

Aufgaben zum Vorbereitungskurs Mathematik

Verwendete Symbole aus Mengenlehre und Logik

$A = \{\dots\dots\dots\}$	Klammer umfasst die Elemente einer Menge.
$x \in A$	x ist Element der Menge A .
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B .
$A \cap B$	Durchschnittsmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \setminus B$	Menge aller Elemente von A , die nicht auch zu B gehören
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$	Menge der reellen, rationalen, ganzen, natürlichen Zahlen
$p \wedge q$	p und q
$p \vee q$	p oder q
$p \Rightarrow q$	Aus p folgt q .
$p \Leftrightarrow q$	p gilt genau dann, wenn q gilt. (p und q sind äquivalent.)

1. Einfaches Rechnen mit Zahlen und Zahlengrößen

1.1 Reelle Zahlen

1.1 Formen Sie die folgenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche um!

1,234 0,78 145,99 $0,\overline{9}$ 17,18265 $-3,45\overline{46}$

1.2 Berechnen Sie die folgenden Summen!

a) $\sum_{k=-3}^2 (2k+1)$ b) $\sum_{u=0}^4 2u^3$ c) $\sum_{r=0}^2 (2r)^3$ d) $\sum_{i=2}^6 3$ e) $\sum_{m=N}^{N+3} (2N-m)$
f) $\sum_{r=0}^N \left(\frac{1}{2}\right)^r$ g) $\sum_{k=0}^N q^k$ h) $\sum_{m=0}^N (a+m \cdot d)$ i) $\sum_{m=0}^2 \sum_{k=1}^3 (k-2m)$

1.3 Berechnen Sie die folgenden Produkte!

a) $\prod_{j=2}^5 (j+1)$ b) $\prod_{k=-8}^{16} k^7$ c) $8!$ d) $10!$

1.2 Rationales Rechnen mit "Klammerausdrücken"

1.4 Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie:

a) $(16p+2q) - (5p-7q)$ b) $3(a+b+c) - 5(a+b) - 2(b-c-a)$
c) $x^9 - (x^{3^2} - (x^3)^2)$ d) $20m - [(4m+2n) + (6m-n)]$
e) $100 - [(b+20) - (40-b)]$ f) $[3a - (4b+2x)] - [(3x+3b) - (4x-2a+b)]$

1.5 Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

- a) $(5u - (2u - 3))(u - (1 - u))$ b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$
 c) $x^3 - y^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ d) $3x - (x - 2)(-2x - 1)$
 e) $[a(a^2 + a - 1) - a^2(a + 1)] \cdot 5$ f) $14(3s + 4t) - 8(5s - 3t)$

1.6 Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie nach Möglichkeit.

- a) $(-a - b)(a - b)$ b) $(4a^2 - 3)(4a^2 + 3) - (3a - 4)^2 + (5a + 1)^2$
 c) $(3b + 2)^2 - (5b - 3)^2$ d) $(2x - 3y)(3y + 2x) - (x - 2y)^2$

1.7 Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus:

- a) $2u(u + v) - (u - v)(u + v)$ b) $192x^2y^2 + 216x^3y - 144xy^2$
 c) $3(2x + 3)^2(a - b)^3 - 4(6 + 4x)(b - a)^5$ d) $x^2 - 3x + xy - 3y$

1.8 Zerlegen Sie unter Verwendung binomischer Formeln folgende Summen in Faktoren:

- a) $196x^2 - 169y^2$ b) $(2m - n)^2 - (n + 2m)^2$ c) $-25x^2 - 100y^4 + 100xy^2$

1.9 Zerlegen Sie folgende Summen in Faktoren:

- a) $x^2 - 7x + 10$ b) $12x^2 - 96x - 780$
 c) $x^2 + 4ax + 4a^2 - 9b^2$ d) $2u^2 - ua - 6a^2$

1.10 Kürzen Sie soweit wie möglich

- a) $\frac{204a^2b^3c}{255ab^2c^3}$ b) $\frac{5(x - 2)}{5x - 2}$ c) $\frac{288x - 288y}{432(y^2 - x^2)}$
 d) $\frac{2a + a^2 + 1}{2a^2 - 2}$ e) $\frac{u^3 + b^3}{u^2 - b^2}$ f) $\frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x^2 + y^2}$

1.11 Fassen Sie zu einem Bruch zusammen:

- a) $\frac{3}{4a} - \frac{2}{5b}$ b) $\frac{2x - 3}{x^2(x + 1)} - \frac{3 - 4x}{x(x + 1)^2}$
 c) $\frac{x}{x - a} + \frac{a}{(x - a)^2} + \frac{a}{x^2 - a^2} - 1$ d) $\frac{m}{m + n} + \frac{2mn}{m^2 - n^2} - \frac{n}{m - n}$

1.12 Setzen Sie den Ausdruck A in den Ausdruck B ein und vereinfachen Sie:

	A	B
a)	$x = y + 1$	$x - xy$
b)	$y = \frac{1}{x} - 1$	$x - xy$
c)	$x = \frac{1}{y} - y$	$-\frac{2(y^2 - 1)}{x^2}$
d)	$x = z - \frac{1}{z}$	$x + \frac{2}{x}$

1.13 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Terme:

a) $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+x}$ b) $-\ln(1-x)$ c) $\ln(\sqrt{x-1}-1)$
d) $\frac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2-2x+1}$ e) $\frac{x+1}{\ln(x+1)}$ f) $\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{-x^2+2}}$

1.3 Potenzen und Wurzeln

1.14 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Wie müssen die auftretenden Größen beschaffen sein, damit die Terme erklärt sind?

a) $2^3 - (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^3$ b) $(-x)^4 + (-2a)^4 - 2a^4 + (-3x)^4$
c) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 16(a-1)^3 - 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$
d) $\frac{a^{x+3} \cdot b^{x+1} \cdot a^{3+x} \cdot b^{3x-1}}{a^{x+1} \cdot b^{x-2} \cdot a^{3-x} \cdot b^x}$ e) $\frac{a^{2n+x} \cdot b^{3n-x}}{a^{2n-x} \cdot b^{n+2x}} : \frac{x^{n+1} \cdot y^{2n-3}}{x^{2n-1} \cdot y^{3n+2}}$
f) $\frac{15ax^3 \cdot 3b^n (x-1)^2}{2by^3 \cdot 10a^n (x+1)^2} : \frac{3b^{n-1} (1-x)^3}{8a^{n+1} (1+x)^2}$ g) $\left(\frac{a^2x^2}{3b^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9a^3y^6}{8b^3x^3}\right)^2$
h) $\sqrt[3]{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt{a}}$

1.15 Stellen Sie in der Wurzelschreibweise dar!

a) $x^{-\frac{3}{4}}$ b) $(32a^5b^{10})^{\frac{2}{5}}$ c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{8}}$ d) $9^{0,9}$ e) $a^{-0,33}$
f) $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$ g) $\left(c^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ h) $a^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}$ i) $27^{-0,3}$ j) $5^{0,9}$

1.16 Man schreibe die Terme nur mit positiven Exponenten!

a) $x^{-4} \cdot a^3 \cdot b^{-2} : u^{-5}$ b) $\frac{a^{-2}b^{-3}c^4d}{a^5b^{-2}c^{-3}d^2}$ c) $\frac{(4a)^{-1} \cdot (2b)^3}{(2c)^{-2} \cdot 8b^{-1}}$

1.17 Man schreibe die Terme ohne Wurzelzeichen!

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $\frac{a^3\sqrt[3]{a^5b}}{\sqrt{ab}}$ c) $\sqrt[4]{xy^3} \cdot \sqrt[5]{x^3y}$
d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{z}$ e) $\sqrt[3]{x^{28}y^6}$ f) $a^2\sqrt{b} - b^2\sqrt{a}$

1.18 Man vereinfache!

a) $\left(\sqrt[3]{a^{15}}\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\left(\sqrt[4]{3ab^2}\right)^{\frac{3}{3}} \cdot \left(\sqrt[8]{27a^{-2}b^5}\right)^{\frac{3}{2}}$
c) $5a^3 - (2a)^3 + (3ab)^3$ d) $\sqrt{\frac{(4x^2y^3z)^{-2}}{(8xz^6)^{-3}}}$

1.19 Man schreibe die Ausdrücke ohne Bruchstrich und ohne Wurzelzeichen

a) $\frac{8xya^2b^7}{4ab^{15}x^2y^3}$ b) $\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{b}}$ c) $\frac{ab\sqrt{c}}{\sqrt{abc}}$
d) $\frac{(a+b)^6 \cdot c^5}{3c^7(a+b)^{13}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[4]{81a}}$ f) $\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a+b}}$

1.4 Logarithmen

1.20 Ermitteln Sie durch einfaches Überlegen (also ohne Taschenrechner) die folgenden Logarithmen!

$$\begin{array}{lllll} \log_3 27 & \log_{0,5} 0,125 & \log_6 216 & \lg 1000 & \log_{3,5} 1 \\ \ln 1 & \ln e^2 & \log_{16} 4 & \log_2 \frac{1}{8} & \log_3 \sqrt{27} \\ \log_{22} 1 & \log_2 \frac{1}{2} & \lg 0,001 & \ln \sqrt{e} & \log_{0,5} 8 \end{array}$$

1.21 Bestimmen Sie - falls möglich - die Unbekannte x aus den Gleichungen!

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 2^x = 64 & \text{b) } 2^x = \frac{1}{8} & \text{c) } \log_x 1024 = 10 & \text{d) } \log_x 0,1 = -1 \\ \text{e) } \log_7 49 = x & \text{f) } \log_3 x = 4 & \text{g) } 2 \ln x = \ln 4 & \text{h) } 0,5 \ln x = 2 \ln(a+2) \\ \text{i) } 1 + 3 \lg x = 2,2 & \text{j) } \lg(3x-1) = 0,301 & \text{k) } \lg x^6 = \lg x^3 + 6 & \text{l) } 2^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x} \\ \text{m) } \lg(\sqrt{ax} + 1) + \lg(\sqrt{ax} - 1) - 2 \lg(ax - 1) - 1 = 0 \\ \text{n) } \ln(a^2 + ab + b^2) + \ln(a - b) - \ln(a^3 - b^3) + \ln x = 0 \\ \text{o) } 2^{3(x-1)} = 8^{x-1} & \text{p) } 7^{\frac{2}{x}} = 343^{\frac{1}{3}(x-1)} & \text{q) } \left(\frac{1}{4}\right)^x = 10000 \\ \text{r) } \sqrt{a^{4-3x}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+2}} \cdot \sqrt[4]{a^{5x-2}} \cdot \sqrt[5]{a^{5-2x}} = 1 & \text{s) } \sqrt[x]{a^n} = \sqrt[n]{a^{x-n}} & \text{t) } \sqrt{a^{6(2-x)}} = a^{2(2x+3)} \\ \text{u) } \frac{1}{4} \lg x^5 + 3 \lg \sqrt{x} - 3 \lg \sqrt[4]{x} = 2(\lg 2 + \lg 3) \\ \text{v) } \lg 5^x + \lg 2^x - 1 = 0 & \text{w) } \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 & \text{x) } \log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0 \end{array}$$

1.22 Formen Sie die Ausdrücke so um, dass nur noch *ein* Logarithmus *eines* Argumentes entsteht!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lg 1 + \lg 5 - \lg a & \text{b) } \ln a - \ln b + \ln c & \text{c) } 2 \ln x - 3 \ln y - 5 \ln(x+y) \\ \text{d) } \frac{1}{2} \lg a + 2 \lg c - \frac{1}{3}(\lg b^3 + \lg a^{\frac{3}{2}}) & \text{e) } \frac{1}{2} \ln(a^2 - 2ab + b^2) - \frac{1}{2} \ln(a-b) \\ \text{f) } \frac{1}{3} \lg a + \frac{1}{3} \lg(ab) - \lg b & \text{g) } \frac{1}{2} \ln(a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \ln(a-b) - \frac{1}{3} \ln(a+b) \\ \text{h) } \frac{1}{2} \ln 16 + \frac{1}{3} \ln 8 & \text{i) } -3 \lg a - \frac{1}{3} \lg b & \text{j) } \lg \sqrt{a^2 - b^2} - \frac{1}{3} \lg(a-b) - \frac{1}{3} \lg(a+b) \end{array}$$

1.23 Nach wievielen Jahren hat sich ein mit 6% Jahreszins angelegtes Kapital verdoppelt? (Die Zinsen werden dem Konto gutgeschrieben und mit verzinst.)

1.24 Stellen Sie folgende Ausdrücke in der Form $e^{T(x)}$ dar:

$$\text{a) } 3^x \quad \text{b) } 2^x x^2 \quad \text{c) } x^x$$

1.25 Stellen Sie die Formeln um

$$\begin{array}{ll} \text{a) } I = I_0 e^{-\frac{t}{T}} & \text{nach } t \\ \text{b) } \varphi = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^y & \text{nach } y \\ \text{c) } E = \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} & \text{nach } r_2 \\ \text{d) } p_s = 20 \lg\left(\frac{U_x}{U_0}\right) & \text{nach } U_x \end{array}$$

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Lösen Sie folgende lineare Gleichungen nach x auf:

$$\text{a) } \frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + a = \frac{a}{x} + 1$$

$$\text{c) } (x+1)(x+a) + b = 2a + (x+2)(x+b)$$

$$\text{d) } \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}}$$

$$\text{e) } \frac{\frac{ax+1}{a+b}}{a-b} = 1$$

$$\text{f) } \frac{3b+ax}{a+b} = 1 + \frac{abx}{a^2-b^2}$$

$$\text{g) } \frac{2x-a}{x-b} = 1$$

2.2 Lösen Sie folgende Formeln nach den angegebenen Größen auf:

$$\text{a) } s = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{nach } v_0 \text{ und } g$$

$$\text{b) } v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \text{nach } s_1 \text{ und } t_1$$

$$\text{c) } E_{\text{pot}} = mg(h_2 - h_1) \quad \text{nach } h_2 \text{ und } h_1$$

$$\text{d) } C = 4\pi K \cdot \frac{R_1 R}{R_1 - R} \quad \text{nach } R \text{ und } R_1$$

$$\text{e) } m_2 = m_1 \frac{1 + \lambda_1 \Delta t}{1 + \lambda_2 \Delta t} \quad \text{nach } \Delta t \text{ und } \lambda_2$$

2.3 Durch einen Rohrbruch wurde ein Keller überflutet und wird durch die Feuerwehr mittels dreier gleichmäßig und gleichzeitig arbeitender Pumpen leergepumpt. Wieviel Minuten werden dazu benötigt, wenn durch die erste Pumpe allein 6 Stunden, durch die zweite 4 Stunden und durch die dritte 2 Stunden benötigt würden?

2.4 Die Spitzengruppe eines Radrennens habe eine Länge von insgesamt 50m. Sie fährt mit einer Geschwindigkeit von $45 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ über eine 425m lange Brücke. Welche Zeit benötigt sie dazu?

2.5 Von drei parallelgeschalteten Widerständen ist der zweite doppelt so groß wie der erste und der dritte dreimal so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände zu wählen, damit der Gesamtwiderstand $12\text{k}\Omega$ beträgt?

2.6 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden lineare Ungleichungen!

$$\text{a) } \frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} \leq 1$$

$$\text{b) } \frac{1}{x} + a < \frac{a}{x} + 1$$

$$\text{c) } (x+1)(x+a) + b \geq 2a + (x+2)(x+b)$$

$$\text{d) } \frac{3}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}}$$

$$\text{e) } \frac{\frac{ax+1}{a+b}}{a-b} > 1$$

$$\text{f) } \frac{3b+ax}{a+b} \geq 1 + \frac{abx}{a^2-b^2}$$

$$\text{g) } \frac{2x-a}{x-b} < 1$$

2.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

2.7 Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit bestimmten Koeffizienten

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x^2 + 5x - 14 = 0 & \text{b) } \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16} \\ \text{c) } 24x^2 + 27 = 54x & \text{d) } (2x - 3)^2 - (x - 5)^2 = 80 \\ \text{e) } \frac{2x+1}{9} + \frac{6}{x+2} = \frac{x-2}{2} + \frac{x-1}{3} & \end{array}$$

2.8 Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (ax + b)(ax - b) = 0 & \text{b) } x^2 + (R^2 - x)^2 = (R^2 - 2x)^2 \\ \text{c) } (1 - ax)^2 = (1 - bx)^2 & \text{d) } \frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2} \end{array}$$

2.9 Folgende Gleichungen lassen sich auf die Lösung quadratischer Gleichungen zurückführen. Geben sie alle reellen Lösungen an.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (x^2 - 5)^2 + (x^2 - 1)^2 = 40 & \text{b) } (x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78 \\ \text{c) } x = 36 + 5\sqrt{x} & \text{d) } 8x^{-6} + 999x^{-3} = 125 \end{array}$$

2.10 Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung von:

$$\text{a) } x^2 + x + 1 \quad \text{b) } x^2 - 4x - 4 \quad \text{c) } x^2 + 9x + 3$$

2.11 Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 3x^2 + 6x - 15 = 0 & \text{b) } x^2 - 4x - 16 = 0 & \text{c) } 24x^2 + 27 = 54x \\ \text{d) } (x - 3)^2 = 49 & \text{e) } (x + 2)(x + 4) = 0 & \text{f) } (x - 5)(x - 4) + (x - 6)(x - 3) = 0 \\ \text{g) } \frac{10x+1}{x} - 2x + 1 = 0 & \text{h) } \frac{2x+1}{5} + \frac{3}{x-2} = \frac{4x-2}{8} - \frac{10x+1}{3} & \\ \text{i) } \frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3} & \text{j) } \frac{5+2x}{3-2x} - \frac{4-3x}{x} = \frac{2x}{x-1} & \end{array}$$

2.12 Um die Tiefe eines Brunnen zu bestimmen, läßt man einen Stein frei hineinfallen und hört ihn nach 6 Sekunden im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit 333m/s, Fallbeschleunigung 9,81 m/s². Luftwiderstand wird vernachlässigt)

2.13 Zwei Widerstände, die sich um 200Ω unterscheiden, haben in Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 24Ω. Wie groß sind die Widerstände?

2.14 Bei einer Brinellhärteprüfung eines Stahls verwendet man eine Stahlkugel von 10mm Durchmesser und erhält nach der Prüfung, bei der die Stahlkugel auf die Oberfläche des zu prüfenden Werkstückes gedrückt wird, einen Kugeleindruck, dessen Durchmesser (auf der ebenen Oberfläche des Werkstückes gemessen) 5mm ist. Wie tief ist die Kugel in das Werkstück eingedrungen?

2.15 Durch Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km eine Zeiteinsparung von 40 min. Wieviel Stunden benötigt er für die Strecke?

2.16 Lösen Sie die Ungleichungen!

$$\text{a) } 3x^2 + 6x - 15 \leq 0 \quad \text{b) } x^2 - 4x - 16 > 0 \quad \text{c) } 4x^2 + 28 < 4x \quad \text{d) } 24x^2 - 54x \geq -27$$

2.3 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

2.17 Lösen Sie die Betragsstriche auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

$$2|a - b| - |b + 3a| - |b| - 5a \quad \text{mit } 0 \geq a \geq b.$$

2.18 Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen!

a) $x = |x| - 1$ b) $|x + 2| + 3 = 7$ c) $|3x - 9| - 2|x + 1| = 3x + 5$ d) $|3x - 9| - 2|x + 1| = |3x + 5|$
 e) $x < |x| - 1$ f) $|x + 2| + 3 \leq 7$ g) $|3x - 9| - 2|x + 1| \geq 3x + 5$ h) $|3x - 9| - 2|x + 1| < |3x + 5|$

2.19 Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen und Ungleichungen:

a) $|x - 3| = 5$ b) $\left| \frac{2x+4}{x-3} \right| = 1$
 c) $|x - 2| < 3$ d) $|3x - 5| > 2|x + 2|$
 e) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ f) $|x^2 + 4x - 5| > 2$

2.20 Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen

a) $x < |x| - 1$ b) $|x + 2| + 3 \leq 7$
 c) $|3x - 9| - 2|x + 1| \geq 3x + 5$ d) $|3x - 9| - 2|x + 1| < |3x + 5|$
 e) $x^2 - |x| - 12 \geq 0$ f) $\frac{|x-3|}{2x-4} + 3x < 3x + 5$

2.4 Wurzelgleichungen

2.21 Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen:

a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$ b) $9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2}$
 c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$ d) $(3\sqrt{x} - 1)^2 + (4\sqrt{x} - 7)^2 = (5\sqrt{x} - 6)^2$
 e) $\sqrt{x-a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{4x-a+b}$ f) $\sqrt{x+a} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$
 g) $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = 3$

2.22 Jemand rechnet $x = \sqrt{a^2 - 2a + 1} - a = \sqrt{(a-1)^2} - a = (a-1) - a = -1$.
 Für $a = 0$ erhält man jedoch $x = 1$. Wo steckt der Fehler?

3. Geraden und Kreise; Trigonometrie

3.1 Bestimmen Sie Länge und Anstiegswinkel der Strecke $\overline{P_1P_2}$!

a) $P_1 = (-1; -1)$, $P_2 = (-2; 4)$ b) $P_1 = (2; -3)$, $P_2 = (-2; 3)$

3.2 Man bestimme die Gleichung der Geraden, deren Anstiegswinkel α beträgt und die durch den Punkt P geht, wobei:

a) $\alpha = 30^\circ$, $P = (-2; -1)$ b) $\alpha = -60^\circ$, $P = (-1; -2)$
 c) $\alpha = 135^\circ$, $P = (-3; 3)$ d) $\alpha = 22,5^\circ$, $P = (-0.5; 1.5)$

3.3 Man bestimme die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht, wobei:

a) $P_1 = (1; 0)$, $P_2 = (-2; -4)$ b) $P_1 = (-1; 2)$, $P_2 = (2; -3)$
 c) $P_1 = (0, 5; -0, 2)$, $P_2 = (-0, 2; 1, 2)$ d) $P_1 = (a; 2)$, $P_2 = (-2; -a)$

3.4 Durch den Punkt $P = (3; 2)$ ist zu der Geraden die Parallele zu ziehen. Wie lautet die

Gleichung?

a) $y = 2x + 3$ b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

3.5 Durch den Punkt $P = (2; \frac{3+\sqrt{3}}{3})$ soll eine Gerade gezogen werden, die die Gerade $y = \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}$ unter einem Winkel von 30° schneidet. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

3.6 Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises

a) $x^2 + 4x + y^2 - 4y + 7 = 0$ b) $x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$

3.7 Man gebe die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(-2; 3)$ und dem Peripheriepunkt $P(1; -1)$ an.

3.8 Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf, der durch den Punkt $P = (3; 4)$ verläuft und beide Koordinatenachsen berührt.

3.9 Rechnen Sie (ohne Taschenrechner) die gegebenen Winkel in Gradmaß bzw. in Bogenmaß um!

a) $\varphi = 45^\circ$ b) $\varphi = 135^\circ$ c) $\varphi = 240^\circ$ d) $\varphi = 315^\circ$

e) $x = \frac{2\pi}{3}$ f) $x = \frac{3\pi}{4}$ g) $x = \frac{11\pi}{6}$ h) $x = \frac{7\pi}{6}$

3.10 Rechnen Sie die gegebenen Winkel in Gradmaß bzw. in Bogenmaß um!

a) $\varphi = 35^\circ 46' 12''$ b) $\varphi = 217^\circ 58' 08''$ c) $x = 2,51 \text{ rad}$ d) $x = 0,87 \text{ rad}$

3.11 Verifizieren Sie die Werte aus Tabelle 3.1 durch Anwendung des SATZES VON PYTHAGORAS am rechtwinkligen gleichschenkligen bzw. gleichseitigen Dreiecks.

3.12 Bestimmen Sie (ohne Taschenrechner) aber unter Verwendung von Tabelle 3.1 die Funktionswerte von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ für

a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{3\pi}{4}$ c) $x = \frac{4\pi}{3}$ d) $x = \frac{7\pi}{4}$ e) $\varphi = 120^\circ$

f) $\varphi = 135^\circ$ g) $\varphi = 330^\circ$ h) $\varphi = 210^\circ$ i) $\varphi = 270^\circ$

3.13 Berechnen Sie jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen

a) $\sin \alpha = \frac{24}{25}$ b) $\cos \alpha = \frac{2n}{1+n^2}$ c) $\tan \alpha = \frac{12}{5}$

3.14 Formen Sie mittels Additionstheoremen um:

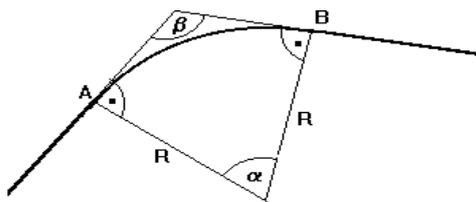
a) $y = \sin\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$ b) $y = \cos\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{x}{2}\right)$ c) $y = \tan(\pi - x)$

d) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ e) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

3.15 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\tan x = 1 - \sqrt{2}$

3.16 Zwei Straßen stoßen im Winkel von $\beta = 108,205^\circ$ aufeinander. Sie sollen durch einen Kreisbogen mit dem Radius $R = 250m$ verbunden werden. Wie lang ist der Bogen \widehat{AB} ?



3.17 Aus einem Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\beta = 128,21^\circ$ und dem Radius $s = 38,2$ cm entsteht durch zusammenrollen ein Kegel. Wie groß ist der Öffnungswinkel γ des Kegels?

3.18 An einem Punkt greifen zwei Kräfte $F_1 = 280$ N und $F_2 = 450$ N an, deren Wirkungslinien den Winkel $\delta = \sphericalangle(F_1, F_2) = 53^\circ 20'$ bilden. Berechnen Sie die resultierende Kraft F_R und den Winkel $\varepsilon = \sphericalangle(F_1, F_R)$.

4. Graphische Darstellung elementarer Funktionen

4.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen $y = f(x)$ und skizzieren Sie ihre Graphen (ohne Erstellung einer Wertetabelle; Funktionen einer Teilaufgabe in einem Koordinatensystem darstellen)

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$; $y = -(\frac{1}{2}x - 1)$; $y = \frac{1}{2}(-x) - 1$

b) $y = -2x + 1,5$; $y = -2(x + 2) + 1,5$; $y = 0,3x - 0,7$

c) $y = 2x^2$; $y = (2x)^2$; $y = 2x^2 - 2$

d) $y = (x - 1)^2$; $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x - 2$

e) $y = \frac{1}{x + 1}$; $y = 3\frac{x}{x + 1}$; $y = \frac{1}{(x + 1)^2}$

f) $y = \sqrt{x + 1}$; $y = -\sqrt{x + 1} + 1$; $y = \sqrt{-x + 1}$

g) $y = \sqrt[3]{x + 2}$; $y = |\sqrt[3]{x + 2} - 1|$; $y = -\sqrt[3]{-x + 2}$

h) $y = \ln(x - 1)$; $y = -\ln(x - 1) + 2$; $y = \ln(1 - x)$

i) $y = 2^{x+1}$; $y = -2^x + 1$; $y = |2^x - 2|$

j) $y = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

k) $y = \sin 2x$; $y = 2 \sin x$; $y = \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$

4.2 Schränken Sie in den folgenden Fällen gegebenenfalls den Definitionsbereich so ein, dass eine bijektive (eindeutige) Funktion entsteht! Geben Sie sodann die Umkehrfunktion an!

a) $y = x^2 + 1$ b) $y = |2x + 4|$ c) $y = 2x^3 + 2$

d) $y = 2 \sin x \cos x$ e) $y = \ln(2x + 3) - 4$

4.3 Stellen Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen als solche mit der natürlichen Basis e dar!

a) $y = 2 \cdot 3^{2x}$ b) $y = 0,3^{4x} - 1$ c) $y = 3 \log_5 x$ d) $y = 2 \lg(3x + 1)$

4.4 Wie unterscheiden sich die Graphen der Funktionen

a) $y = f(x)$ b) $y = f(x) + y_0$ c) $y = f(x - x_0)$ d) $y = f(x - x_0) + y_0$?

4.5 Eine harmonische Schwingung läßt sich durch die Gleichung $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ beschreiben. Dabei ist A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und α die Anfangsphase.

- a) Interpretieren Sie die Größen A , ω und α , indem Sie den Zusammenhang der Bewegung eines Punktes P auf einer Kreisbahn (Radius = A) und der Bewegung seiner Projektion P^* auf der y -Achse herstellen!
- b) Wie beeinflussen die Parameter A , ω und α den Graphen der Sinusfunktion? Skizzieren Sie die Graphen für
- b₁) $A = 1$, $\alpha = 0$, $\omega = 0,5$ bzw. $\omega = 2$
 b₂) $\omega = 1$, $\alpha = 0$, $A = 0,5$ bzw. $A = 2$
 b₃) $A = 1$, $\omega = 1$, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ bzw. $\alpha = \frac{\pi}{6}$

4.6 Welche Periode haben die Funktionen

- a) $y = \sin x + \cos x$ b) $y = \sin x \cdot \cos x$ c) $y = \tan 2x$?

4.7 Welche Anfangstemperatur ϑ_0 darf eine Flüssigkeit in einem Behälter höchstens haben, wenn sie durch eine Rohrschlange mit der konstanten Temperatur $\vartheta_1 = 15^\circ$ in einer dreiviertel Stunde auf 90° und in 2,5 Stunden auf 30° abgekühlt sein soll?

Hinweis: Die Temperaturabnahme vom Anfangswert ϑ_0 auf die Temperatur ϑ_1 des Kühlmediums verläuft exponentiell nach der Gleichung

$$\vartheta = \vartheta_1 + (\vartheta_0 - \vartheta_1) \cdot e^{\kappa t}$$

Dabei ist κ eine Materialkonstante mit der Maßeinheit $[\frac{1}{h}]$.

4.8 a) Bestimmen Sie eine lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_0(1;2)$ und $P_1(3;7)$ geht!

b) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_0(-1;3)$, $P_1(0;-1)$ und $P_2(1;3)$ geht!

4.9 Unter welchem Winkel schneidet die Gerade die positive x -Halbachse?

- a) $y = 2x$ b) $y = 3x + 4$ c) $3(y - 1) = 12x + 5$

5. Differenzieren und Integrieren

5.1 Bestimmen Sie die 1. Ableitung $f'(x)$ folgender Funktionen $f(x)$! Für welche Werte ist sie nicht definiert?

- a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}x^2 + \frac{c}{2}x - 1$ c) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$
 d) $y = (1 - x^{-3})(\frac{1}{x^2} - 2)$ e) $y = \frac{\sin x}{1 + (\cos x)^2}$ f) $y = x \cdot \arcsin x$
 g) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ h) $y = \frac{2x^3 - 3}{x^2}$ i) $y = \frac{\ln x}{x}$
 j) $y = (1 - x^4)^2$ k) $y = (1 - x^4)^{200}$ l) $y = \sin x \cdot 4^x$
 m) $y = 3^{x^2}$ n) $y = (3^x)^2$ o) $y = 2 \sin(\frac{a}{x})$
 p) $y = \frac{1}{2} \arctan \frac{2x}{1-x^2}$ q) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ r) $y = e^x \tan x$
 s) $y = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ t) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ u) $y = x \cdot e^{-x^2}$

5.2 Fassen Sie den analytischen Ausdruck als Funktion der angegebenen Variablen auf und bestimmen Sie die Ableitung bezüglich dieser Variablen!

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } R(\omega) = A \cdot \cos(x + \omega t) & \text{b) } v(R_1) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & \text{c) } s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin(at) \\
\text{d) } A(B) = C \cdot D^B - F \cdot B^D & \text{e) } \varphi(t) = \frac{1}{k} \ln(k\omega_0 t + 1) & \text{f) } v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{2ks}{m}}\right)}, \quad s \geq 0 \\
\text{g) } A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\delta^2\omega^2}} & \text{h) } R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}} & \text{i) } I(n) = zU_q \frac{n}{zR_a + R_i n^2}
\end{array}$$

5.3 Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ an die Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse?

$$\text{a) } y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1 \quad \text{b) } y = \sin(\sqrt{2x}), \quad x_0 = \frac{1}{2} \quad \text{c) } y = x\sqrt{x+1}, \quad x_0 = 3$$

5.4 Weitere Übungen zum Differenzieren:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} & \text{b) } f(x) = \frac{1}{x+1} & \text{c) } f(x) = \frac{x-1}{x^2+4} \\
\text{d) } f(x) = \frac{x-1}{(x^2+4)^2} & \text{e) } f(x) = xe^x & \text{f) } f(x) = \ln(x^2 + 1) \\
\text{g) } f(x) = \frac{x \sin x}{x^2-1} & \text{h) } f(x) = \sqrt{\sin(4x)} & \text{i) } f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}} \\
\text{j) } f(x) = x^{\sin x} & \text{k) } f(x) = \frac{x}{3x-1} + x^2 \sqrt{2x-1} & \text{l) } f(x) = x(\ln x)^2 \\
\text{m) } f(x) = x^2 e^{-x^2} + e^x \cos x & \text{n) } f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} & \text{o) } f(x) = \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \tan \frac{x}{2} \\
\text{p) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2} & \text{q) } f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} & \text{r) } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \\
\text{s) } f(x) = \arcsin \frac{1}{x} & \text{t) } f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} & \text{u) } f(x) = x^{\sqrt{x}} \\
\text{v) } f(x) = \frac{1}{\ln x} & \text{w) } f(x) = \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}} & \text{x) } f(x) = \sqrt[3]{(2x+1)^2} \\
\text{y) } f(x) = e^{ax} \cos(bx) & \text{z) } f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} & \text{a) } f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \\
\text{\beta) } f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) & \text{\gamma) } f(x) = |2x| & \text{\delta) } f(x) = \cos^2 x + \sin|x|
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{5.5 a) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} & \text{b) } \int \frac{x^3}{\sqrt{2x}} dx & \text{c) } \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx \\
\text{5.6 a) } \int \frac{3x-4}{5x^2} dx & \text{b) } \int (2x+3)^2 dx & \text{c) } \int (2e^x - 7 \cos x) dx \\
\text{5.7 a) } \int (6x^2 + \sin 2x) dx & \text{b) } \int \frac{2x + \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}} dx & \text{c) } \int \frac{3e^{2x} + e^x \cos x}{e^x} dx \\
\text{5.8 a) } \int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) dx & \text{b) } \int \frac{dx}{(2-5x)^{100}} & \text{c) } \int \frac{1}{\cos^2(3x+3)} dx \\
\text{5.9 a) } \int \cos^5 x \cdot \sin x dx & \text{b) } \int \frac{\ln x}{x} dx & \text{c) } \int \frac{x dx}{x^2 + 9} \\
\text{5.10 a) } \int xe^{-x^2} dx & \text{b) } \int \frac{3x^2 dx}{(1-5x^3)^3} & \text{c) } \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \\
\text{5.11 a) } \int \frac{(5+x) dx}{x^2 + 10x + 30} & \text{b) } \int x \cos(x^2 + 1) dx & \text{c) } \int \frac{dx}{x \ln x} \\
\text{5.12 a) } \int \frac{e^x dx}{(e^x - 3)^3} & \text{b) } \int \frac{(2x-1) dx}{x^2 - x + 5} & \text{c) } \int \frac{(1-x) dx}{\sqrt{2x-x^2}}
\end{array}$$

5.13 Die folgenden Aufgaben müssen erst durch Umformen auf die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ gebracht werden.

$$\text{a) } \int \frac{x^3 dx}{x^2 + 1} \quad \text{b) } \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \quad \text{c) } \int \sin^3 x \cos^2 x dx$$