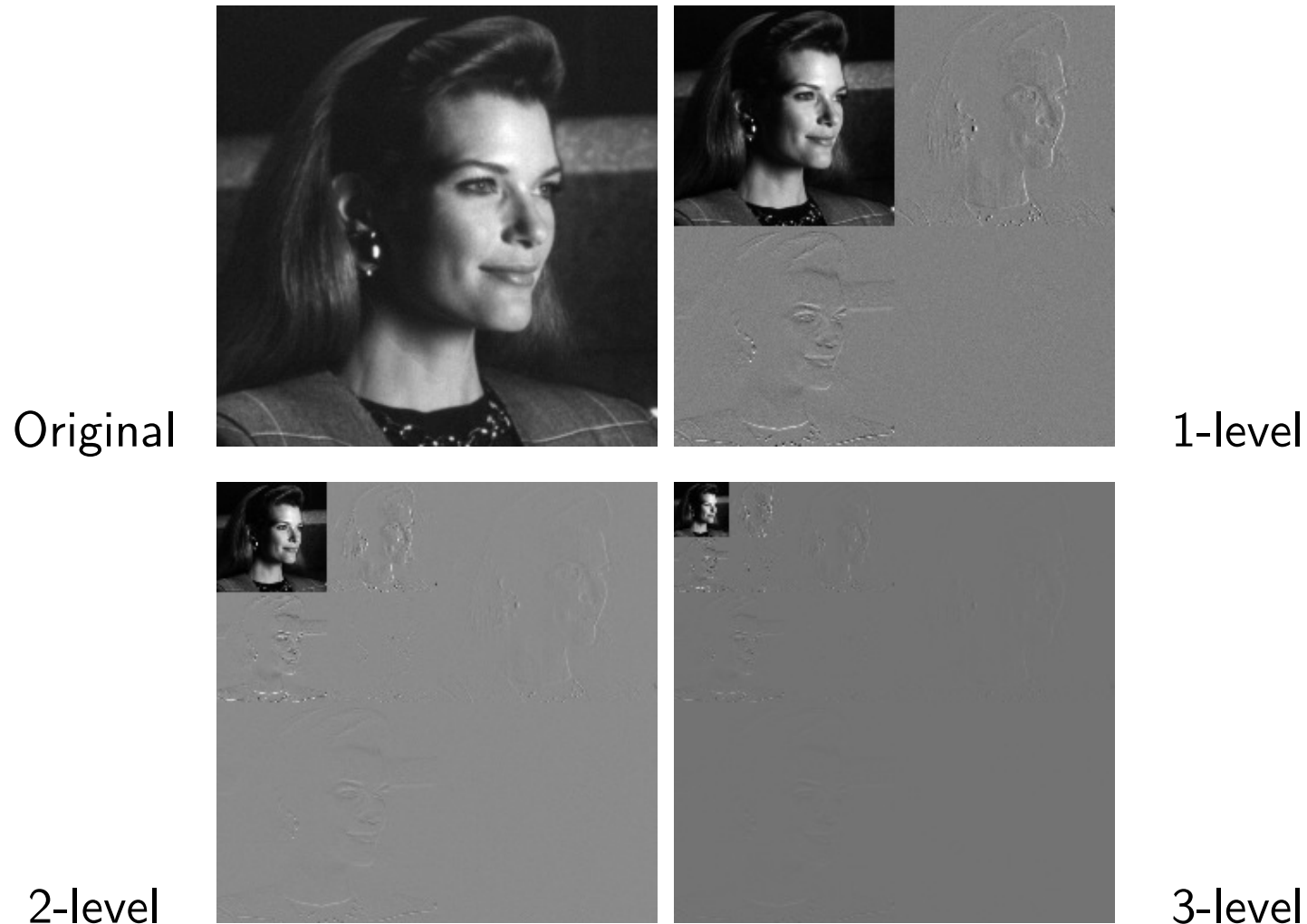
Multiple-level Wavelet-Transformation:

Die Unterteilung in LL, HL, LH und HH ist die erste Iteration der Zerlegung eines 2-dimensionalen Bildes. Wie auch im 1D-Fall werden die weiteren Iterationen nur am Tiefpaßanteil (LL) vollzogen. Es ist in der Literatur üblich, die einzelnen gefilterten Bereiche mit der Iterationsnummer zu versehen. Dies wird im untenstehenden Diagramm für den Fall der abgeschlossenen 3. Iteration gezeigt.



2D Wavelet-Transformation (3)

Beispiel: 2D Haar-Transformation

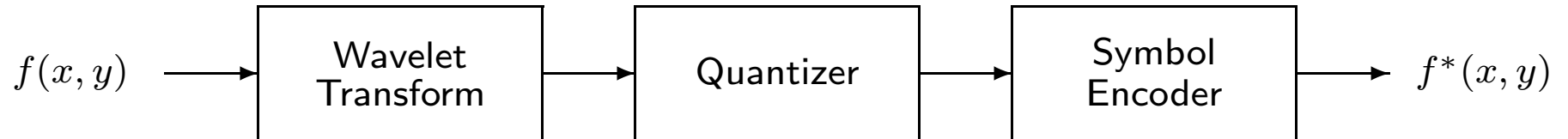


Visualisierung von Trend und Details erfolgt getrennt, jeweils durch lineare Abbildung ins Intervall $[0,255]$

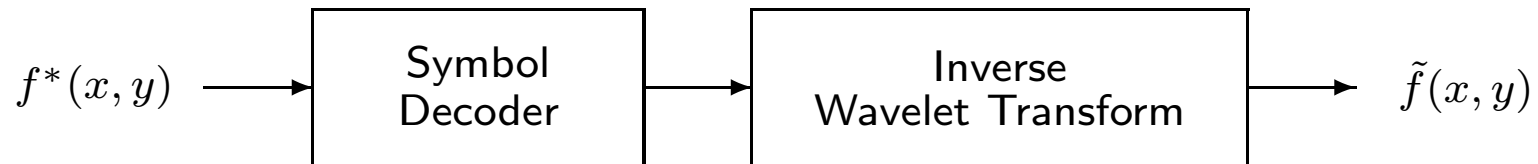
Bildkompression (1)

Wavelet-Transformation bildet die Grundlage für eine Reihe von Kompressionsverfahren, z.B. der neue Standard JPEG 2000

Source Encoder:



Source Decoder:



Bildkompression (2)

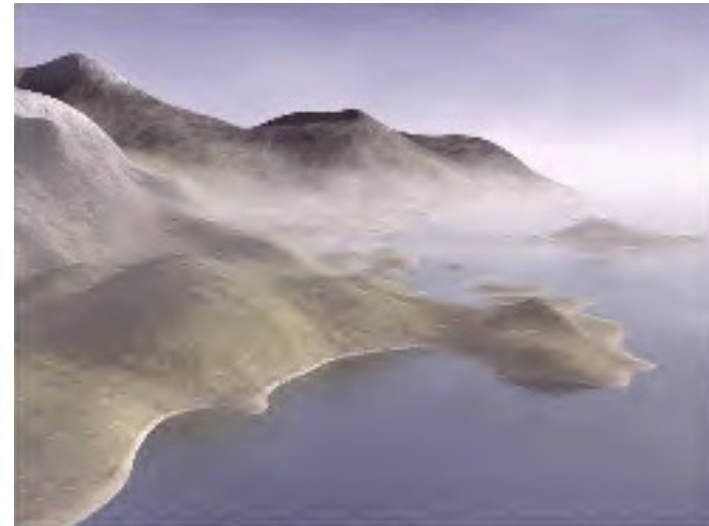
Beispiel:



Original (24bpp)



JPEG (0.22bpp)



Wavelet-Transformation (0.22bpp)

Wavelet Paket Transformationen (1)

Wavelet-Transformation:

- Filterung rekursiv auf Tiefpasskanal (Trend) angewendet
- Hochpasskanal (Details) liefert Wavelet-Koeffizienten (nicht weiter verarbeitet)

Ist es in irgendeiner Hinsicht sinnvoll, auch den Hochpasskanal in den Filterungsprozess einzubeziehen? \implies sog. Wavelet Paket Transformationen

Haar Wavelet Paket Transformation (Walsh-Transformation):

m -level Walsh-Transformation wendet 1-level Haar-Transformation auf *alle Subsignale* der $(m - 1)$ -level Walsh-Transformation an

$$\begin{aligned} f & \xrightarrow{W_1 \equiv H_1} (a \mid d) \\ f & \xrightarrow{W_2} (aa \mid ad \mid da \mid dd); \quad a \xrightarrow{H_1} (aa \mid ad), \quad d \xrightarrow{H_1} (da \mid dd) \\ f & \xrightarrow{W_3} (aaa \mid aad \mid ada \mid add \mid daa \mid dad \mid dda \mid ddd) \\ & \quad aa \xrightarrow{H_1} (aaa \mid aad), \quad ad \xrightarrow{H_1} (ada \mid add) \\ & \quad da \xrightarrow{H_1} (daa \mid dad), \quad dd \xrightarrow{H_1} (dda \mid ddd) \\ & \quad \dots \end{aligned}$$

Wavelet Paket Transformationen (2)

Beispiel: $f = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)$

Walsh-Transformation:

$$f \xrightarrow{W_1} (3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 15\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$f \xrightarrow{W_2} (10, 26 \mid -4, -4 \mid -2, -2 \mid 0, 0)$$

$$f \xrightarrow{W_3} (18\sqrt{2} \mid -8\sqrt{2} \mid -4\sqrt{2} \mid 0 \mid -2\sqrt{2} \mid 0 \mid 0 \mid 0)$$

Haar-Transformation:

$$f \xrightarrow{H_1} (3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 11\sqrt{2}, 15\sqrt{2} \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$f \xrightarrow{H_2} (10, 26 \mid -4, -4 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

$$f \xrightarrow{H_3} (18\sqrt{2} \mid -8\sqrt{2} \mid -4, -4 \mid -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

Eigenschaften der Walsh-Transformation (Wavelet Paket Transformation):

- Erhaltung der Energie
- tendenziell bessere Verdichtung der Energie als Haar-Transformation (Wavelet-Transformation)

Wavelet Paket Transformationen (3)

Kompression von Fingerabdrücken:

Ein typischer Datensatz umfasst u.a.: 1) zehn Fingerprints; 2) zwei Handprints \implies
Insgesamt etwa 10MB

FBI: JPEG ungeeignet für Kompression von Fingerabdrücken

1992 Entwicklung von WSQ (Wavelet Scalar Quantization, auf Wavelet Paket Transformationen basierend)



JPEG ($C_r = 12.9$)

WSQ ($C_r = 12.9$)

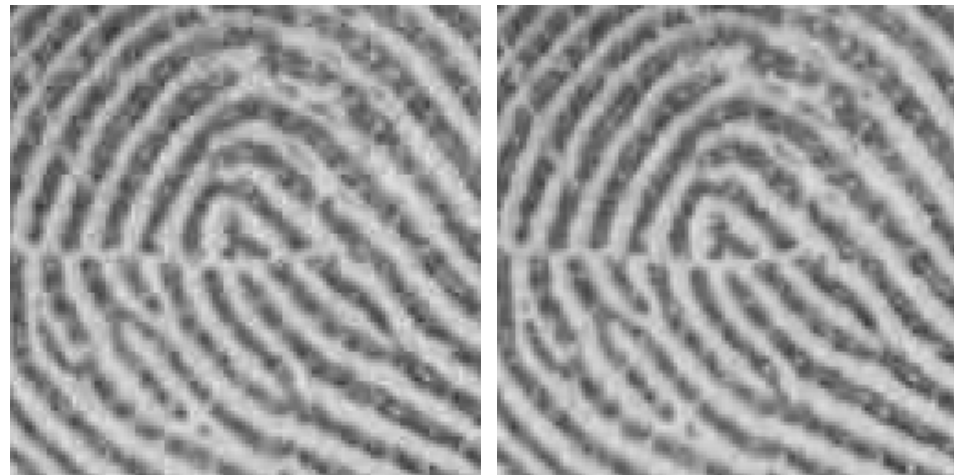
Wavelet Paket Transformationen (3)

Kompression von Fingerabdrücken:

Ein typischer Datensatz umfasst u.a.: 1) zehn Fingerprints; 2) zwei Handprints \implies
Insgesamt etwa 10MB

FBI: JPEG ungeeignet für Kompression von Fingerabdrücken

1992 Entwicklung von WSQ (Wavelet Scalar Quantization, auf Wavelet Paket Transformationen basierend)



JPEG ($C_r = 12.9$)

WSQ ($C_r = 12.9$)

Beispiel: Bei einem Fingerabdruck hat sich ergeben

Wavelet (4-level Coif18): 0.77 bpp; W. Paket (4-level Coif18): 0.49 bpp

Verwendung der Wavelet Paket Transformation führt zu Verbesserung von 36% gegenüber Wavelet-Transformation