

## Bildverarbeitung im Frequenzraum

- Durchführung von Faltungen im Frequenzraum
- Filterung im Frequenzraum: Tiefpass- und Hochpass-Filter, etc.
- Bildrestaurierung
- Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen

Bild / Fourier-Transformierte: zwei verschiedene, aber äquivalente Repräsentationen des Bildinhaltes; im Frequenzraum sind etliche Aufgaben leichter formulieren und lösen

# Durchführung von Faltungen im Frequenzraum (1)

Lineare Filterung (Kapitel "Bildverbesserung"):

$$g(r, c) = \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k h(u, v) \cdot f(r + u, c + v)$$

**Faltung:**

$$\begin{aligned} g(r, c) &= (f \star h)(r, c) \\ &= \sum_{u=-k}^k \sum_{v=-k}^k h(u, v) \cdot f(r - u, c - v) \end{aligned}$$

Faltungskern  $h(u, v)$  wird auch Point Spread Function (PSF) genannt

$h(u, v)$  spiegelungssymmetrisch  $\implies$  Lineare Filterung  $\equiv$  Faltung;  
sonst erreicht man diese Äquivalenz durch eine Spiegelung der Maske als  
Faltungskern

## Durchführung von Faltungen im Frequenzraum (2)

Darstellung des Faltungskerns  $h$  als  $M \times N$  Bild ( $2k + 1 \leq M$ ,  $2k + 1 \leq N$ ):

$$h(u, v) = h(u + M, v), \quad u < 0, v \geq 0$$

$$h(u, v) = h(u, v + N), \quad u \geq 0, v < 0$$

$$h(u, v) = h(u + M, v + N), \quad u < 0, v < 0$$

**Convolution Theorem:**  $\mathcal{F}(f \star h) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h)$

Vorgehen:

$$\begin{array}{ccc} f, h & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(h) \\ & & \downarrow \\ f \star h & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \mathcal{F}(f \star h) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h) \end{array}$$

Bei großem Faltungskern bewirkt dieses indirekte Vorgehen deutliche Geschwindigkeitssteigerung

## Durchführung von Faltungen im Frequenzraum (3)

**Beispiel:** Faltung eines Bildes  $f$  der Größe  $512 \times 512$  mit Faltungskern  $h$  der Größe  $32 \times 32$

Direktes Vorgehen:  $512 \times 512 \times 32^2 = 268,435,456$  Multiplikationen

Indirektes Vorgehen:

- Jede Zeile benötigt 4608 Multiplikationen (siehe Tabelle auf der letzten Folie vom Kapitel “Fourier-Transformation”). Alle Zeilen:  $4608 \times 512 = 2,359,296$ ; dasselbe anschliessend für alle Spalten. Anzahl Multiplikationen für  $\mathcal{F}(f)$ : 4,718,592.
- Derselbe Aufwand für  $\mathcal{F}(h)$  und inverse Fourier-Transformation  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h))$
- $512 \times 512$  Multiplikationen für  $\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(h)$
- Gesamtanzahl Multiplikationen:  $4,718,592 \times 3 + 512^2 = 14,417,920$

Der Beschleunigungsfaktor beträgt ungefähr 18

# Filterung im Frequenzraum: Grundlagen (1)

Input:  $f(r, c)$ ; Output:  $g(r, c)$

Allgemeines Schema:

1. Multipliziere  $f(r, c)$  mit  $(-1)^{r+c}$
2. Berechne die Fourier-Transformation  $F(u, v)$  des resultierenden Bildes  $(-1)^{r+c} \cdot f(r, c)$
3. Multipliziere  $F(u, v)$  mit einer Filterfunktion  $H(u, v)$  derselben Größe *punktweise*
4. Berechne die inverse Fourier-Transformation
5. Extrahiere den reellen Teil des Ergebnisses aus Schritt 4
6. Multipliziere das Ergebnis aus Schritt 5 mit  $(-1)^{r+c}$

Kompakter Form:

$$F(u, v) = \mathcal{F} [ (-1)^{r+c} \cdot f(r, c) ]$$

$$g(r, c) = (-1)^{r+c} \cdot \text{Real} \{ \mathcal{F}^{-1} [ H(u, v) \cdot F(u, v) ] \}$$

Filterfunktion  $H(u, v)$  bestimmt, welche Frequenzen auf welche Art verändert werden

## Filterung im Frequenzraum: Grundlagen (2)

---

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}H(u, v) &= \alpha \text{ (Konstante)} \\g(r, c) &= (-1)^{r+c} \cdot \mathcal{F}^{-1}[\alpha \cdot F(u, v)] \\&= (-1)^{r+c} \cdot \alpha \cdot \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] \\&= (-1)^{r+c} \cdot \alpha \cdot [(-1)^{r+c} \cdot f(r, c)] \\&= \alpha \cdot f(r, c)\end{aligned}$$

# Filterung im Frequenzraum: Grundlagen (2)

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}H(u, v) &= \alpha \text{ (Konstante)} \\g(r, c) &= (-1)^{r+c} \cdot \mathcal{F}^{-1}[\alpha \cdot F(u, v)] \\&= (-1)^{r+c} \cdot \alpha \cdot \mathcal{F}^{-1}[F(u, v)] \\&= (-1)^{r+c} \cdot \alpha \cdot [(-1)^{r+c} \cdot f(r, c)] \\&= \alpha \cdot f(r, c)\end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}H(u, v) &= \begin{cases} 1, & \text{für } (u, v) = (M/2, N/2) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\g(r, c) &= (-1)^{r+c} \cdot \mathcal{F}^{-1}[H(u, v) \cdot F(u, v)] \\&= (-1)^{r+c} \cdot F(M/2, N/2) \cdot e^{i2\pi(r/2+c/2)} \\&= F(M/2, N/2) \cdot \underbrace{(-1)^{r+c} \cos(\pi(r+c))}_{\equiv 1} \\&= F(M/2, N/2) \\&= \frac{1}{MN} \cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i, j)\end{aligned}$$

# Filterung im Frequenzraum: Grundlagen (3)

---

Klassifizierung der Filter:

- **Tiefpass-Filter**

Kanten und starke Grauwertänderungen im Bild entsprechen den hochfrequenten Anteilen (mit großem  $u$  und  $v$ ) der Fourier-Transformierten. Bei einem Tiefpass-Filter werden hohe Frequenzanteile abgeschwächt oder ganz eliminiert. Dadurch erscheint das gefilterte Bild im Vergleich zum Originalbild unschärfer, Rauschen und Störungen ähnlicher Art werden dabei aber unterdrückt.

- **Hochpass-Filter:**

Bei einem Hochpass-Filter werden tiefe Frequenzanteile abgeschwächt oder ganz eliminiert. Dadurch bleiben Stellen mit abrupten Grauwertänderungen wie Kanten deutlicher erhalten. Wird das Ergebnis eines Hochpass-Filters zum Originalbild hinzuaddiert, so erhält man eine Kantenverstärkung und Verschärfung des Bildes.



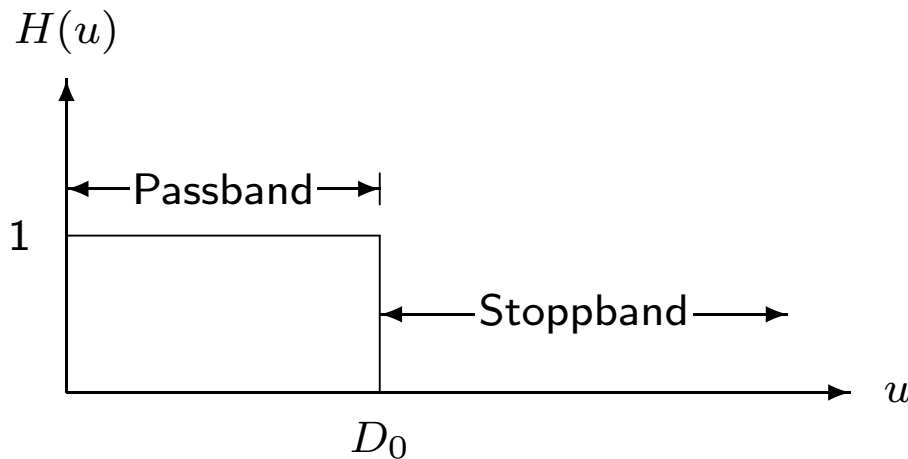
# Tiefpass-Filter (1)

## Idealer Tiefpass-Filter:

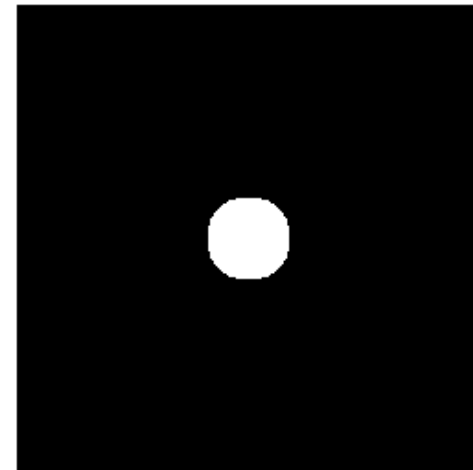
$$\text{Filterfunktion: } H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{für } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $D(u, v) = \sqrt{(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2}$  die Entfernung zum Ursprung  $(u, v) = (M/2, N/2)$  und  $D_0$  die *Grenzfrequenz* ist. Dieser Filter wird wegen des perfekten Übergangs von den passierenden Frequenzen zu den eliminierten Frequenzen *ideal* genannt.

### 1D Fall:



### 2D Fall: $H(u, v)$ (hell:1; dunkel: 0)



## Tiefpass-Filter (2)

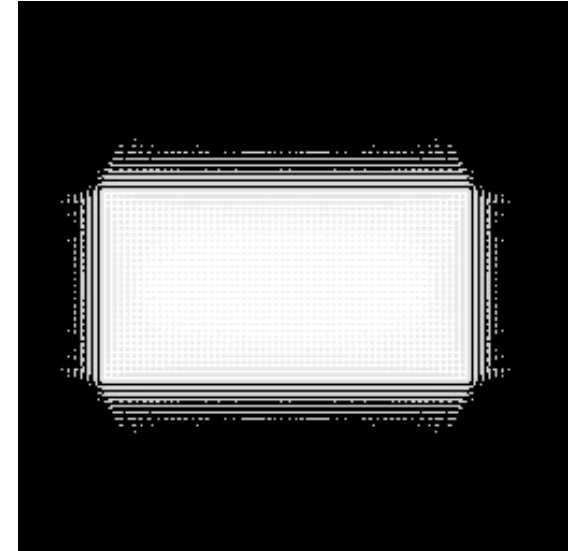
Beispiel:



Originalbild



Tiefpass-Filter



Ringung-Effekt

**Ringung-Effekt:** Idealer Tiefpass-Filter an einem künstlichen Bild (nach Histogrammausgleich)

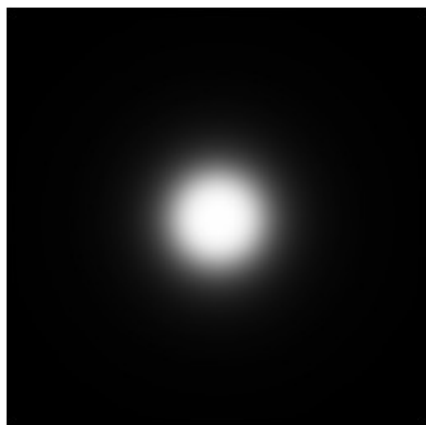
# Tiefpass-Filter (3)

## Tiefpass-Filter: Butterworth-Filter

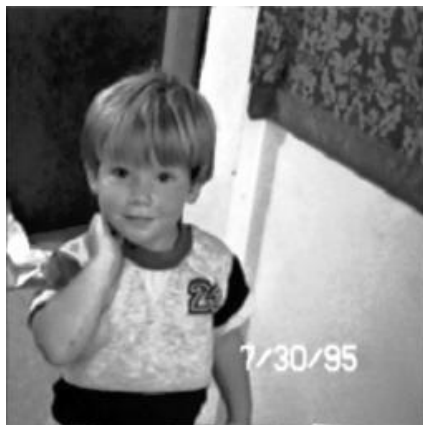
An der Grenzfrequenz  $D_0$  werden nicht alle Frequenzanteile, die darüber liegen, abgeschnitten; sanfter Übergang von Passband zu Stoppband:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u, v)}{D_0}\right]^{2n}} \in [0, 1]$$

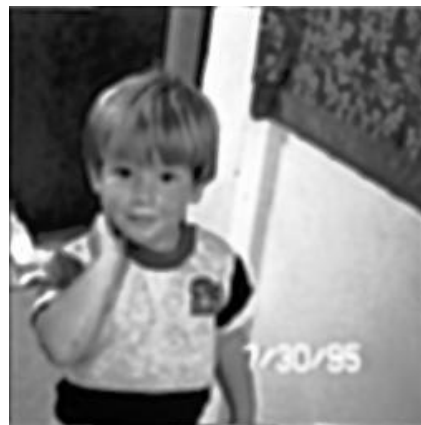
Parameter  $n$  bestimmt die Steilheit des Übergangs (Mit  $n \rightarrow \infty$  konvergiert der Butterworth-Filter zum idealen Tiefpass-Filter)



$H(u, v)$



$n = 1$



$n = 3$



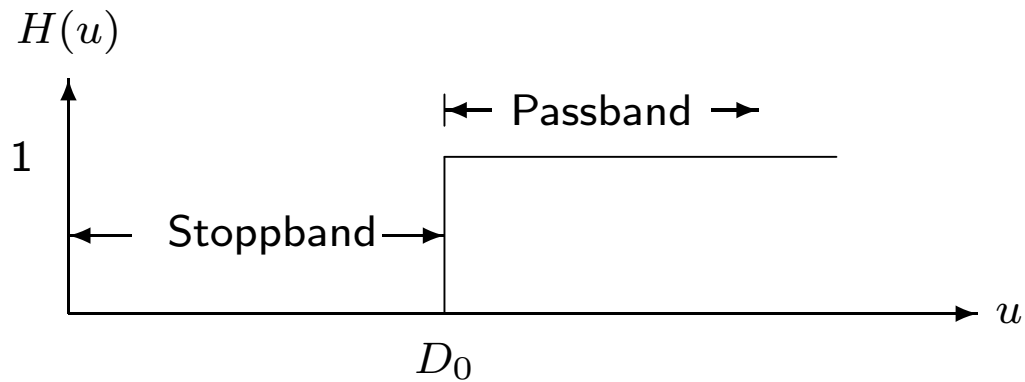
$n = 8$

Mit zunehmendem  $n$  ist der Ringing-Effekt wieder deutlich zu beobachten

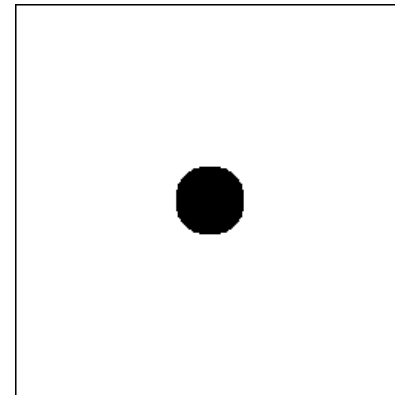
# Hochpass-Filter (1)

Idealer Hochpass-Filter:

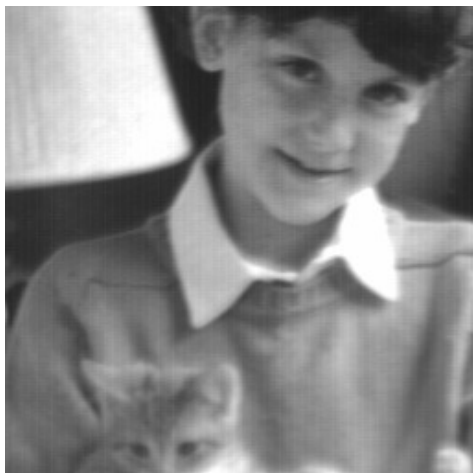
1D Fall:



2D Fall:



Beispiel:



Originalbild



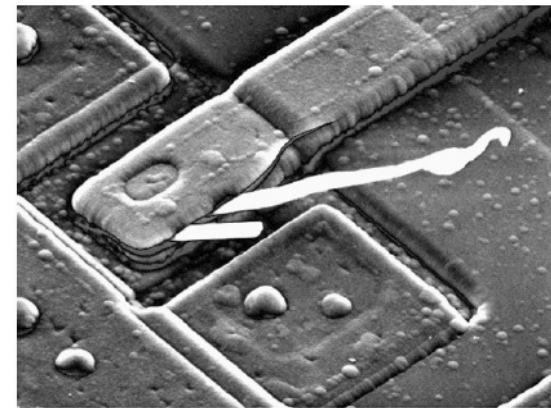
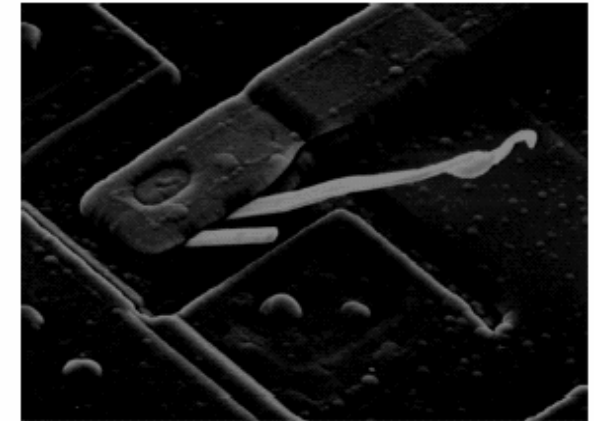
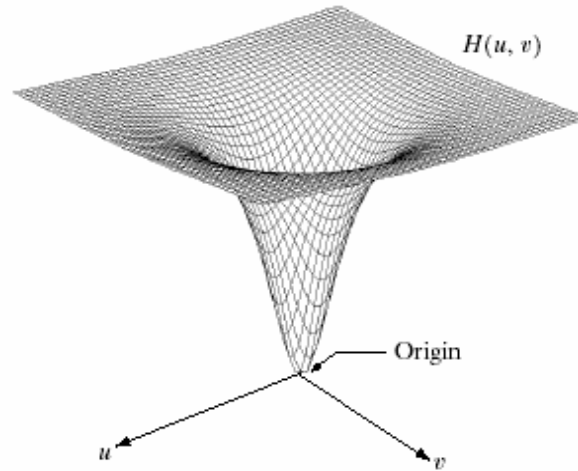
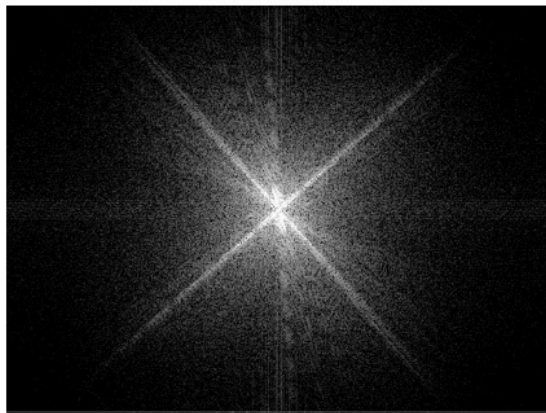
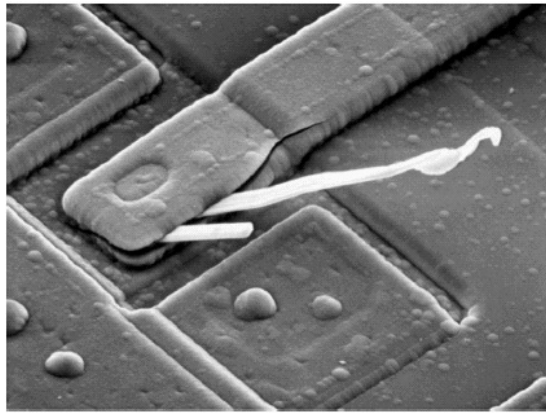
Tiefpass-Filter



Hochpass-Filter

# Hochpass-Filter (2)

## Nichtidealer Hochpass-Filter: Beispiel



Links: Originalbild und DFT; rechts oben: nichtidealer Hochpass-Filter  $H(u, v)$  und Ergebnis; rechts unten: nichtidealer Hochpass-Filter mit  $H'(u, v) = H(u, v) + c$  ( $c$ : Konstante)

# Hochpass-Filter (3)

---

## Nichtidealer Hochpass-Filter: Butterworth-Filter

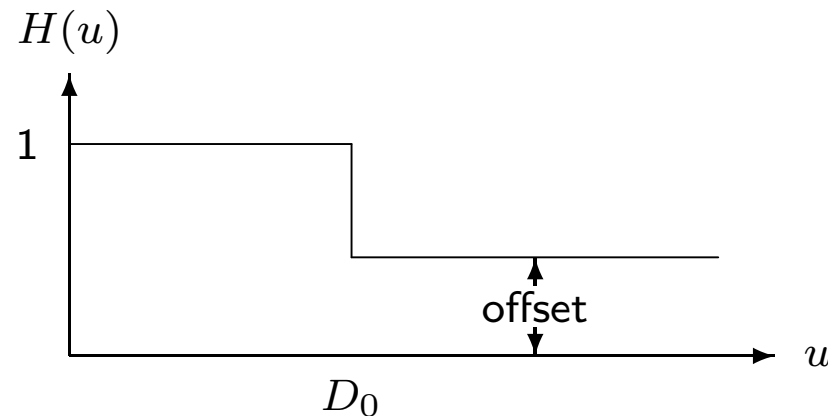
$$H(u, v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D_0}{D(u, v)}\right]^{2n}}$$

Analog zum Tiefpass-Filter bestimmt Parameter  $n$  die Steilheit des Übergangs von Stoppband zu Passband; mit  $n \rightarrow \infty$  konvergiert der Butterworth-Filter zum idealen Hochpass-Filter

## Weitere Filter (1)

### Low-Frequency Emphasis Filter:

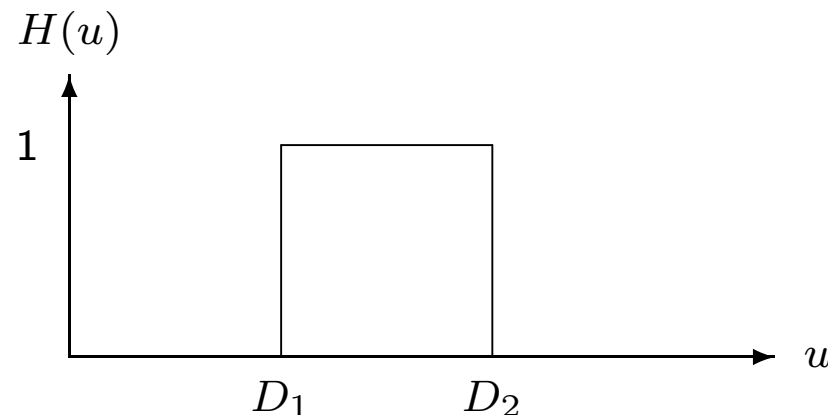
Im Gegensatz zum Tiefpass-Filter werden hohe Frequenzanteile nicht ganz eliminiert, sondern mit geringerer Gewichtung beibehalten



Analog entsprechender Hochpass-Filter (high-frequency emphasis filter)

### Bandpass Filter:

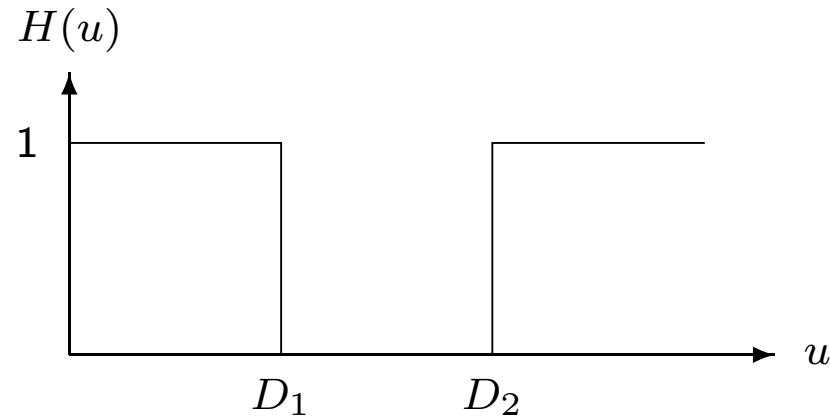
bestimmten Bereich  $[D_1, D_2]$  von Frequenzen durchlassen



## Weitere Filter (2)

### Bandreject Filter:

bestimmten Bereich  $[D_1, D_2]$  von Frequenzen ausblenden

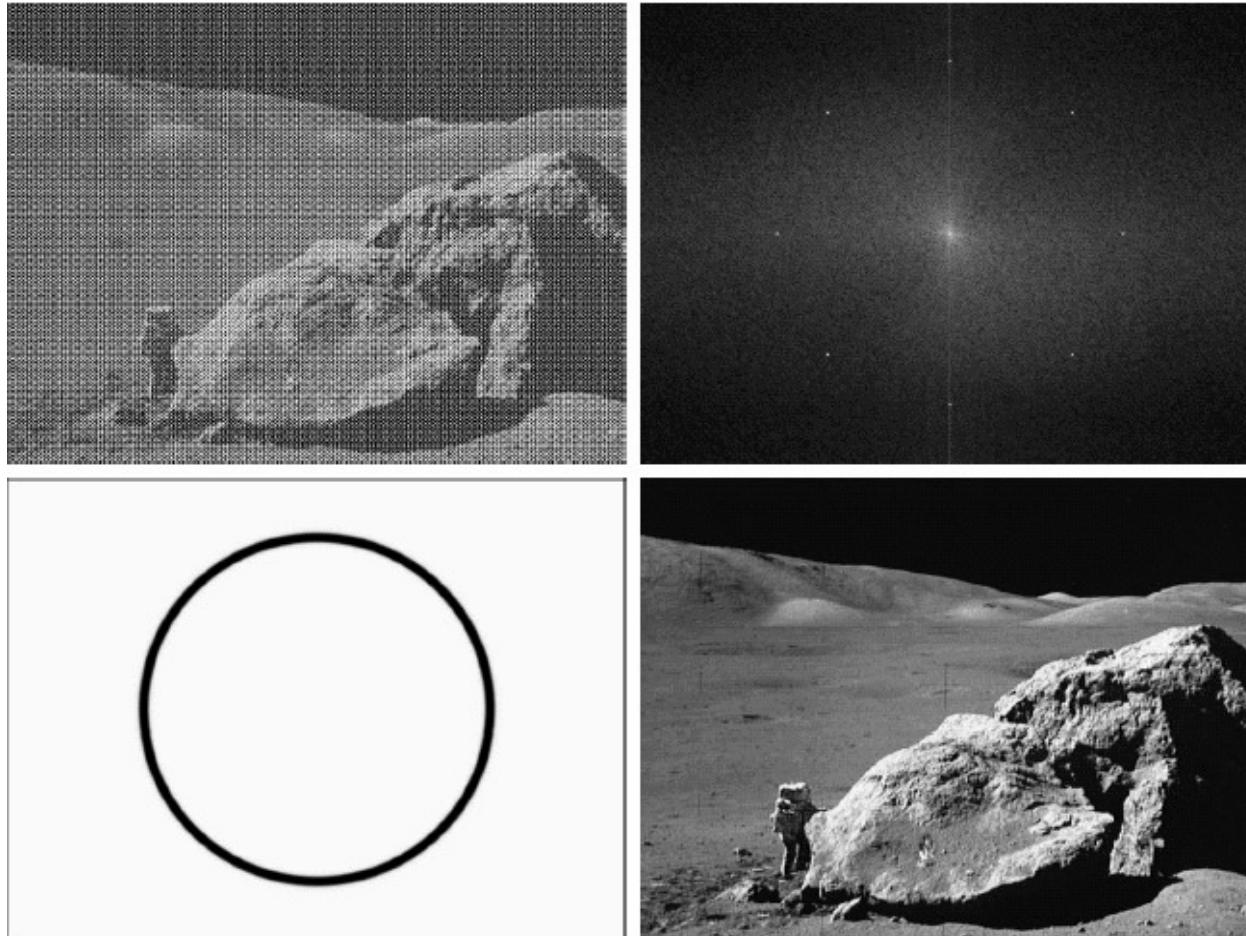


Zu jedem Filtertyp existiert entsprechender Butterworth-Filter



## Weitere Filter (3)

**Beispiel:** Butterworth Bandreject Filter zur Entfernung periodischer Störungen (siehe auch Notch-Filter)



Oben: Originalbild und DFT; unten: Filter und Ergebnis

# Bildrestaurierung

---

Bildrestaurierung: Verbesserung von Bildsignalen im Sinne quantitativ definierter Kriterien im Gegensatz zu den subjektiven Kriterien bei den Verfahren aus Kapitel "Bildverbesserung"

A-priori-Wissen über Art der Störungen. Beispiele:

- Fehler bei Bildaufnahme und -übertragung
- Verschmierung aufgrund von Bewegungen/Vibrationen der Aufnahmegeräte bzw. Objekte
- Defokussierung
- atmosphärische Turbulenzen (astronomische Bilder)
- additive Signale, welche die Helligkeits- und Kontrastwerte ändern

Störungen werden durch Messen oder Schätzen mathematisch modelliert

Anwendung der inversen Störfunktion

⇒ (ungestörtes) Originalbild möglichst gut zurückgewinnen

# Signalmodell zur Bilddegradation (1)

Bildentstehungsprozess:

$$f(x, y) = h \star i(x, y) + n(x, y)$$

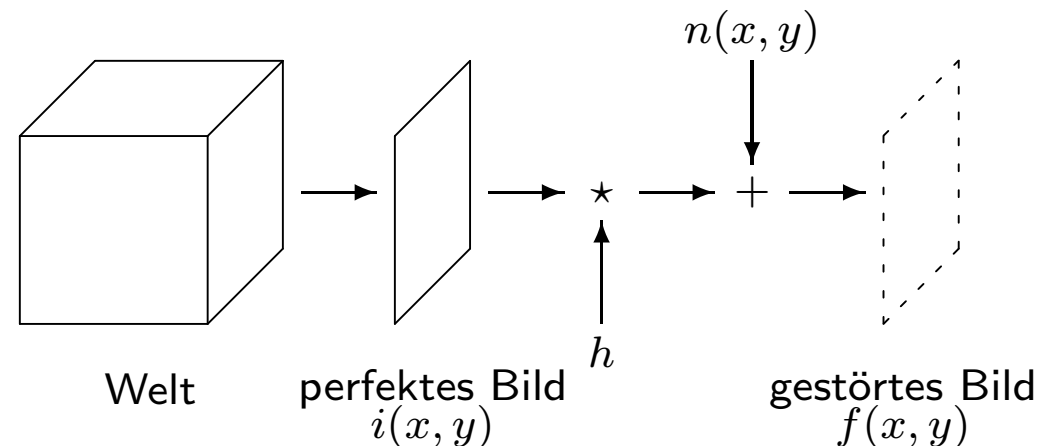
wobei

$i(x, y)$ : (ungestörtes) Originalbild

$h$ : Degradationsfunktion

$\star$ : Faltung

$n(x, y)$ : additive Störungsfunktion



Annahme:  $h$  positionsinvariant (Dieselbe Funktion  $h$  gilt für alle Pixel)

Manchmal wird  $n(x, y) = 0$  vorausgesetzt

# Signalmodell zur Bilddegradation (2)

**Beispiel:** Bewegung

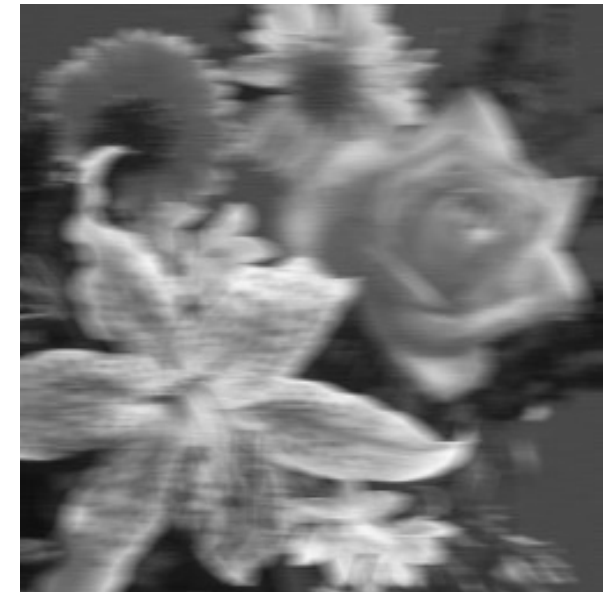
$$\frac{1}{11}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

\*



=



# Signalmodell zur Bilddegradation (2)

**Beispiel:** Bewegung

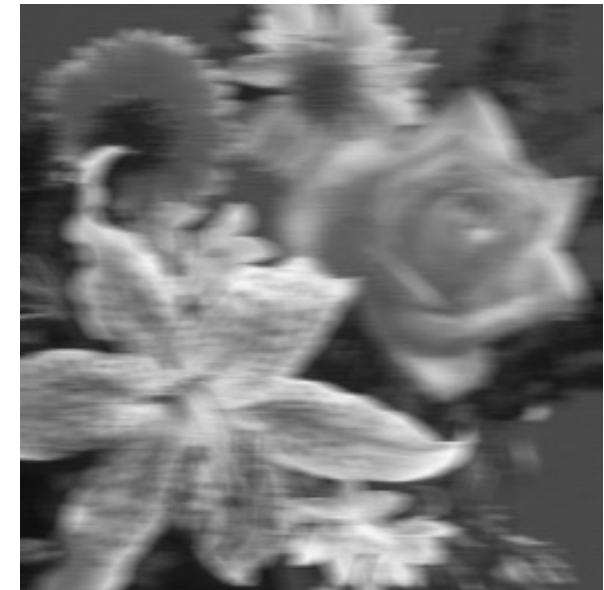
$$\frac{1}{11}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

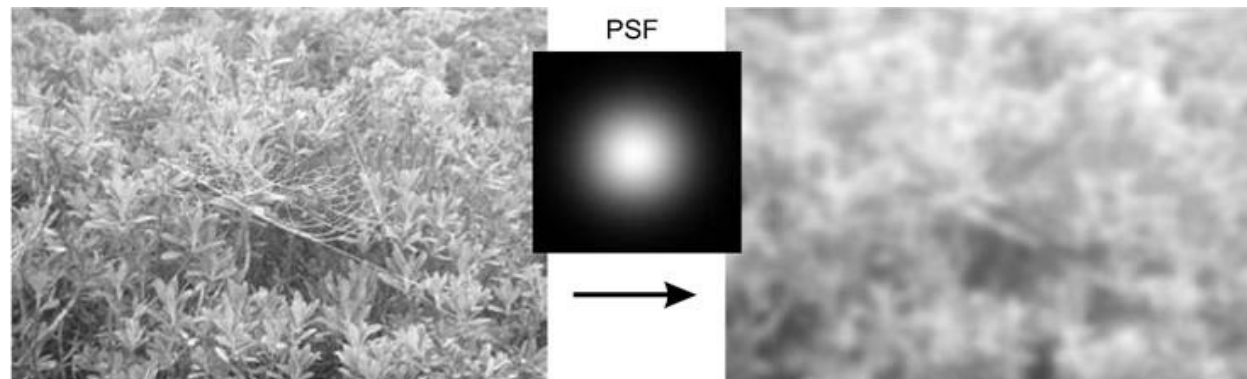
\*



=



**Beispiel:** kreisförmige Degradationsfunktion mit Gauss-Gewichtung



# Bildrestaurierung: Allgemeines Vorgehen (1)

---

Übertragen des Signalmodells zur Bilddegradation

$$f(x, y) = h \star i(x, y) + n(x, y)$$

in den Frequenzraum:

$$F(u, v) = H(u, v) \cdot I(u, v) + N(u, v)$$

wobei

$F(u, v)$ : DFT des (gestörten) Bildes  $f(x, y)$

$I(u, v)$ : DFT des (ungestörten) Originalbildes  $i(x, y)$

$H(u, v)$ : DFT der Degradationsfunktion  $h$

$N(u, v)$ : DFT der additiven Störungsfunktion  $n(x, y)$

## Bildrestaurierung: Allgemeines Vorgehen (2)

Allgemeines Vorgehen:

- Herleitung von

$$I(u, v) \approx R_{\text{type}}(u, v) \cdot F(u, v)$$

- Rücktransformation

$$i(x, y) \approx f^*(x, y) = \mathcal{F}^{-1} [ R_{\text{type}}(u, v) \cdot F(u, v) ]$$

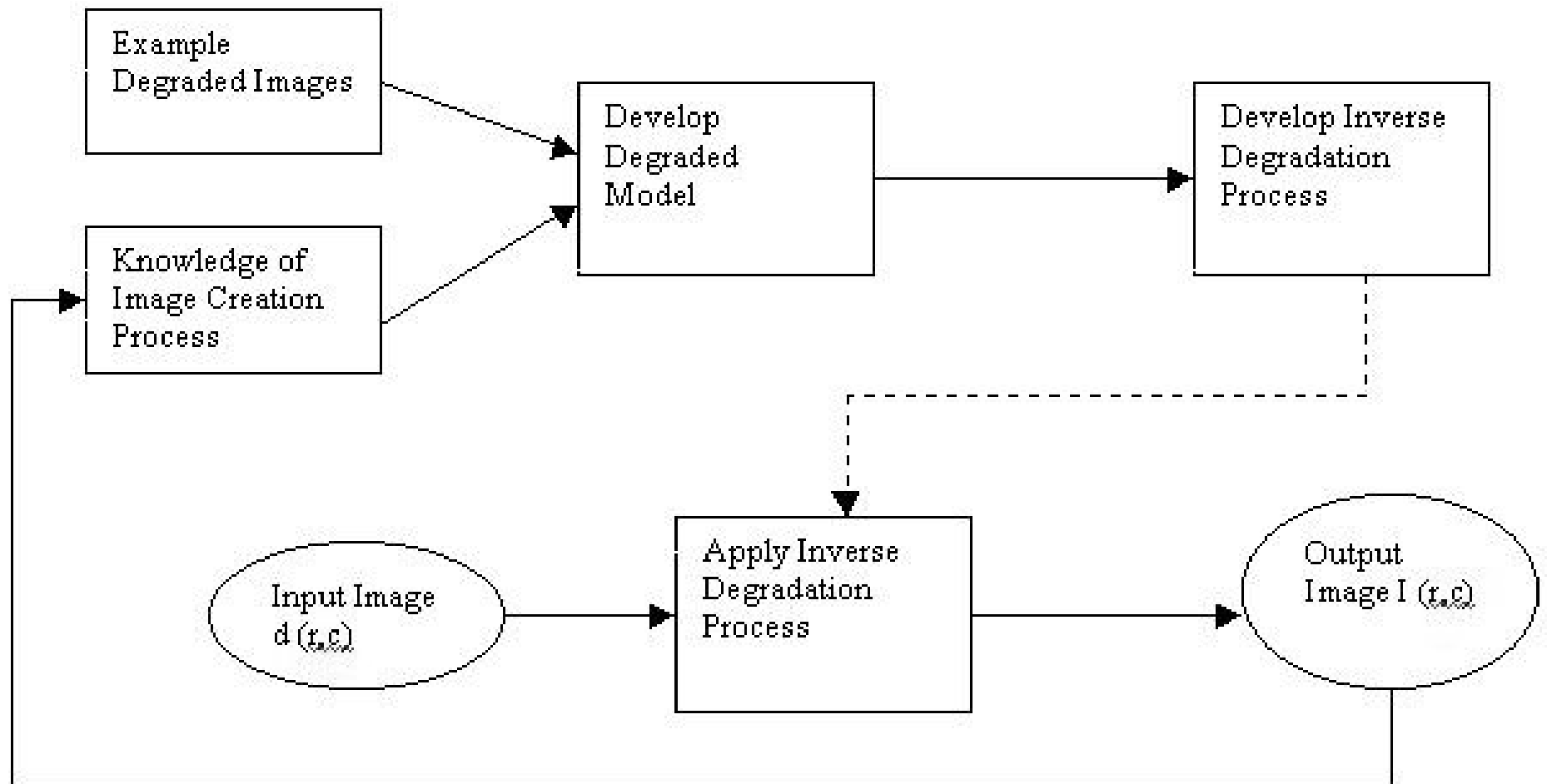
wobei

$f^*(x, y)$ : das restaurierte Bild von  $f(x, y)$

$R_{\text{type}}(u, v)$ : der Restaurationsfilter  
(abhängig von  $F(u, v)$  und  $H(u, v)$ )

Bildrestaurierung wird auch *deconvolution* genannt

# Bildrestaurierung: Allgemeines Vorgehen (3)





# Bildrestaurierung: Inverse Filterung (1)

**Annahme:** keine additive Störung; d.h.  $n(x, y) = 0$ ,  $N(u, v) = 0$

Aus  $F(u, v) = H(u, v) \cdot I(u, v)$  folgt:

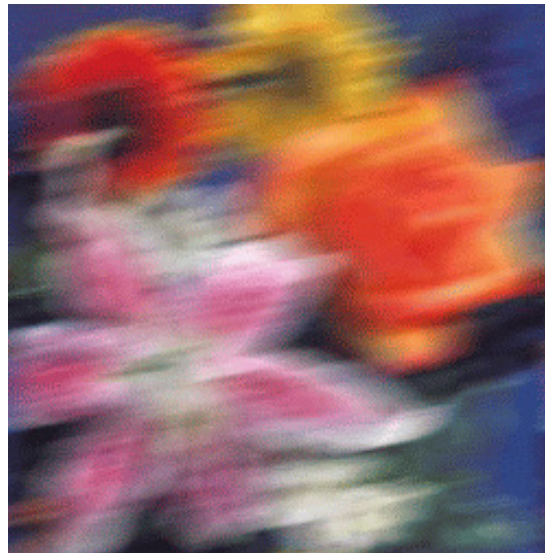
$$I(u, v) = \frac{F(u, v)}{H(u, v)} = R_{\text{inverse}}(u, v) \cdot F(u, v); \quad R_{\text{inverse}} = \frac{1}{H(u, v)}$$

**Inverse Filterung:**  $f^*(x, y) = F^{-1} [R_{\text{inverse}}(u, v) \cdot F(u, v)]$

**Beispiel:** Bewegungsdegradation (31 Pixel,  $11^\circ$ )



Originalbild



Bewegungsdegradation



Inverse Filterung

# Bildrestaurierung: Inverse Filterung (2)

## Problem bei Störungen:

Inverse Filterung liefert Approximation von  $I(u, v)$ :

$$\hat{I}_{\text{inverse}} = \frac{F(u, v)}{H(u, v)}$$

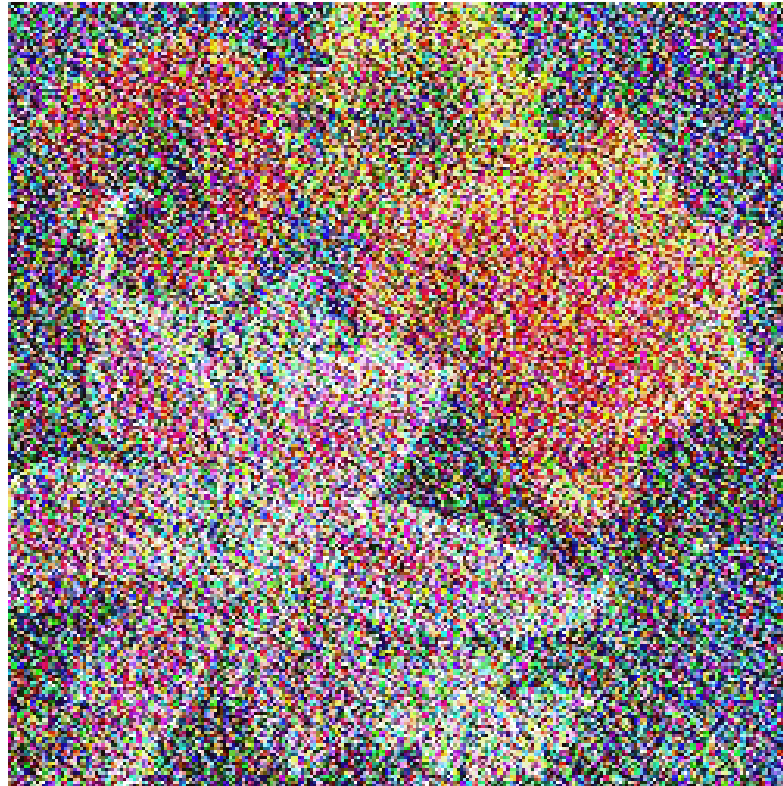
Beziehung zwischen gesuchtem  $I(u, v)$  und Approximation  $\hat{I}_{\text{inverse}}$ :

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{inverse}} &= \frac{H(u, v) \cdot I(u, v) + N(u, v)}{H(u, v)} \\ &= I(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}\end{aligned}$$

Kleine Werte von  $H(u, v) \implies$  sehr ungenaue Schätzung  $\hat{I}_{\text{inverse}}$   
(störungsanfällige Restaurierung)

## Bildrestaurierung: Inverse Filterung (3)

**Beispiel:** zur Bewegungsdegradation zusätzlich additive Störung



Restaurierung: inverse Filterung

Wegen unbefriedigender Ergebnisse schon bei schwach gestörten Bildsignalen wird die inverse Filterung in dieser Form wenig eingesetzt

# Bildrestaurierung: Wiener-Filter (1)

Der Wiener-Filter gehört zu stochastischen Bildrestaurierungsverfahren (optimale Bildverbesserung im statistischen Sinne). Das Ziel besteht darin, unter Ausnutzung der a-priori-Wissen über Bildsignal und Störung ein neues Signal so zu berechnen, dass die quadratische Abweichung des originalen Bildsignals vom restaurierten Bildsignal minimal wird.

In der Praxis häufig die vereinfachte Form des Wiener-Filters:

$$I(u, v) = \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K} F(u, v) = R_{\text{wiener}}(u, v) \cdot F(u, v)$$

$$R_{\text{wiener}} = \frac{1}{H(u, v)} \cdot \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + K}$$

**(Heuristischer) Wiener-Filter:**

$$f^*(x, y) = \mathcal{F}^{-1} [R_{\text{wiener}}(u, v) \cdot F(u, v) ]$$

Der optimale Wert für Parameter  $K$  wird experimentell ermittelt (Inverse Filterung: Spezialfall des Wiener-Filters für  $K = 0$ )

# Bildrestaurierung: Wiener-Filter (2)

**Beispiel:** zur Bewegungsdegradation zusätzlich additive Störung



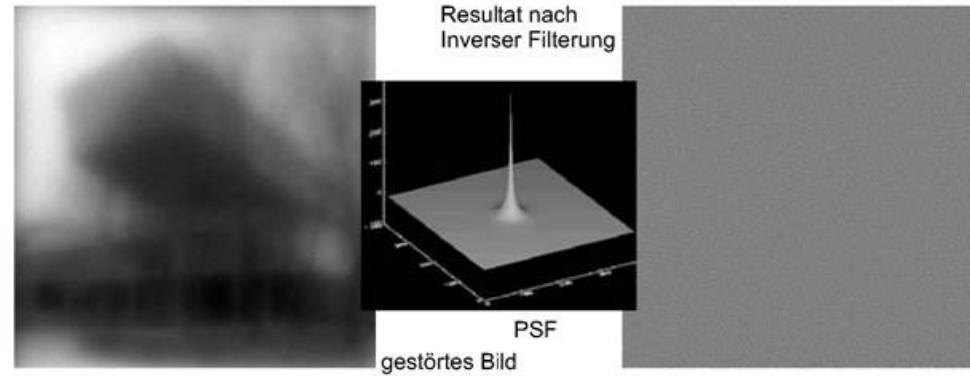
inverse Filterung



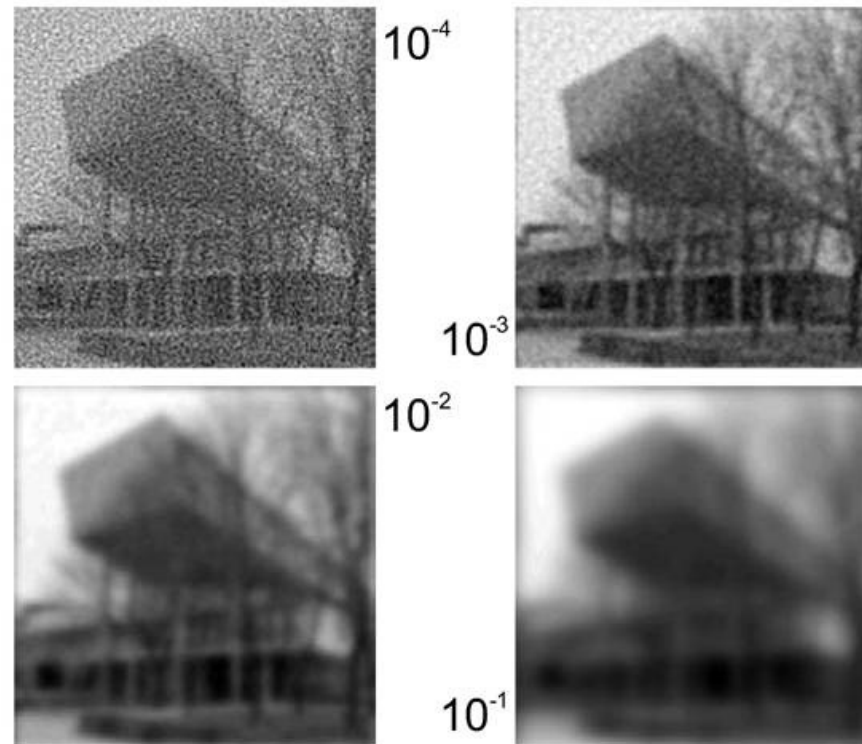
Wiener-Filter

# Bildrestaurierung: Wiener-Filter (3)

**Beispiel:** Das unscharfe Original enthält einen geringen Rauschanteil



Heuristisches Wiener Filter für verschiedene Werte von  $k$

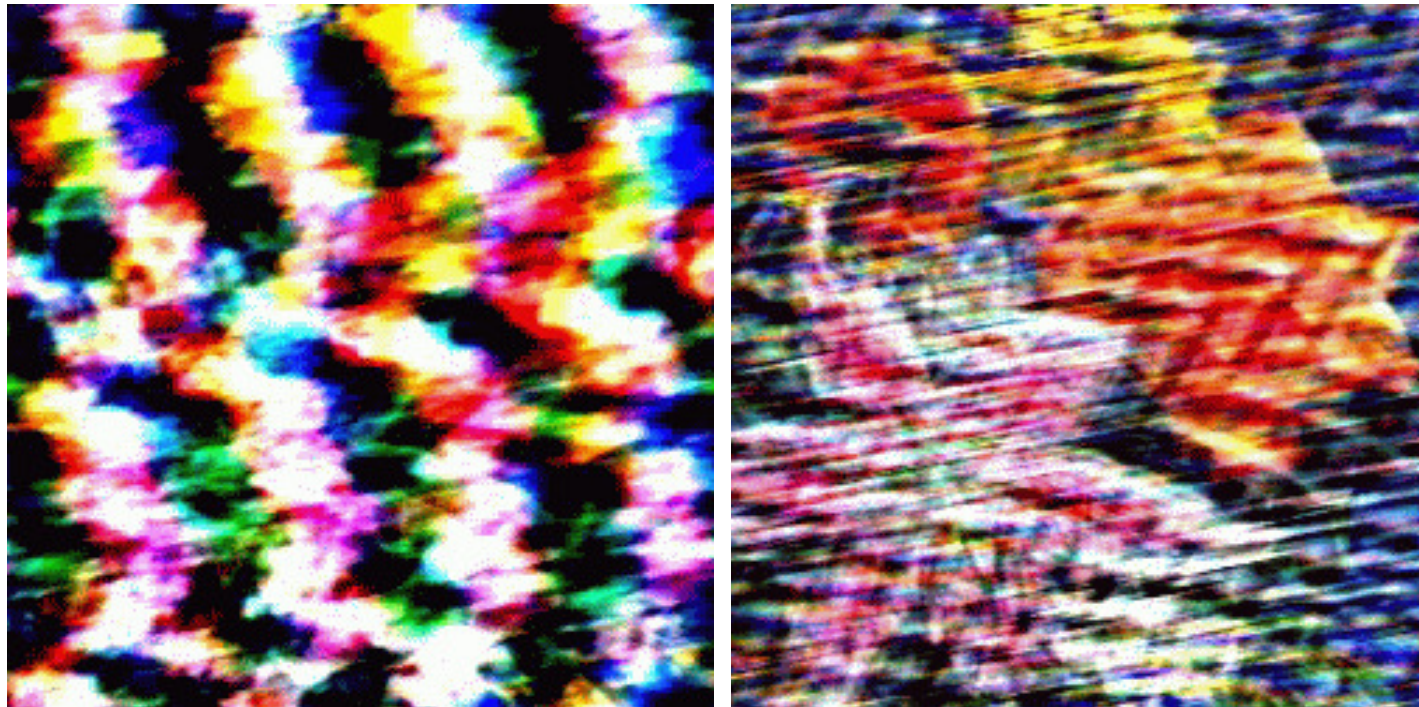


## Bildrestaurierung: Wiener-Filter (4)

### Wichtigkeit der Degradationsfunktion:

Korrektheit der Degradationsfunktion  $h$  bzw. ihrer Fourier-Transformierten  $H(u, v)$ : wichtig für Qualität der Restaurierung. In der Praxis i.A. a-priori-Wissen und/oder Experimentieren erforderlich

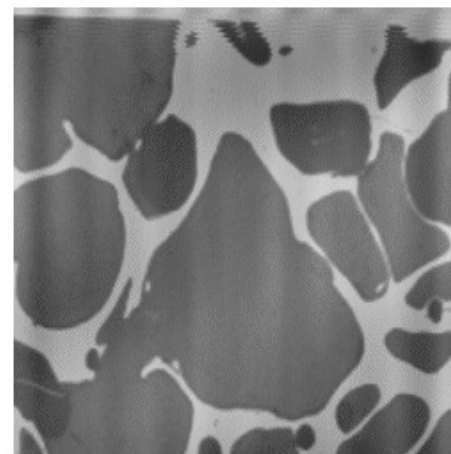
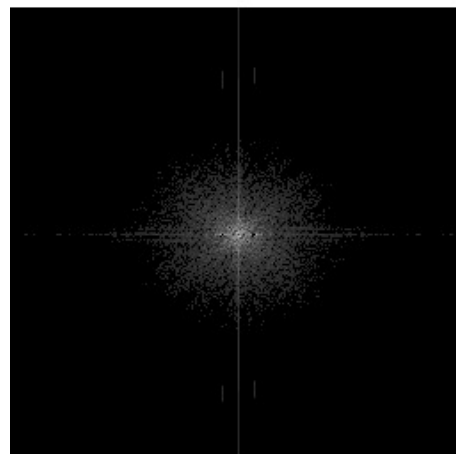
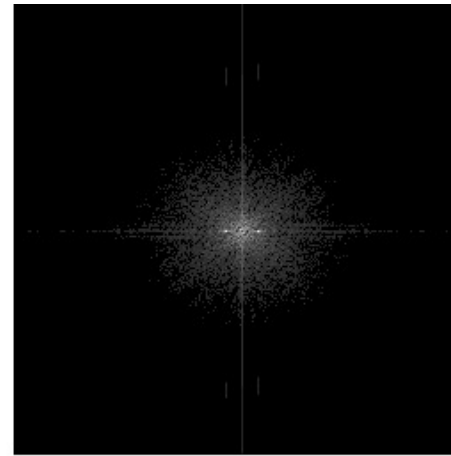
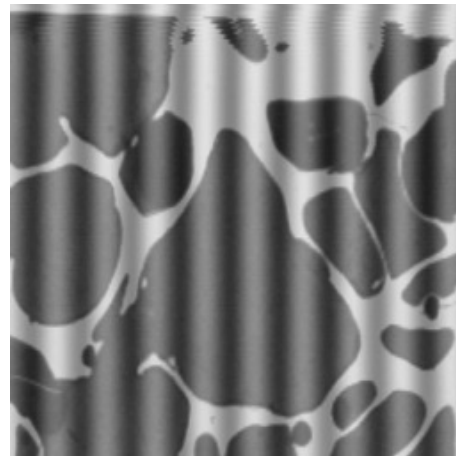
**Beispiel:** Bewegungsdegradation (31 Pixel,  $11^\circ$ ), keine additive Störung  
Fall 1 (links): Bewegungsdegradation (62 Pixel,  $11^\circ$ ) wird angenommen  
Fall 2 (rechts): Bewegungsdegradation (31 Pixel,  $22^\circ$ ) wird angenommen



# Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen (1)

Im Frequenzraum drücken sich periodische Störungen häufig als leicht detektierbare Frequenzen mit großen Amplituden aus. So können spezielle Filter entwickelt werden, um selektiv die zu den periodischen Störungen gehörigen Frequenzen zu eliminieren.

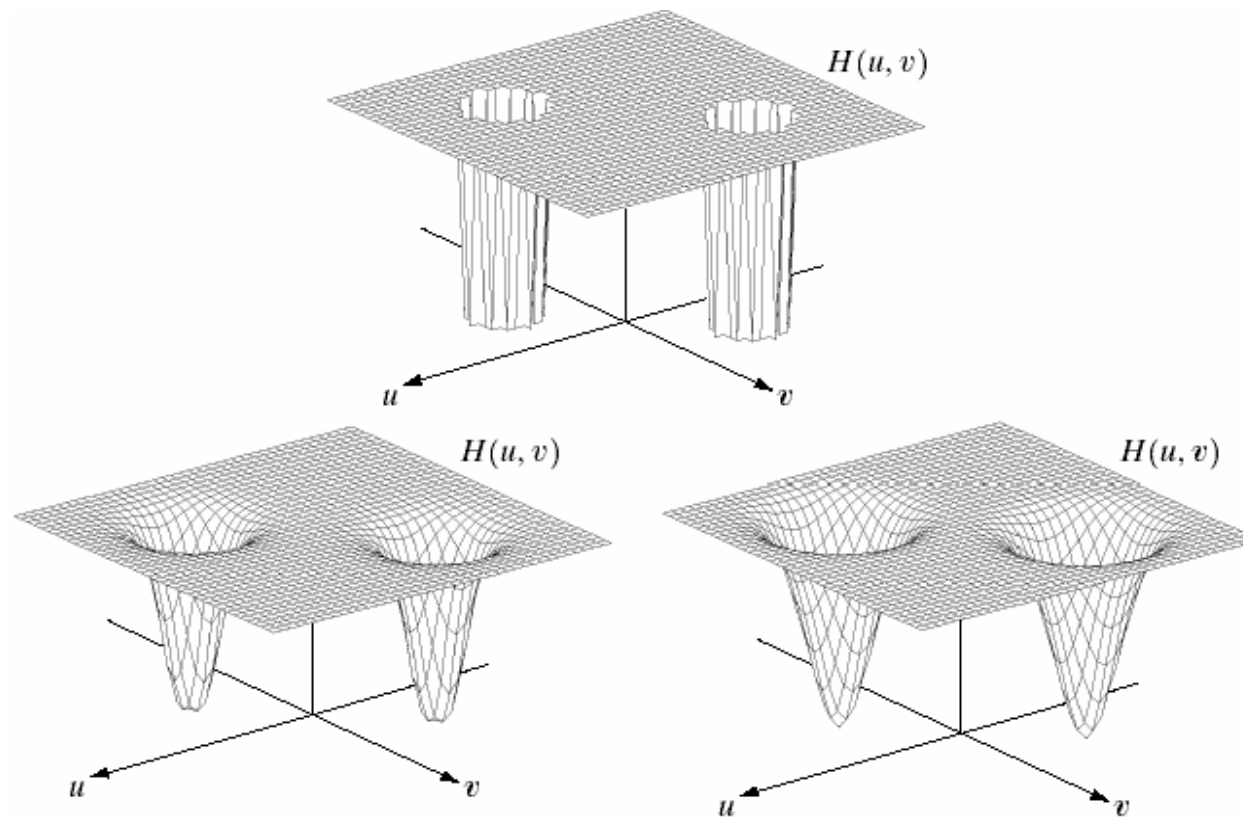
**Beispiel:** reguläres Störungsmuster





## Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen (2)

**Notch-Filter:** A notch filter rejects (or passes) frequencies in predefined neighborhood about a center frequency. Due to the symmetry of the Fourier transform, notch filters must appear in symmetric pairs about the origin in order to obtain meaningful results. The number of frequency pairs and the shape of the notch areas can be arbitrary (e.g. rectangular). Example: ideal (top), Butterworth (bottom left), and Gaussian (bottom right) notch reject filters.



## Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen (3)

**Beispiel:** zwei reguläre Störungsmuster (umgekehrte Darstellung des Amplitudenspektrums und des Notch-Filters beachten)

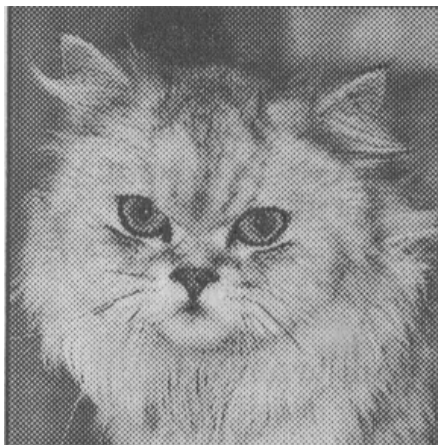


# Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen (4)

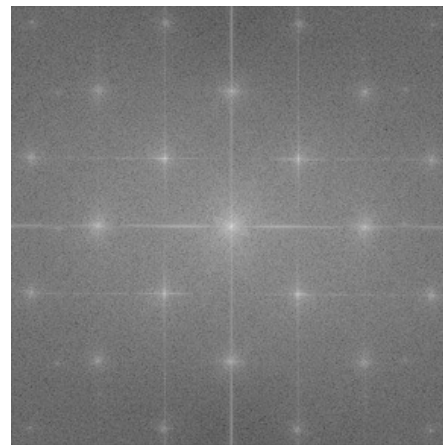
**Beispiel:** Restaurierung von Halbtonbildern

Halbtonverfahren: Wiedergabe von Grauwertbildern auf Schwarz-Weiss Ausgabegeräten (subjektiver Eindruck kontinuierlicher Grautöne durch geeignete Verteilung von Schwarz und Weiss unter Ausnutzung des vom visuellen System vorgegebenen beschränkten Detailauflösungsvermögens)

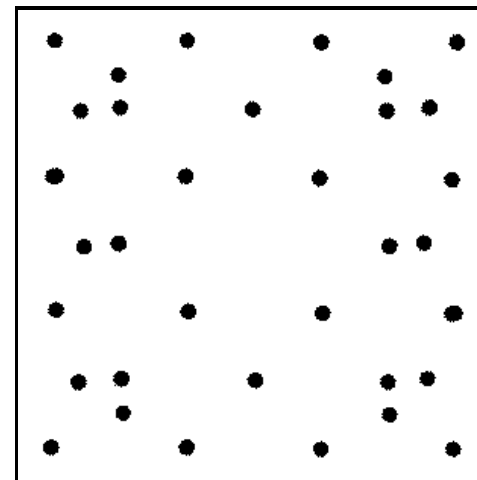
Eingescannte Halbtonbilder zeigen typische Halbtonmuster; Elimination mithilfe eines Notch-Filters



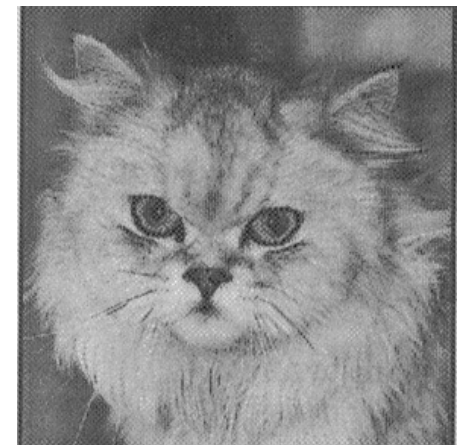
Halbtonbild



Amplitudenspektrum



Notch-Filter



restauriertes Bild

# Notch-Filter: Entfernung periodischer Störungen (5)

**Beispiel:** Restaurierung von Satellitenbildern

