FACH HOCH SCHULE JENA

Fachbereich Grundlagenwissenschaften
Grützmann/Puhl
Vorbereitungskurs Mathematik
für Ingenieurstudiengänge

Verwendete Symbole aus Mengenlehre und Logik

$A = \{............\}$	Klammer umfasst die Elemente einer Menge.
$x \in A$	x ist Element der Menge A.
$A \subseteq B$	A ist Teilmenge von B.
$A \cap B$	Durchschnittsmenge von A und B
$A \cup B$	Vereinigungsmenge von A und B
$A \backslash B$	Menge aller Elemente von A, die nicht auch zu B gehören
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$	Menge der reellen, rationalen, ganzen, natürlichen Zahlen
$p \wedge q$	p und q
$p \vee q$	p oder q
$p \Rightarrow q$	Aus p folgt q.
$p \Longleftrightarrow q$	p gilt genau dann, wenn q gilt. (p und q sind äquivalent.)

1. Einfaches Rechnen mit Zahlen und Zahlengrößen

1.1 Reelle Zahlen

Zur **Menge der ganzen Zahlen** $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ ist keine Bemerkung erforderlich. In ihr kann man uneingeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Beachte: Das Produkt aus zwei negativen Zahlen ist positiv!
Das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl ist negativ!
Das Produkt ist dann und nur dann 0, wenn mindestens ein Faktor gleich 0 ist!

Eine **rationale Zahl** entsteht als Quotient zweier ganzer Zahlen, wobei der Nenner (Divisor) nicht gleich 0 sein darf!

Rationale Zahlen können demzufolge als

- gemeine Brüche (z.B.: $\frac{3}{4}$, $\frac{9}{5}$, $-\frac{117}{99}$ usw.) oder als
- endliche Dezimalbrüche (z.B.: $0,75$; $1,8$) oder als
- unendliche, periodische Dezimalbrüche (z.B.: $1,\overline{18} = 1,18181818...$)

dargestellt werden.

Beispiel 1.1:

a) $0,75 = \frac{75}{100}$ b) $1,8 = 1 + \frac{8}{10} = \frac{18}{10}$

c)
$$\begin{aligned} x &= 1,\overline{18} && \text{soll in einen gemeinen Bruch umgewandelt werden.} \\ 100x &= 118,\overline{18} && \text{Multiplikation mit 100, damit das Komma hinter die 1. Periode "rutscht".} \\ 99x &= 117 && \text{Durch die Subtraktion } 100x - 1x \text{ fallen die Nachkommastellen weg.} \\ x &= \tfrac{117}{99} && \text{Das ist das Ergebnis!} \end{aligned}$$

Die **Menge der rationalen Zahlen** wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Nichtperiodische, unendliche Dezimalbrüche (die man sich nur vorstellen, nicht aber aufschreiben kann) sind irrationale Zahlen. Die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen vereinigt man zur **Menge der reellen Zahlen** $\mathbb{R}$. Jeder reellen Zahl kann man einen Punkt auf dem Zahlenstrahl zuordnen (und umgekehrt).

Der **Betrag einer reellen Zahl** a wird wie folgt erklärt:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a, & \text{wenn } a < 0. \end{cases}$$

Beispiel 1.2:
a) $|-5| = |5| = 5$
b) Die Gleichung $|x-3| = 7$ löst man wie folgt:
  1.Fall: $x - 3 \geq 0 \Rightarrow |x-3| = x - 3 = 7 \Rightarrow x = 10,$
  2.Fall: $x - 3 < 0 \Rightarrow |x-3| = -(x-3) = 7 \Rightarrow x = -4.$
Da sowohl $10 - 3 \geq 0$ als auch $-4 - 3 < 0$ gilt, sind $x_1 = 10$ und $x_2 = -4$ die beiden Lösungen.

Summenzeichen $\sum$ und **Produktzeichen** $\prod$ werden zur Abkürzung umfangreicher Summen und Produkte verwendet.

Für das spezielle Produkt $\prod_{j=1}^{n} j = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... n$ schreibt man auch $n!$ (**n-Fakultät**).

Beispiel 1.3:
a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = \sum_{k=1}^{9} k$ b) $4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 = \sum_{i=2}^{9} i^2$
c) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = \prod_{j=1}^{7} j = 7!$ d) $\sum_{i=0}^{4} a_{5-i} \cdot x^{i+2} = a_5x^2 + a_4x^3 + a_3x^4 + a_2x^5 + a_1x^6$

Übungen:
1.1 Formen Sie die folgenden Dezimalbrüche in gemeine Brüche um!
$1,234$ $0,78$ $145,99$ $0,\overline{9}$ $17,18\overline{265}$ $-3,45\overline{46}$

1.2 Berechnen Sie die folgenden Summen und Produkte!
a) $\sum_{k=-3}^{2} (2k+1)$ b) $\sum_{u=0}^{4} 2u^3$ c) $\sum_{r=0}^{2} (2r)^3$ d) $\sum_{i=2}^{6} 3$ e) $\sum_{m=N}^{N+3} (2N - m)$
f) $\sum_{r=0}^{N} \left(\frac{1}{2}\right)^r$ g) $\sum_{k=0}^{N} q^k$ h) $\sum_{m=0}^{N} (a + m \cdot d)$ i) $\sum_{m=0}^{2} \sum_{k=1}^{3} (k - 2m)$

j) $\prod_{j=2}^{5}(j+1)$ k) $\prod_{k=-8}^{16} k^7$ l) 8! m) 10!

1.2 Rationales Rechnen mit "Klammerausdrücken"

1.2.1 Auflösung von Klammern

Die Reihenfolge von Rechenoperationen wird durch **Klammersetzung** festgelegt. Um Klammern zu sparen, vereinbart man:
Multiplikation bzw. Division werden **vor** der Addition bzw. Subtraktion ausgeführt.

"Punktrechnung" geht vor "Strichrechnung"

Potenzen werden **vor** allen anderen Rechenoperationen ausgeführt.
Die **Auflösung der Klammern** erfolgt schrittweise "*von innen*" <u>oder</u> "*von außen*".
Beim Auftreten von Mehrfachklammern ist es zweckmäßig, verschiedene Klammertypen (runde, eckige, geschweifte) zu verwenden.

Beispiel 1.4: Man löse die Klammern auf und vereinfache!
a) $6x - [(3-5x)-(7-2x)] + [4x-(2x+1)]$
Auflösung "von innen" ergibt:

$$\begin{aligned} 6x - [(3-5x)-(7-2x)] + [4x-(2x+1)] &= \\ 6x - [3-5x-7+2x] + [4x-2x-1] &= \\ 6x - [-4-3x] + [2x-1] &= \\ 6x+4+3x+2x-1 &= 11x+3 \end{aligned}$$

Auflösung "von außen" ergibt:

$$\begin{aligned} 6x - [(3-5x)-(7-2x)] + [4x-(2x+1)] &= \\ 6x-(3-5x)+(7-2x)+4x-(2x+1) &= \\ 6x-3+5x+7-2x+4x-2x-1 &= 11x+3 \end{aligned}$$

b) $12u - 2\{3v - 4[u-2-3(2v-3u)]\} = 12u - 2\{3v-4[u-2-6v+9u]\} =$
$= 12u - 2\{3v-4[10u-2-6v]\} = 12u - 2\{3v-40u+8+24v\} =$
$= 12u - 2\{27v-40u+8\} = 12u-54v+80u-16 = 92u-54v-16$

1.2.2 Ausmultiplizieren

Produkte werden unter Verwendung des *Distributivgesetzes* ausmultipliziert. Setzen Sie zur Vermeidung von Vorzeichenfehlern das berechnete **Produkt in Klammern**! Beachten Sie auch, ob die **Binomischen Formeln** anwendbar sind.

1.Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
2.Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$
3.Binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2-b^2$

Wichtig ist, dass man diese Formeln sowohl von links nach rechts als auch umgekehrt versteht *und anwenden kann*!

Beispiel 1.5: a) $2x-(x-1)(-2x+1) = 2x-(-2x^2+x+2x-1)$
$= 2x-(-2x^2+3x-1) = 2x+2x^2-3x+1 = 2x^2-x+1$
b) $(a^2+b^2)-(a-b)^2 = a^2+b^2-(a^2-2ab+b^2) = a^2+b^2-a^2+2ab-b^2 = 2ab$

1.2.3 Faktorisieren

Eine algebraische Summe in ein Produkt von Faktoren zu zerlegen, ist i.a. recht schwierig oder gar nicht möglich.

Vorgehensweise:
- Versuchen Sie, gemeinsame Faktoren zu finden und auszuklammern!
- Versuchen Sie, **Binomische Formeln** wiederzuerkennen!
- Versuchen Sie folgende **Zerlegung in Linearfaktoren** anzuwenden:
$x^2+px+q = (x-x_1)(x-x_2)$, wobei x_1, x_2 die (reellen) Nullstellen der quadratischen Funktion sind.!

Beispiel 1.6: a) Man zerlege $2ax-5ay+a-2bx+5bx-b$ in Faktoren.
Lösung: Wir suchen gemeinsame Faktoren, um zu sehen, was passiert
$2ax-5ay+a-2bx+5by-b = a(2x-5y+1)-b(2x-5y+1) = (a-b)(2x-5y+1)$.
Auch folgende Variante führt zum Erfolg
$2ax-5ay+a-2bx+5by-b = 2x(a-b)-5y(a-b)+a-b = (2x-5y+1)(a-b)$.

b) Man zerlege $4x^2-9y^4$ in Faktoren!
Lösung: Hier kommt es darauf an, die Struktur der binomischen Formel
$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$ mit $a = 2x$ und $b = 3y^2$
zu erkennen; somit erhält man die Lösung $4x^2-9y^4 = (2x)^2-(3y^2)^2 = (2x-3y^2)(2x+3y^2)$.

c) Man zerlege $2x^2+3x+1$ in Faktoren.
Lösung: Es gilt: $2x^2+3x+1 = 2(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2})$. Da es sich um einen quadratischen Term handelt, bietet sich obige Zerlegung in Linearfaktoren an.
Bestimmung der Nullstellen:
$x_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$
$\Rightarrow x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 2x^2+3x+1 = 2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right) = 2(x-(-1))\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 2(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

Bemerkung:
Verwenden Sie, um Vorzeichenfehler zu vermeiden, Klammern, und lösen Sie diese dann auf. Ausdrücke der Form

’ $x--1$ ’ oder gar der Klassiker ’ $x\cdot-1$ ’

kann noch nicht einmal ein Computer verstehen !!!

1.2.4 Kürzen

Gebrochene Ausdrücke können oftmals durch **Kürzen** vereinfacht werden. Zähler und Nenner müssen allerdings als Produkte vorliegen!!!

”Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen”

Beispiel 1.7:
a) Man vereinfache den folgenden Ausdruck: $\frac{4x^2-6x-4}{2x^2-x-1}$.
Faktorisierung (s.o.) von Zähler und Nenner ergibt:

$$\frac{4x^2-6x-4}{2x^2-x-1} = \frac{4(x^2-\frac{3}{2}x-1)}{2(x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})} = \frac{4(x-2)(x+\frac{1}{2})}{2(x+\frac{1}{2})(x-1)} = 2\frac{x-2}{x-1}.$$

b) Man kürze folgenden Ausdruck: $\frac{mv+m-v-1}{m^2-1}$.
Faktorisierung ergibt: $\frac{mv+m-v-1}{m^2-1} = \frac{m(v+1)-(v+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{(m-1)(v+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{(v+1)}{(m+1)}$.

1.2.5 Addition gebrochener Ausdrücke

Um gebrochene Ausdrücke zu addieren (bzw. subtrahieren) muß man sie **gleichnamig** machen. (**Hauptnenner** suchen!)

Beispiel 1.8:
Man stelle den Ausdruck $\frac{2}{1-a} - \frac{a}{a+1}$ als einen Bruch dar.

$$\frac{2}{1-a} - \frac{a}{a+1} = \frac{2(a+1)}{(1-a)(a+1)} - \frac{a(1-a)}{(a+1)(1-a)} = \frac{2(a+1)-a(1-a)}{(1-a)(a+1)} = \frac{2a+2-a+a^2}{1-a^2}$$
$$= \frac{a+2+a^2}{1-a^2}$$

1.2.6 Ausdrücke substituieren

Wenn man einen mehrgliedrigen Ausdruck in einen anderen Ausdruck einsetzt, verwendet man **prinzipell Klammern** und löst diese anschließend auf und vereinfacht den Ausdruck.

Beispiel 1.9:
$x = 1 - \frac{1}{a}$ soll in $x^2 - x + 1$ eingesetzt und vereinfacht werden.

$$x^2 - x + 1 \overset{x=1-\frac{1}{a}}{=} \left(1-\frac{1}{a}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{a}\right) + 1 = \left(1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}\right) - 1 + \frac{1}{a} + 1 = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}$$
$$= \frac{a^2-a+1}{a^2}$$

1.2.7 Definitionsbereich von Termen

Wir beginnen mit einem Beispiel und betrachten den Term $T(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$.
In der Regel wird beim Hinschreiben eines solchen Terms stillschweigend schon vorausgesetzt, dass die Variable x zu der Grundmenge $\mathbb{R}$ gehören soll und nur solche $x \in \mathbb{R}$ zugelassen sind, für die der Term $T(x)$ sinnvoll gebildet werden kann. Man spricht vom *Definitionsbereich*. Am obigen Beispiel wäre der Definitionsbereich somit $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$, da man bekanntlich nicht durch Null dividieren kann. Wenn man den Zähler in ein Produkt zerlegt und anschließend kürzt, erhält man

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = x+3.$$

Jetzt könnte man glauben, der Term $T(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ sei doch für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Weit gefehlt, denn $S(x) = x+3$ stellt einen <u>anderen</u> Term dar, der natürlich den Definitionsbereich $\mathbb{R}$ hat. **Der Definitionsbereich ist Bestandteil des Terms, auch wenn er nicht explizit angegeben**

ist! Offensichtlich gilt allerdings $T(x) = S(x)$ für $x \neq 2$.

Definition:

Die Elemente der Grundmenge $\mathbb{R}$, für die ein Term $T(x)$ sinnvoll erklärt ist, bilden den *natürlichen Definitionsbereich* des Terms.

Wir vereinbaren: Wird kein Definitionsbereich explizit angegeben, dann wird der natürliche Definitionsbereich vorausgesetzt. Zur Bestimmung des natürlichen Definitionsbereiches überprüfe man z.B., ob

- bei Brüchen der Nenner $= 0$
- bei Wurzeln der Radikand < 0
- bei Logarithmen der Term unter dem Logarithmus ≤ 0

werden kann. Diese Fälle muss man ausschließen!

Beispiel 1.10:
a) Man bestimme den Definitionsbereich von $T(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4} + \ln(x+1)$.
Lösung: Alle Einzelterme müssen gleichzeitig definiert sein.
Definitionsbereich des 1. Summanden:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \neq 2\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 2\}.$$

Definitionsbereich des 2. Summanden:

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x > -1\} = (-1, +\infty).$$

$\Rightarrow$ Definitionsbereich von $T(x)$:

$$\begin{aligned} D = D_1 \cap D_2 &= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x \neq -2 \wedge x \neq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -1 \wedge x \neq 2\} = (-1, 2) \cup (2, +\infty). \end{aligned}$$

b) Man bestimme den Definitionsbereich von $T(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2-x}$.
Lösung: Definitionsbereich des 1. Faktors:

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\} = [-1, +\infty).$$

Definitionsbereich des 2. Faktors:

$$D_2 = \{x \in \mathbb{R} : 2 - x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \geq x\} = (-\infty, 2].$$

$\Rightarrow$ Definitionsbereich von $T(x)$: $D = D_1 \cap D_2 = [-1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = [-1, 2]$.

Übungen
1.4 Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie:

a) $(16p + 2q) - (5p - 7q)$ b) $3(a + b + c) - 5(a + b) - 2(b - c - a)$

c) $x^9 - \left(x^{3^2} - (x^3)^2\right)$ d) $20m - [(4m + 2n) + (6m - n)]$

e) $100 - [(b + 20) - (40 - b)]$ f) $[3a - (4b + 2x)] - [(3x + 3b) - (4x - 2a + b)]$

1.5 Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $(5u - (2u - 3))(u - (1 - u))$ b) $(a + 4)(a - 2) - (a + 2)(a - 1)$

c) $x^3 - y^3 - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ d) $3x - (x - 2)(-2x - 1)$

e) $[a(a^2 + a - 1) - a^2(a + 1)] \cdot 5$ f) $14(3s + 4t) - 8(5s - 3t)$

1.6 Wenden Sie die binomischen Formeln an und vereinfachen Sie nach Möglichkeit.

a) $(-a-b)(a-b)$ b) $(4a^2-3)(4a^2+3)-(3a-4)^2+(5a+1)^2$

c) $(3b+2)^2-(5b-3)^2$ d) $(2x-3y)(3y+2x)-(x-2y)^2$

1.7 Klammern Sie gemeinsame Faktoren aus:

a) $2u(u+v)-(u-v)(u+v)$ b) $192x^2y^2+216x^3y-144xy^2$

c) $3(2x+3)^2(a-b)^3-4(6+4x)(b-a)^5$ d) $x^2-3x+xy-3y$

1.8 Zerlegen Sie unter Verwendung binomischer Formeln folgende Summen in Faktoren:
a) $196x^2-169y^2$ b) $(2m-n)^2-(n+2m)^2$ c) $-25x^2-100y^4+100xy^2$

1.9 Zerlegen Sie folgende Summen in Faktoren:

a) $x^2-7x+10$ b) $12x^2-96x-780$

c) $x^2+4ax+4a^2-9b^2$ d) $2u^2-ua-6a^2$

1.10 Kürzen Sie soweit wie möglich

a) $\dfrac{204a^2b^3c}{255ab^2c^3}$ b) $\dfrac{5(x-2)}{5x-2}$ c) $\dfrac{288x-288y}{432(y^2-x^2)}$

d) $\dfrac{2a+a^2+1}{2a^2-2}$ e) $\dfrac{x^3+x^2y+xy^2+y^3}{x^2+y^2}$

1.11 Fassen Sie zu einem Bruch zusammen:

a) $\dfrac{3}{4a}-\dfrac{2}{5b}$ b) $\dfrac{2x-3}{x^2(x+1)}-\dfrac{3-4x}{x(x+1)^2}$

c) $\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{a}{(x-a)^2}+\dfrac{a}{x^2-a^2}-1$ d) $\dfrac{m}{m+n}+\dfrac{2mn}{m^2-n^2}-\dfrac{n}{m-n}$

1.12 Setzen Sie den Ausdruck A in den Ausdruck B ein und vereinfachen Sie:

	A	B
a)	$x=y+1$	$x-xy$
b)	$y=\frac{1}{x}-1$	$x-xy$
c)	$x=\frac{1}{y}-y$	$-\frac{2(y^2-1)}{x^2}$
d)	$x=z-\frac{1}{z}$	$x+\frac{2}{x}$

1.13 Bestimmen Sie den Definitionsbereich der folgenden Terme:

a) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x}$ b) $-\ln(1-x)$ c) $\ln\left(\sqrt{x-1}-1\right)$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x^2-2x+1}$ e) $\dfrac{x+1}{\ln(x+1)}$ f) $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{\sqrt{-x^2+2}}$

1.3 Potenzen und Wurzeln

Für Potenzen gelten die Rechengesetze

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad \boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}} \qquad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$$

Typische Fehler: $2^n + 3^n = 5^n$ **Was ist falsch**?
$(a+b)^n = a^n + b^n$ **Was ist falsch**?

Man beachte stets den Unterschied zwischen $a^{n^m} = a^{(n^m)}$ und $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$!

Beim Rechnen mit Wurzeln braucht man keine neuen Gesetze zu lernen, wenn man jede **Wurzel als eine Potenz mit gebrochenem Exponenten** versteht!

Beispiel 1.11: $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^9}} = \left((a^9)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{9 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \qquad (a \geq 0)$

Übungen

1.14 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich. Wie müssen die auftretenden Größen beschaffen sein, damit die Terme erklärt sind?

a) $2^3 - (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^3$ b) $(-x)^4 + (-2a)^4 - 2a^4 + (-3x)^4$

c) $18(a-1)^3 - 3(1-a)^3 - 16(a-1)^3 - 4(1-a)^3 + 3(1-a)^3$

d) $\dfrac{a^{x+3} \cdot b^{x+1} \cdot a^{3+x} \cdot b^{3x-1}}{a^{x+1} \cdot b^{x-2} \cdot a^{3-x} \cdot b^x}$ e) $\dfrac{a^{2n+x} \cdot b^{3n-x}}{a^{2n-x} \cdot b^{n+2x}} : \dfrac{x^{n+1} \cdot y^{2n-3}}{x^{2n-1} \cdot y^{3n+2}}$

f) $\dfrac{15ax^3 \cdot 3b^n(x-1)^2}{2by^3 \cdot 10a^n(x+1)^2} : \dfrac{3b^{n-1}(1-x)^3}{8a^{n+1}(1+x)^2}$ g) $\left(\frac{a^2x^2}{3b^2y^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^3x^2}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9a^3y^6}{8b^3x^3}\right)^2$

h) $\sqrt[3]{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^3 \cdot \sqrt{a}}}$

1.15 Stellen Sie in der Wurzelschreibweise dar!

a) $x^{-\frac{3}{4}}$ b) $(32a^5b^{10})^{\frac{2}{5}}$ c) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{4}{8}}$ d) $9^{0,9}$ e) $a^{-0,33}$

f) $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$ g) $\left(c^{-\frac{2}{5}}\right)^{-\frac{3}{2}}$ h) $a^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}}$ i) $27^{-0,\overline{3}}$ j) $5^{0,\overline{9}}$

1.16 Man schreibe die Terme nur mit positiven Exponenten!

a) $x^{-4} \cdot a^3 \cdot b^{-2} : u^{-5}$ b) $\dfrac{a^{-2}b^{-3}c^4d}{a^5b^{-2}c^{-3}d^2}$ c) $\dfrac{(4a)^{-1} \cdot (2b)^3}{(2c)^{-2} \cdot 8b^{-1}}$

1.17 Man schreibe die Terme ohne Wurzelzeichen!

a) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ b) $\dfrac{a^3\sqrt[3]{a^5}\,b}{\sqrt{ab}}$ c) $\sqrt[4]{xy^3} \cdot \sqrt[6]{x^3y}$

d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})\sqrt{z}$ e) $\sqrt[7]{x^{28}y^6}$ f) $a^2\sqrt{b} - b^2\sqrt{a}$

1.18 Man vereinfache!

a) $\left(\sqrt[3]{a^{15}}\right)^{\frac{3}{2}}$ b) $\left(\sqrt[4]{3ab^2}\right)^{\frac{3}{3}} \cdot \left(\sqrt[8]{27a^{-2}b^5}\right)^{\frac{3}{2}}$

c) $5a^3 - (2a)^3 + (3ab)^3$ d) $\sqrt{\dfrac{(4x^2y^3z)^{-2}}{(8xz^6)^{-3}}}$

1.19 Man schreibe die Ausdrücke ohne Bruchstrich und ohne Wurzelzeichen

a) $\frac{8xya^2b^7}{4ab^{15}x^2y^3}$ b) $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}}$ c) $\frac{ab\sqrt{c}}{\sqrt{ab}\,c}$

d) $\frac{(a+b)^6\cdot c^5}{3c^7(a+b)^{13}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[4]{81a}}$ f) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a+b}}$

1.4 Logarithmen

In der Gleichung $b^c = a$ wird der Exponent c als **Logarithmus von a zur Basis b** bezeichnet.
Schreibweise: $c = \log_b a$
Wegen der Äquivalenz

$$c = \log_b a \Longleftrightarrow b^c = a \qquad (a > 0,\ b > 0,\ b \neq 1)$$

kann man alle Logarithmengesetze aus den Potenzgesetzen herleiten:

Trivial: $\boxed{\log_b 1 = 0}$, denn $b^0 = 1$

1.Gruppe:

$\boxed{\log_b(x\cdot y) = \log_b x + \log_b y}$ $\boxed{\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b x - \log_b y}$ $\boxed{\log_b(x^y) = y\cdot\log_b x}$

2. Gruppe:

$\boxed{\log_b d = \frac{1}{\log_d b}}$ $\boxed{\log_b a = \frac{\log_d a}{\log_d b} = \log_b d\cdot\log_d a}$

Man beachte: Ein Logarithmus kann nur **von einer positiven Zahl** gebildet werden und zwar **zu einer ebenfalls positiven Basis**, die aber nicht 1 sein darf!

Von besonderer Bedeutung sind in der Praxis
- der dekadische Logarithmus (Basis = 10): $\lg x = \log_{10} x$
- der natürliche Logarithmus (Basis = e): $\ln x = \log_e x$ ($e = 2{,}718...$ ist die Eulersche Zahl)

Beispiel 1.12:
a) $\log_2 16 = 4$, denn $2^4 = 16$
b) $\log_3 \frac{1}{9} = -2$, denn $3^{-2} = \frac{1}{9}$
c) $\ln(e^{3x}) = \log_e e^{3x} = 3x$, denn $e^{3x} = e^{3x}$

Beispiel 1.13: (Anwendung der 1. Gruppe auf Produkte, Quotienten u. Potenzen bzw. Wurzeln)

$$\ln\frac{2\sqrt{a+b}\cdot a^3b^2}{\sqrt[3]{c}\cdot(a+c)^2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\ln(a+b) + 3\ln a + 2\ln b - \tfrac{1}{3}\ln c - 2\ln(a+c)$$

Beispiel 1.14: (Umrechnung beliebiger Logarithmen auf solche mit gewünschter Basis mittels Gruppe 2)
a) $\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3} = \frac{\lg 7}{\lg 3}$ b) $\ln x = \frac{\lg x}{\lg e} = \ln 10\cdot\lg x \approx 2{,}3026\lg x$
c) $\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \lg e\cdot\ln x \approx 0{,}43429\ln x$

Beispiel 1.15: (Auflösen von Exponentialgleichungen)

$$\left(\frac{3}{8}\right)^{3x+4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x+1}$$

$$(3x+4)\ln\tfrac{3}{8} = (2x+1)\ln\tfrac{4}{5}$$

$$x = \frac{\ln\frac{4}{5} - 4\ln\frac{3}{8}}{3\ln\frac{3}{8} - 2\ln\frac{4}{5}} = -1,4823$$

Beispiel 1.16: (Weitere Umformungsbeispiele)

a) $\lg 3 + \lg\frac{1}{3} = \lg\left(3\cdot\frac{1}{3}\right) = \lg 1 = 0$

b) $\lg\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{2}\lg\frac{1}{10} = \frac{1}{2}\lg 10^{-1} = \frac{1}{2}(-1)\lg 1 = -\frac{1}{2}$

c) $\ln(\sqrt{e})^3 = \ln e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\ln e = \frac{3}{2}$ d) $\lg 20 = \lg(2\cdot 10) = \lg 2 + \lg 10 = \lg 2 + 1$

e) $3\cdot 10^{-2\lg 3} = 3\cdot 10^{\lg 3^{-2}} = 3\cdot 3^{-2} = \frac{1}{3}$

f) $\frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg(xy) - \lg y = \lg\sqrt{x} + \lg\sqrt{xy} - \lg y = \lg\left(\frac{\sqrt{x}\sqrt{xy}}{y}\right) = \lg\frac{x\sqrt{y}}{y} = \lg\frac{x}{\sqrt{y}}$

g) $\log_2 100 = \frac{\lg 100}{\lg 2} = \frac{2}{\lg 2}$ h) $2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2}$

Beispiel 1.17: (Formelumstellungen)

a) Das Zerfallsgesetz für radioaktive Kerne $N = N_0 e^{-\lambda t}$ soll nach λ umgestellt werden

$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$ (Potenz mit Variablen λ isoliert)

$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{t}\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$

b) Die Gleichung für die allgemeine Zustandsänderung eines Gases $\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$ soll nach n umgestellt werden.

$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n \Rightarrow \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = n\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = \frac{\ln p_1 - \ln p_2}{\ln V_2 - \ln V_1}$

c) Man stelle $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ nach x um.

$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y - e^x + e^{-x} = 0$

$\Rightarrow 2y - e^x + \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow 2ye^x - (e^x)^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$ (quadratische Gleichung für e^x)

$\Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$,

da $e^x > 0$, kommt aber nur die Lösung $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$ in Betracht.

$\Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{1 + y^2}\right)$

d) Die Gleichung für den Wellenwiderstand von Koaxialkabel $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{D}{d}$ soll nach d aufgelöst werden.

$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{2\pi}\ln\frac{D}{d} \Rightarrow \ln\frac{D}{d} = 2\pi Z_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$

$\Rightarrow \frac{D}{d} = e^{2\pi Z_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}} \Rightarrow d = D\cdot e^{-2\pi Z_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}}$

Übungen

1.20 Ermitteln Sie durch einfaches Überlegen (also ohne Taschenrechner) die folgenden Logarithmen!

$\log_3 27$	$\log_{0,5} 0,125$	$\log_6 216$	$\lg 1000$	$\log_{3,5} 1$
$\ln 1$	$\ln e^2$	$\log_{16} 4$	$\log_2\frac{1}{8}$	$\log_3\sqrt{27}$
$\log_{22} 1$	$\log_2\frac{1}{2}$	$\lg 0,001$	$\ln\sqrt{e}$	$\log_{0,5} 8$

1.21 Bestimmen Sie - falls möglich - die Unbekannte x aus den Gleichungen!

a) $2^x = 64$ b) $2^x = \frac{1}{8}$ c) $\log_x 1024 = 10$ d) $\log_x 0,1 = -1$

e) $\log_7 49 = x$ f) $\log_3 x = 4$ g) $2\ln x = \ln 4$ h) $0,5\ln x = 2\ln(a+2)$

i) $1 + 3\lg x = 2,2$ j) $\lg(3x-1) = 0,301$ k) $\lg x^6 = \lg x^3 + 6$ l) $2^{\lg x} = 2\cdot 3^{\lg x}$

m) $\lg(\sqrt{ax}+1) + \lg(\sqrt{ax}-1) - 2\lg(ax-1) - 1 = 0$

n) $\ln(a^2+ab+b^2) + \ln(a-b) - \ln(a^3-b^3) + \ln x = 0$

o) $2^{3(x-1)} = 8^{x-1}$ p) $7^{\frac{2}{x}} = 343^{\frac{1}{3}(x-1)}$ q) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 10000$

r) $\sqrt{a^{4-3x}}\cdot\sqrt[3]{a^{x+2}}\cdot\sqrt[4]{a^{5x-2}}\cdot\sqrt[5]{a^{5-2x}} = 1$ s) $\sqrt[x-m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{x-n}}$ t) $\sqrt{a^{6(2-x)}} = a^{2(2x+3)}$

u) $\frac{1}{4}\lg x^5 + 3\lg\sqrt{x} - 3\lg\sqrt[4]{x} = 2(\lg 2 + \lg 3)$

v) $\lg 5^x + \lg 2^x - 1 = 0$ w) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$ x) $\log_2[2 + \log_3(x+3)] = 0$

1.22 Formen Sie die Ausdrücke so um, dass nur noch *ein* Logarithmus *eines* Argumentes entsteht!

a) $\lg 1 + \lg 5 - \lg a$ b) $\ln a - \ln b + \ln c$ c) $2\ln x - 3\ln y - 5\ln(x+y)$

d) $\frac{1}{2}\lg a + 2\lg c - \frac{1}{3}(\lg b^3 + \lg a^{\frac{3}{2}})$ e) $\frac{1}{2}\ln(a^2-2ab+b^2) - \frac{1}{2}\ln(a-b)$

f) $\frac{1}{3}\lg a + \frac{1}{3}\lg(ab) - \lg b$ g) $\frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) - \frac{1}{3}\ln(a-b) - \frac{1}{3}\ln(a+b)$

h) $\frac{1}{2}\ln 16 + \frac{1}{3}\ln 8$ i) $-3\lg a - \frac{1}{3}\lg b$ j) $\lg\sqrt{a^2-b^2} - \frac{1}{3}\lg(a-b) - \frac{1}{3}\lg(a+b)$

1.23 Nach wievielen Jahren hat sich ein mit 6% Jahreszins angelegtes Kapital verdoppelt? (Die Zinsen werden dem Konto gutgeschrieben und mit verzinst.)

1.24 Stellen Sie folgende Ausdrücke in der Form $e^{T(x)}$ dar:

a) 3^x b) $2^x x^2$ c) x^x

1.25 Stellen Sie die Formeln um

a) $I = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$ nach t b) $\varphi = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^y$ nach y

c) $E = \dfrac{U}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$ nach r_2 d) $p_s = 20\lg\left(\frac{U_x}{U_0}\right)$ nach U_x

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Grundform der *linearen Gleichung mit einer Unbekannten*:

$$A\cdot x = b, \quad (A, b \in \mathbb{R})$$

Lösungstheorie:

<u>1.Fall :</u> $A \neq 0$	$\Rightarrow$	$x = A^{-1} \cdot b = \frac{b}{A}$	genau eine Lösung
<u>2.Fall :</u> $A = 0$	$\Rightarrow$	falls $b \neq 0$:	keine Lösung
d.h. $(0 \cdot x = b)$		falls $b = 0$:	jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung !

Bemerkung: Um die Gleichung $A \cdot x = b$ zu lösen, dividiert man bekanntlich durch A. Das ist aber nur möglich, wenn $A \neq 0$ ist !!! Daher sind die Fallunterscheidungen notwendig.

Überprüfen Sie bei jeder Division, ob möglicherweise
eine (*versteckte*!) *Division durch Null vorliegen könnte*!

Beispiel 2.1: Man löse die Gleichung $3(2x-1)+c = 2x-3-c$ nach x auf.
$6x-3+c = 2x-3-c \iff 6x-2x = -2c \iff x = -\frac{c}{2}$

Beispiel 2.2:
Man löse die Gleichung $\frac{x}{a} - \frac{a-x}{2bc} + \frac{a-x}{3c} = 1 \qquad (a,b,c \neq 0)$ nach x auf.

$$\frac{x(6bc)-(a-x)(3a)+(a-x)2ab}{6abc} = 1 \iff 6bcx - 3a^2 + 3ax + 2a^2b - 2abx = 6abc$$

$$\overset{\text{Ordnen}}{\iff} 6bcx + 3ax - 2abx - 3a^2 + 2a^2b = 6abc \iff (6bc+3a-2ab)x = 6abc + 3a^2 - 2a^2b$$

(Erkennen Sie die Grundform $A \cdot x = b$ wieder?)

$$\iff (6bc+3a-2ab)x = a(6bc+3a-2ab) \overset{6bc+3a-2ab\neq 0}{\iff} x = \frac{a(6bc+3a-2ab)}{6bc+3a-2ab} = a$$

Zusammengefaßt erhält man als Lösung: $x = \begin{cases} a & \text{falls } 6bc+3a-2ab \neq 0 \\ \text{beliebig,} & \text{falls } 6bc+3a-2ab = 0 \end{cases}$

Der Fall $6bc+3a-2ab = 0$ wird oft übersehen!!!
Beispielsweise wird für $a = b = 1; c = -\frac{1}{6}$ die 2.Bedingung erfüllt und somit kann x eine beliebige reelle Zahl, z.B $x = 2 \neq a,$ sein.
Es ist also stets erhöhte Aufmerksamkeit geboten, wenn durch einen Ausdruck dividiert wird, der Parameter oder gar die gesuchte Größe enthält.

Übungen
2.1 Lösen Sie folgende lineare Gleichungen nach x auf:

a) $\frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1$ b) $\frac{1}{x} + a = \frac{a}{x} + 1$

c) $(x+1)(x+a)+b = 2a+(x+2)(x+b)$ d) $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}$ e) $\frac{2x-a}{x-b} = 1$

2.2 Lösen Sie folgende Formeln nach den angegebenen Größen auf:

a) $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ nach v_0 und g b) $v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$ nach s_1 und t_1

c) $E_{\text{pot}} = mg(h_2 - h_1)$ nach h_2 und h_1 d) $C = 4\pi K \cdot \frac{R_1 R}{R_1 - R}$ nach R und R_1

e) $m_2 = m_1 \frac{1+\lambda_1 \Delta t}{1+\lambda_2 \Delta t}$ nach Δt und λ_2

2.3 Durch einen Rohrbruch wurde ein Keller überflutet und wird durch die Feuerwehr mittels dreier gleichmäßig und gleichzeitig arbeitender Pumpen leergepumpt. Wieviel Minuten werden dazu benötigt, wenn durch die erste Pumpe allein 6 Stunden, durch die zweite 4 Stunden und durch die dritte 2 Stunden benötigt würden?

2.4 Die Spitzengruppe eines Radrennens habe eine Länge von insgesamt 50m. Sie fährt mit einer Geschwindigkeit von $45\frac{\text{km}}{\text{h}}$ über eine 425m lange Brücke. Welche Zeit benötigt sie dazu?

2.5 Von drei parallelgeschalteten Widerständen ist der zweite doppelt so groß wie der erste und der dritte dreimal so groß wie der zweite. Wie groß sind die drei Widerstände zu wählen, damit der Gesamtwiderstand 12kΩ beträgt?

Grundformen der *linearen Ungleichung mit einer Unbekannten*:

$$A \cdot x \le b \text{ oder } A \cdot x \ge b, \quad (A, b \in \mathbb{R})$$

$A \cdot x \ge b$ kann durch Multiplikation mit -1 in die erste Form überführt werden.
Lösungstheorie für $A \cdot x \le b$:

1. Fall:	$A > 0$	$\Rightarrow$	$-\infty < x \le \frac{b}{A}$	als Lösungsmenge
2. Fall:	$A < 0$	$\Rightarrow$	$\frac{b}{A} \le x < \infty$	als Lösungsmenge
3.Fall:	$A = 0 \wedge b \ge 0$	$\Rightarrow$	$\mathbb{R}$	als Lösungsmenge
	$A = 0 \wedge b < 0$	$\Rightarrow$	$\emptyset$	also keine Lösungen

Bemerkung:
Es gelten die Bemerkungen zu linearen Gleichungen mit dem Zusatz, dass bei Division durch eine negative Zahl bzw. Multiplikation mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umzukehren ist (aus $\le$ wird $\ge$, bzw. aus $\ge$ wird $\le$).

Beispiel 2.3:
Man löse die Ungleichung $3(2x-1)+c \le 2x-3-c$, nach x auf.
$6x-3+c \le 2x-3-c \iff 4x \le -2c \iff x \le -\frac{c}{2}$

Beispiel 2.4:
Man löse die Ungleichung $\frac{x}{a} - \frac{a-x}{2} + \frac{a-x}{3} \ge 1 \qquad (a \ne 0)$ nach x auf.
$\frac{6x-(a-x)\cdot 3a+(a-x)\cdot 2a}{6a} \ge 1$
Fall 1: $a > 0 \Rightarrow$
$6x-3a^2+3ax+2a^2-2ax \ge 6a \overset{\text{Ordnen}}{\iff} 6x+3ax-2ax-3a^2+2a^2 \ge 6a$
$\iff (6+a)x \ge 6a+a^2 \iff (6+a)x \ge a(6+a) \Rightarrow x \ge a,$ da $6+a > 0$
$\Rightarrow$Teillösungsmenge $L_1 = [a, \infty)$
Fall 2: $a < 0 \Rightarrow$
$6x-3a^2+3ax+2a^2-2ax \le 6a \overset{\text{Ordnen}}{\iff} 6x+3ax-2ax-3a^2+2a^2 \le 6a$
$\iff (6+a)x \le 6a+a^2 \iff (6+a)x \le a(6+a)$
Fall 2a: $a > -6 \Rightarrow x \le a$ $\Rightarrow$Teillösungsmenge $L_{2a} = (-\infty, a]$
Fall 2b: $a < -6 \Rightarrow x \ge a$ $\Rightarrow$Teillösungsmenge $L_{2b} = [a, \infty)$

Zusammengefaßt erhält man als Lösungsmengen:

$[a, \infty)$ wenn $a > 0 \vee a < -6$

$(-\infty, a]$ wenn $-6 < a < 0$

Übungen
2.6 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Ungleichungen!

a) $\frac{2x+1}{2}+\frac{3x+1}{4}+\frac{5x+1}{8}\le 1$ b) $\frac{1}{x}+a<\frac{a}{x}+1$

c) $(x+1)(x+a)+b\ge 2a+(x+2)(x+b)$ d) $\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\le\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{x}}$

2.2 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen

2.2.1 Quadratische Gleichungen

Eine quadratische Gleichung hat die Form

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0)$$

Wegen $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a(x^2+px+q)=0$ mit $p=\frac{b}{a}$ und $q=\frac{c}{a}$ kann sie immer auf die **Normalform** der *quadratischen Gleichung*

$$\boxed{x^2+px+q=0}$$

zurückgeführt werden.
Lösungstheorie:
Die quadratische Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

hat genau zwei Lösungen

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

1.Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0\Rightarrow x_1\neq x_2$ zwei verschiedene relle Lösungen (Wurzeln)
2.Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0\Rightarrow x_1=x_2$ eine reelle Doppelwurzel
3.Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0\Rightarrow$ Es existiert keine reelle Lösung, **aber** im Bereich der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erhält man ein Paar konjugiert komplexer Lösungen

$$x_1=-\frac{p}{2}+j\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2} \text{ und } x_2=-\frac{p}{2}-j\sqrt{q-\left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

In diesem Zusammenhang erinnern wir an:

- den VIETASCHEN **Wurzelsatz** $\left\{\begin{array}{lllll} x_1+x_2 & = & -p & = & -\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2 & = & q & = & \frac{c}{a}\end{array}\right.$,

- die **Zerlegung in Linearfaktoren** (**Faktorisierung**)

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$$
$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

und

- die **quadratische Ergänzung** , die in folgender Umformung besteht,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Beispiel 2.5: Wir betrachten die quadratische Gleichung $x^2 - x - 2 = 0$.
(Die Gleichung liegt in Normalform vor mit $p = -1$ und $q = -2$.)
Die Wurzeln berechnen sich demnach aus

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\left(\frac{-1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - (-2)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2, \quad x_2 = -1$$

Als Zugabe geben wir die Zerlegung in Linearfaktoren an:
$x^2 - x - 2 = (x-2)(x-(-1)) = (x-2)(x+1)$.

Beispiel 2.6: Wir betrachten die quadratische Gleichung $4x^2 - 4x + 1 = 0$.
(Die Gleichung liegt nicht in Normalform vor $a = 4 \neq 1, b = -4, c = 1$)
$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ (Normalform mit $p = -1$ und $q = \frac{1}{4}$)
Die Wurzeln berechnen sich demnach aus

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\left(\frac{-1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ (reelle Doppelwurzel)
Es ergibt sich folgende Zerlegung in Linearfaktoren: $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

Beispiel 2.7: Die quadratische Gleichung $2x^2 + 2x + 1 = 0$ besitzt keine reellen Lösungen, denn

$$2x^2 + 2x + 1 = 2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}}$$

Es wird nochmals betont, daß sie aber im Bereich der komplexen Zahlen lösbar ist.

Beispiel 2.8: Die quadratische Ergänzung von $x^2 - 3x + 1$ berechnet man wie folgt:

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

2.2.2 Gleichungen, die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen

Unter Umständen lassen sich auch nichtquadratische Gleichungen auf quadratische Gleichungen zurückführen. Man muß es ”bloß” erkennen.

Beispiel 2.9:
Wir betrachten die Gleichung $x^5 + 2x^4 - 3x^3 = 0$.
Wegen $x^5 + 2x^4 - 3x^3 = x^3(x^2 + 2x - 3) = 0$ ist die Gleichung nur dann erfüllt, wenn $x^2 + 2x - 3 = 0$ (quadratische Gleichung) oder $x^3 = 0$ gilt.
Wegen $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2$ ergeben sich die Lösungen:
$x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ($x = 0$ ist eine 3-fache Nullstelle)

Beispiel 2.10:
Man löse die Gleichung $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 78$.
Es gilt $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = x^4 - 13x^2 + 30 = 78$
$\Longleftrightarrow x^4 - 13x^2 - 48 = 0$ (biquadratische Gleichung)

Durch die Substitution $y = x^2$ wird sie in $y^2 - 13y - 48 = 0$ überführt.

$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 + 48} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{19}{2}$

$\Rightarrow y_1 = 16, \quad y_2 = -3.$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1} = \pm 4, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2} = \sqrt{-3}$ (nicht reell)

Als reelle Lösungen erhält man also: $x_1 = 4, \quad x_2 = -4$

Übungen

2.7 Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit bestimmten Koeffizienten

a) $x^2 + 5x - 14 = 0$ b) $\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{16}$

c) $24x^2 + 27 = 54x$ d) $(2x-3)^2 - (x-5)^2 = 80$

e) $\frac{2x+1}{9} + \frac{6}{x+2} = \frac{x-2}{2} + \frac{x-1}{3}$

2.8 Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen mit unbestimmten Koeffizienten

a) $(ax+b)(ax-b) = 0$ b) $x^2 + (R^2 - x)^2 = (R^2 - 2x)^2$

c) $(1-ax)^2 = (1-bx)^2$ d) $\frac{a+x}{b+x} + \frac{b+x}{a+x} = \frac{5}{2}$

2.9 Folgende Gleichungen lassen sich auf die Lösung quadratischer Gleichungen zurückführen. Geben sie alle reellen Lösungen an.

a) $(x^2-5)^2 + (x^2-1)^2 = 40$ b) $(x^2-10)(x^2-3) = 78$

c) $x = 36 + 5\sqrt{x}$ d) $8x^{-6} + 999x^{-3} = 125$

2.10 Bestimmen Sie die quadratische Ergänzung von:

a) $x^2 + x + 1$ b) $x^2 - 4x - 4$ c) $x^2 + 9x + 3$

2.11 Lösen Sie die folgenden Gleichungen!

a) $3x^2 + 6x - 15 = 0$ b) $x^2 - 4x - 16 = 0$ c) $24x^2 + 27 = 54x$

d) $(x-3)^2 = 49$ e) $(x+2)(x+4) = 0$ f) $(x-5)(x-4) + (x-6)(x-3) = 0$

g) $\frac{10x+1}{x} - 2x + 1 = 0$ h) $\frac{20+x}{2x-2} - \frac{9x^2+x+2}{6x^2-6} = \frac{5-3x}{x+1} - \frac{10-4x}{3x+3}$

i) $\frac{5+2x}{3-2x} - \frac{4-3x}{x} = \frac{2x}{x-1}$

2.12 Um die Tiefe eines Brunnen zu bestimmen, läßt man einen Stein frei hineinfallen und hört ihn nach 6 Sekunden im Wasser aufschlagen. Wie tief ist der Brunnen?
(Schallgeschwindigkeit 333m/s, Fallbeschleunigung 9,81 m/s^2. Luftwiderstand wird vernachlässigt)

2.13 Zwei Widerstände, die sich um 200Ω unterscheiden, haben in Parallelschaltung einen Gesamtwiderstand von 24Ω. Wie groß sind die Widerstände?

2.14 Bei einer Brinellhärteprüfung eines Stahls verwendet man eine Stahlkugel von 10mm Durchmesser und erhält nach der Prüfung, bei der die Stahlkugel auf die Oberfläche des zu prüfenden Werkstückes gedrückt wird, einen Kugeleindruck, dessen Durchmesser (auf der ebenen Oberfläche des Werkstückes gemessen) 5mm ist. Wie tief ist die Kugel in das Werkstück eingedrungen?

2.15 Durch Verbesserung im Betrieb kann ein Eisenbahnzug jetzt eine um 9 km/h höhere

Durchschnittsgeschwindigkeit erreichen und erzielt dadurch auf einer Strecke von 180 km eine Zeiteinsparung von 40 min. Wieviel Stunden benötigt er für die Strecke?

2.2.3 Quadratische Ungleichungen

Eine **quadratische Ungleichung** kann immer auf eine der **Normalformen** gebracht werden:

$$x^2 + px + q \le 0 \text{ oder } x^2 + px + q \ge 0$$

oder

$$x^2 + px + q < 0 \text{ oder } x^2 + px + q > 0$$

Lösungstheorie:
Es wird zunächst die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

gelöst (wie beschrieben). Hieraus resultieren die beiden (reellen oder komplexen) Lösungen.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Jetzt beachtet man, dass es sich bei der linken Seite der Ungleichung um die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ handelt, deren Graph eine nach oben geöffnete Normalparabel ist.
Dementsprechend ergeben sich folgende Lösungsfälle:

	$x^2 + px + q \le 0$	$x^2 + px + q \ge 0$
$x_1 < x_2$ reell	$L = [x_1, x_2]$	$L = (-\infty, x_1] \cup [x_2, \infty)$
$x_1 = x_2$ reell	$L = \{x_{1/2}\}$	$L = \mathbb{R}$
x_1 und x_2 komplex	$L = \emptyset$	$L = \mathbb{R}$

	$x^2 + px + q < 0$	$x^2 + px + q > 0$
$x_1 < x_2$ reell	$L = (x_1, x_2)$	$L = (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$
$x_1 = x_2$ reell	$L = \emptyset$	$L = \mathbb{R} \backslash \{x_{1/2}\}$
x_1 und x_2 komplex	$L = \emptyset$	$L = \mathbb{R}$

Beispiel 2.11:
Wir betrachten die quadratischen Ungleichungen
a) $x^2 - x - 2 \le 0$ b) $x^2 - x - 2 \ge 0$ c) $x^2 - x - 2 < 0$ d) $x^2 - x - 2 > 0$.
Die Wurzeln der zugehörigen Gleichung sind (siehe Beispiel 2.5) : $x_1 = -1, \quad x_2 = 2$.
Demzufolge ergeben sich folgende Lösungsmengen:
a) $L = [-1, 2]$ b) $L = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ c) $L = (-1, 2)$ d) $L = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Beispiel 2.12:
Wir betrachten die quadratischen Ungleichungen
a) $x^2 - x + \frac{1}{4} \le 0$ b) $x^2 - x + \frac{1}{4} \ge 0$ c) $x^2 - x + \frac{1}{4} < 0$ d) $x^2 - x + \frac{1}{4} > 0$.
Die Wurzeln der zugehörigen Gleichung sind (siehe Beispiel 2.6): $x_1 = x_2 = \dfrac{1}{2}$ (reelle Doppelwurzel).

Demzufolge ergeben sich folgende Lösungsmengen:
a) $L = \{\frac{1}{2}\}$ b) $L = \mathbb{R}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$.

Beispiel 2.13:
Die quadratischen Ungleichungen sind zu lösen!
a) $x^2 + x + \frac{1}{2} \le 0$ b) $x^2 + x + \frac{1}{2} \ge 0$ c) $x^2 + x + \frac{1}{2} < 0$ d) $x^2 + x + \frac{1}{2} > 0$
Die Wurzeln der zugehörigen Gleichung sind komplex (siehe Beispiel 2.7):
$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{4}}$.
Demzufolge ergeben sich folgende Lösungsmengen:
a) $L = \emptyset$ b) $L = \mathbb{R}$ c) $L = \emptyset$ d) $L = \mathbb{R}$.

Übungen
2.16 Lösen Sie die Ungleichungen!
a) $3x^2 + 6x - 15 \le 0$ b) $x^2 - 4x - 16 > 0$ c) $4x^2 + 28 < 4x$ d) $24x^2 - 54x \ge -27$

2.3 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

Für viele Studenten scheint der Absolutbetrag ein ”*Buch mit* 7 *Siegeln*” zu sein.
Man weiß zwar, daß $|-3,42| = 3,42$ gilt, aber wieso ist $|x-1| = x-1$ für $x > 0$ eigentlich falsch?

Definition (siehe auch Abschnitt 1.1):

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für } a \ge 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}, \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{heißt } \textit{Absolutbetrag} \text{ von } a$$

Das ist also die unscheinbare Definition des Absolutbetrages, die soviel Kopfzerbrechen bereitet.

Eigenschaften:

$$|-x| = |x|, \qquad |x+y| \le |x| + |y| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$
$$|x| = 0 \iff x = 0$$
$$|x| \le c \iff -c \le x \le c$$
$$|x-a| \le c \iff a-c \le x \le a+c$$

Beispiel 2.14
Was bedeutet nun $|x-1|$ wirklich? Man wendet einfach die Definition des Betrages an und ersetzt a durch $x-1$.

$$|x-1| = \begin{cases} (x-1) & \text{für } (x-1) \ge 0 \\ -(x-1) & \text{für } (x-1) < 0 \end{cases} \quad \text{(Fallunterscheidung noch zu unübersichtlich)}$$

$$\Rightarrow |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \ge 1 \\ -(x-1) & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

Beispiel 2.15
Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x-1| < x$?

Wegen $|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{für } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{für } x < 1 \end{cases}$ müssen Fallunterscheidungen getroffen werden (vgl. vorheriges Bsp.).

1. *Fall*: $x \geq 1$

$|x-1| < x \overset{\text{Betragsauflösung}}{\iff} x-1 < x \iff -1 < 0$ (ist immer wahr)

also erhält man die Teillösung: $x \geq 1$

2. *Fall*: $x < 1$

$|x-1| < x \overset{\text{Betragsauflösung}}{\iff} -(x-1) < x \iff 1 < 2x \iff \frac{1}{2} < x,$

da aber $x < 1$ vorausgesetzt war, ergibt sich als weitere Teillösung $\frac{1}{2} < x < 1$

Die Zusammenfassung der beiden Teillösungen ergibt die Lösungsmenge:

$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\} \cup \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < x < 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < x\right\}$ oder in Intervallschreibweise $(\frac{1}{2}, +\infty)$

Beispiel 2.16

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x-2)^2 < 9$?

Zunächst sei an folgende Rechenregel erinnert: $0 \leq a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

$0 \leq (x-2)^2 < 9 \iff \sqrt{(x-2)^2} < \sqrt{9} \overset{\text{ACHTUNG!}}{\iff} |x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -1 < x < 5$

Lösungsmenge: $(-1, 5)$

Beispiel 2.17

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x^2+x-2| < x+2$?

In die Betragsdefinition substituieren wir zunächst $a = x^2+x-2$.

Es gilt also: $|x^2+x-2| = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{für } x^2+x-2 \geq 0 \\ -(x^2+x-2) & \text{für } x^2+x-2 < 0 \end{cases}$.

Die Bedingungen für die Fallunterscheidung sind noch nicht aussagekräftig, daher werden diese zunächst weiter untersucht.

Der Graph von $y = x^2+x-2$ ist eine nach oben geöffnete Parabel. Zwischen den Nullstellen $x_1 = -2; x_2 = 1$, (d.h. $-2 < x < 1$) liegt der Graph unterhalb der y-Achse, also ist die Funktion in diesem Intervall negativ!

Zusammenfaßt erhalten wir also:

$$|x^2+x-2| = \begin{cases} x^2+x-2 & \text{für } x \leq -2 \vee x \geq 1 \\ -(x^2+x-2) & \text{für } -2 < x < 1 \end{cases}$$

1. *Fall*: $x \leq -2 \vee x \geq 1$

$|x^2+x-2| < x+2 \iff x^2+x-2 < x+2$

$\iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$ (vgl. Eigenschaften des Absolutbetrages).

Da aber $x \leq -2 \;\vee\; 1 \leq x$ vorausgesetzt war, ergibt sich als Teillösung: $1 \leq x < 2$.

2. *Fall*: $-2 < x < 1$

$|x^2+x-2| < x+2 \iff -(x^2+x-2) < x+2$

$\iff 0 < x^2+2x \iff 0 < x(x+2)$

$\iff x < -2 \;\vee\; 0 < x$ (Man mache sich das klar!)

Da jetzt $-2 < x < 1$ vorausgesetzt war, ergibt sich als Teillösung: $0 < x < 1$.

Die Zusammenfassung der beiden Teillösungen ergibt die

Lösungsmenge: $0 < x < 2$.

Übungen

2.17 Lösen Sie die Betragsstriche auf und fassen Sie soweit wie möglich zusammen.

$$2|a-b| - |b+3a| - |b| - 5a \quad \text{mit } 0 \geq a \geq b.$$

2.18 Berechnen Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen und Ungleichungen!
a) $x = |x| - 1$ b) $|x+2| + 3 = 7$ c) $|3x-9| - 2|x+1| = 3x+5$
d) $|3x-9| - 2|x+1| = |3x+5|$ e) $x < |x| - 1$ f) $|x+2| + 3 \leq 7$
g) $|3x-9| - 2|x+1| \geq 3x+5$ h) $|3x-9| - 2|x+1| < |3x+5|$

2.19 Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen und Ungleichungen:
a) $|x-3| = 5$ b) $\left|\frac{2x+4}{x-3}\right| = 1$
c) $|x-2| < 3$ d) $|3x-5| > 2|x+2|$
e) $|x^2 + 2x - 3| \leq 12$ f) $|x^2 + 4x - 5| > 2$

2.20 Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen
a) $x < |x| - 1$ b) $|x+2| + 3 \leq 7$
c)$|3x-9| - 2|x+1| \geq 3x+5$ d) $|3x-9| - 2|x+1| < |3x+5|$
e) $x^2 - |x| - 12 \geq 0$ f) $\frac{|x-3|}{2x-4} + 3x < 3x+5$

2.4 Wurzelgleichungen

Durch wiederholtes Auflösen nach den Wurzeln, die in der Gleichung vorkommen, und anschließendes Potenzieren können die Wurzeln unter Umständen beseitigt werden.
Man beachte jedoch:
Durch Quadrieren können **Scheinlösungen** auftreten!
Es gilt $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$, aber aus $a^2 = b^2$ folgt nicht $a = b$ (z.B. folgt aus $1^2 = (-1)^2$ nicht $1 = -1$)
Daher müssen alle **Lösungen durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung überprüft werden**!

Beispiel 2.18
$\sqrt{x} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}$
Durch Quadrieren erhält man
$x - 2\sqrt{x}\sqrt{x-1} + (x-1) = 2x-1 \Rightarrow 2x-1-2\sqrt{x}\sqrt{x-1} = 2x-1$
$\Rightarrow -2\sqrt{x}\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 1$
Für $x = 1$ ist die Ausgangsgleichung erfüllt, aber für $x = 0$ gar nicht definiert (Scheinlösung), also hat die Gleichung nur die Lösung $x = 1$.

Beispiel 2.19
$7 - 3\sqrt{2x+4} = 16$
Auflösung nach der Wurzel ergibt:
$-3\sqrt{2x+4} = 16 - 7 = 9 \Rightarrow \sqrt{2x+4} = -3 \Rightarrow 2x+4 = 9 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$
Probe: $x = \frac{5}{2}$ in die Ausgangsgleichung eingesetzt
$7 - 3\sqrt{2\cdot\frac{5}{2} + 4} = 7 - 3\sqrt{9} = -2 \neq 16$, d.h. es gibt keine Lösung!

Übungen
2.21 Lösen Sie folgende Wurzelgleichungen:

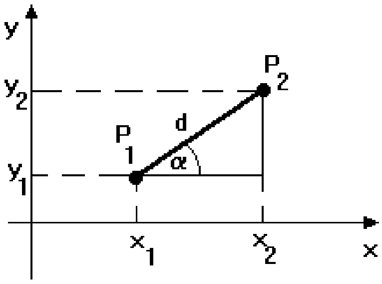
a) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} + 1 = 0$ b) $9\sqrt{5x+2} = 25 + 4\sqrt{5x+2}$
c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$ d) $(3\sqrt{x} - 1)^2 + (4\sqrt{x} - 7)^2 = (5\sqrt{x} - 6)^2$
e) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = 3$

2.22 Jemand rechnet $x = \sqrt{a^2 - 2a + 1} - a = \sqrt{(a-1)^2} - a = (a-1) - a = -1$.
Für $a = 0$ erhält man jedoch $x = 1$. Wo steckt der Fehler?

3. Geraden und Kreise; Trigonometrie

3.1 Geraden

Länge und Anstieg einer Strecke



Abstand der Punkte P_1 und P_2 (d.h. Länge der Strecke):

$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (Pythagoras).

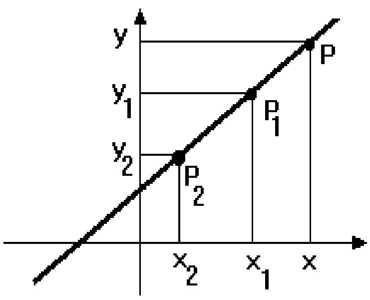
Anstieg der Strecke $\overline{P_1P_2}$:

$\tan\alpha = m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Formen der Geradengleichung
Punktrichtungsform der Geradengleichung
Eine Gerade ist durch Angabe eines Punktes $P_1 = (x_1, y_1)$ und einer Richtung (Anstieg $m = \tan\alpha$) eindeutig bestimmt.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m \iff y - y_1 = m\cdot(x - x_1) \iff \boxed{y = y_1 + m\cdot(x - x_1)}$$

Zweipunktform der Geraden
Eine Gerade ist durch Angabe zweier Punktes $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ eindeutig bestimmt.



$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\iff$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1)$$

$$\iff$$

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\cdot(x - x_1)$$

Allgemeine lineare Funktion: $\boxed{Ax + By + C = 0, \qquad (A \neq 0 \vee B \neq 0)}$

Im Fall $B \neq 0$ kann man auf die Normalform $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ umrechnen.
Im Fall $B = 0 \wedge A \neq 0$ ergibt sich eine Gerade $x = -\frac{C}{A}$, die parallel zur y-Achse verläuft.
Im Fall $A = 0 \wedge B \neq 0$ ergibt sich eine Gerade $y = -\frac{C}{B}$, die parallel zur x-Achse verläuft

Beispiel 3.1
Man bestimme die Gleichung der Geraden, deren Anstiegswinkel $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ beträgt und die durch den Punkt $P_1 = (1;-3)$ geht.
Lösung: Der Anstieg der Geraden ist
$m = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{y-(-3)}{x-1} = \frac{y+3}{x-1}$
$\Rightarrow y+3 = (-1)(x-1) \Rightarrow y = -x+1-3 \Rightarrow y = -x-2$

Beispiel 3.2 Man bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1 = (-2;-1)$ und $P_2 = (1;-3)$:
Lösung: $\frac{y-(-1)}{x-(-2)} = \frac{-3-(-1)}{1-(-2)} = \frac{-3+1}{1+2} = -\frac{2}{3}$
$\Rightarrow y+1 = -\frac{2}{3}(x+2) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

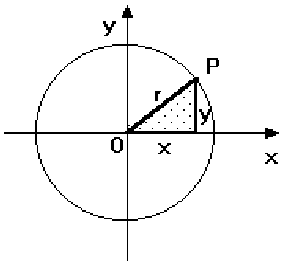
Beispiel 3.3
Wie lautet die durch den Punkt $P = (-1;-1)$ gehende Gerade, die zu der Geraden $y = 2x+3$ parallel ist?
Lösung: Anstieg der gesuchten Geraden ist $m = 2$, (da parallel zu $y = 2x+3$) $\Rightarrow$
$m = 2 = \frac{y-(-1)}{x-(-1)} = \frac{y+1}{x+1} \Rightarrow y+1 = 2(x+1) \Rightarrow y = 2x+1$

Beispiel 3.4
Durch den Punkt $P = (-2;3)$ soll eine Gerade gezogen werden, die die Gerade $y = 2x-5$ unter einem Winkel von 45° schneidet. Wie lautet die Gleichung der Geraden?
Lösung: Der Anstieg der gesuchten Geraden sei $m_2 = \tan\beta$. Die gegebene Gerade hat den Anstieg $m_1 = \tan\alpha = 2$. Man mache sich an einer Skizze klar, daß $\beta - \alpha = 45°$ gelten muß!
Nach dem Additiontheorem für den Tangens gilt:
$\tan(x_1 \pm x_2) = \frac{\tan x_1 \pm \tan x_2}{1-(\pm\tan x_1 \cdot \tan x_2)} \Rightarrow 1 = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{m_2-2}{1+2m_2}$
$\Rightarrow 1+2m_2 = m_2-2 \Rightarrow m_2 = -3$ (Anstieg der gesuchten Geraden)
$\Rightarrow y = -3x+n$ muß durch den Punkt $P = (-2;3)$ gehen.
$\Rightarrow 3 = -3(-2)+n \Rightarrow n = -3 \Rightarrow y = -3x-3$

3.2 Kreise

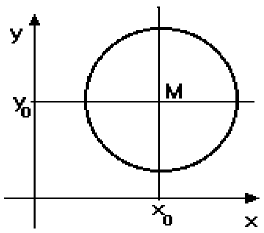
Der Kreis ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt (dem Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben. Liegt im einfachsten Fall der Mittelpunkt im Koordinatenursprung, ergibt sich für den Radius r die Kreisgleichung

$r = \overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$ oder $x^2 + y^2 = r^2$



Hat der Mittelpunkt M die Koordinaten $(x_0;y_0)$, so erhält man

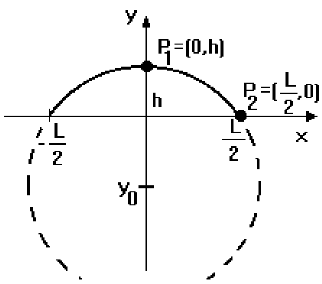
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Bemerkung:
Umformung der Mittelpunktsform: $\left(x - x_0\right)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$
$\Longleftrightarrow x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 = r^2$
$\Longleftrightarrow x^2 + y^2 + \underbrace{\left(-2x_0\right)}_{A} x + \underbrace{(-2y_0)}_{B} y + \underbrace{x_0^2 + y_0^2 - r^2}_{C} = 0$
d.h. die Gleichung $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ beschreibt allgemein einen Kreis in der Ebene.

Beispiel 3.5
Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = 0$.
Lösung: Offensichtlich liegt noch nicht die Mittelpunktsform der Kreisgleichung vor. Um zur gewünschten Kreisgleichung zu gelangen, suchen wir die *quadratische Ergänzung*:
$0 = x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 = (x - 2)^2 - 4 + (y + 1)^2 - 1 + 1$
$\Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$ bzw. $(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = 2^2$
Also liegt ein Kreis mit dem Radius 2 und dem Mittelpunkt in $(2;-1)$ vor.

Beispiel 3.6
Um den Radius eines im Kreisbogen verlegten Gleises zu bestimmen, wurde zwischen zwei Punkten des Gleises die Entfernung $L = 120$m als Sehnenlänge und die dazugehörige Pfeilhöhe mit $h = 6$m gemessen. (Die Pfeilhöhe ist der größte Abstand des Kreisbogens von der zugehörigen Sehne.) Wie groß ist der Radius des Kreisbogens?
Lösung: Zweckmäßigerweise betrachtet man das Problem in einem geeigneten Koordinatensystem. In Anwendungen muß man sich oft das passende Koordinatensystem erst ’besorgen’. Man versucht es möglichst so zu legen, daß man ’Symmetrien’ ausnutzen kann, da sich dann i.a. die Formeln auch vereinfachen. Es bietet sich an, eine Koordinatenachse entlang der Pfeilhöhe durch den Mittelpunkt zu legen. (vgl. Skizze)



Die Mittelpunktsgleichung der Kreisgleichung lautet demnach:

$$x^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{(man beachte, daß } x_0 = 0).$$

Durch Einsetzen der Punkte $P_1 = (0,h) = (0,6)$ und $P_2 = (\frac{L}{2},0) = (60,0)$ erhält man das Gleichungssystem

$$(6 - y_0)^2 = r^2 \qquad \text{und} \qquad 60^2 + y_0^2 = r^2.$$

Gleichsetzen ergibt:
$(6 - y_0)^2 = 60^2 + y_0^2 \Rightarrow 36 - 12y_0 + y_0^2 = 3600 + y_0^2$
$\Rightarrow y_0 = -297 \Rightarrow r = 303\text{m}$
Der Gleisradius beträgt somit $r = 303\text{m}$.

Übungen (Es ist empfehlenswert zu allen Übungsaufgaben eine Skizze anzufertigen.)
3.1 Bestimmen Sie Länge und Anstiegswinkel der Strecke $\overline{P_1P_2}$!
a) $P_1 = (-1;-1),\ P_2 = (-2;4)$ b) $P_1 = (2;-3),\ P_2 = (-2;3)$

3.2 Man bestimme die Gleichung der Geraden, deren Anstiegswinkel α beträgt und die durch den Punkt P geht, wobei:
a) $\alpha = 30°,\ P = (-2;-1)$ b) $\alpha = -60°,\ P = (-1;-2)$
c) $\alpha = 135°,\ P = (-3;3)$ d) $\alpha = 22,5°,\ P = (-0.5;1.5)$

3.3 Man bestimme die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte P_1 und P_2 geht, wobei:
a) $P_1 = (1;0), P_2 = (-2;-4)$ b) $P_1 = (-1;2), P_2 = (2;-3)$
c) $P_1 = (0,5;-0,2), P_2 = (-0,2;1,2)$ d) $P_1 = (a;2), P_2 = (-2;-a)$

3.4 Durch den Punkt $P = (3;2)$ ist zu der Geraden die Parallele zu ziehen. Wie lautet die Gleichung?
a) $y = 2x + 3$ b) $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$

3.5 Durch den Punkt $P = (2;\frac{3+\sqrt{3}}{3})$ soll eine Gerade gezogen werden, die die Gerade $y = \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}$ unter einem Winkel von 30° schneidet. Wie lautet die Gleichung der Geraden?

3.6 Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises
a) $x^2 + 4x + y^2 - 4y + 7 = 0$ b) $x^2 - 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$

3.7 Man gebe die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt $M(-2;3)$ und dem Peripheriepunkt $P(1;-1)$ an.

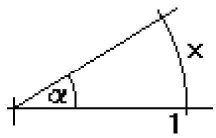
3.8 Stellen Sie die Gleichung des Kreises auf, der durch den Punkt $P = (3;4)$ verläuft und beide

Koordinatenachsen berührt.

3.3 Trigonometrie

Gradmaß und Bogenmaß: Ebene Winkel werden in *Gradmaß* oder *Bogenmaß* angegeben.
Umrechnung:

Bogenmaß $x \rightarrow$ Gradmaß φ:	Gradmaß $\varphi \rightarrow$ Bogenmaß x:
$\varphi = \frac{180°}{\pi} \cdot x$	$x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi$



Die Unterteilung des Gradmaßes erfolgt analog zur Uhrzeit in *Minuten* und *Sekunden*:

$$1° \mathrel{\hat{=}} 60° \text{ (60 Minuten)} \qquad 1' \mathrel{\hat{=}} 60'' \quad \text{(60 Sekunden)} \qquad 1' \mathrel{\hat{=}} 3600''$$

Beispiel 3.7

a) $17°12'23'' = 17° + 12' \cdot \frac{1°}{60'} + 23'' \cdot \frac{1°}{3600''} = 17,206° \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{180°} \cdot 17,206° = 0,3003 \text{ rad}$

b) $1,234 \text{ rad} = \frac{180°}{\pi} \cdot 1,234 \mathrel{\hat{=}} 70,703° = 70° + 0,703° \cdot \frac{60'}{1°} = 70°42,18'$

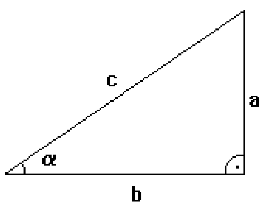
$$= 70°42' + 0,18' \cdot \frac{60''}{1'} = 70°42'11''$$

ACHTUNG: Überpüfen Sie bei Benutzung eines Taschenrechners die eingestellte Einheit (RAD = Bogenmaß oder DEG = Gradmaß; GRD = Neugrad spielt praktisch keine Rolle)!!!

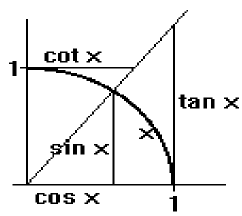
Winkelfunktionen

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$



rechtwinkl. Dreieck

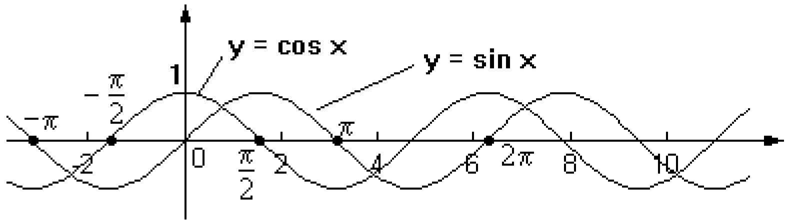


Einheitskreis

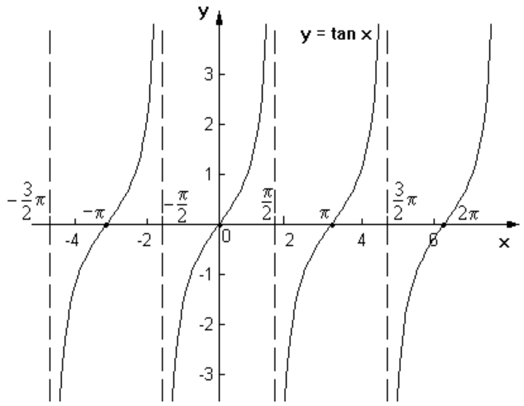
Einige ausgewählte Werte der Winkelfunktionen: (Tabelle 3.1; *n.d.* = nicht definiert)

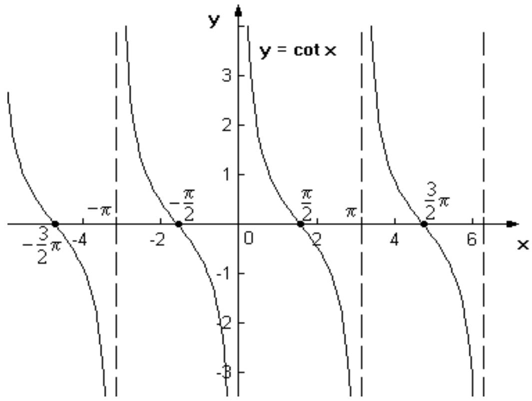
x	$0 \mathrel{\hat{=}} 0°$	$\frac{\pi}{6} \mathrel{\hat{=}} 30°$	$\frac{\pi}{4} \mathrel{\hat{=}} 45°$	$\frac{\pi}{3} \mathrel{\hat{=}} 60°$	$\frac{\pi}{2} \mathrel{\hat{=}} 90°$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	*n.d.*
$\cot x$	*n.d.*	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Graphische Darstellung:



$$\boxed{\sin(x+2\pi) = \sin x \qquad \cos(x+2\pi) = \cos x}$$





$\tan(x+\pi) = \tan x$ $\qquad\qquad$ $\cot(x+\pi) = \cot x$

Trigonometrische Funktionen können durch Additionstheoreme umgeformt werden. Man sollte die ungefähre Struktur kennen und für welche Umformungen sie geeignet sind. Hier eine kleine Auswahl. (Die unterstrichenen werden besonders häufig benötigt.)

Additionstheoreme:

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ $\qquad$ $\underline{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$

$\underline{\sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x}$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\qquad$ $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\qquad$ $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 - (\pm \tan x \cdot \tan y)}$ $\qquad$ $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $\qquad$ $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

Sinus- und Kosinussatz (für beliebige Dreiecke)

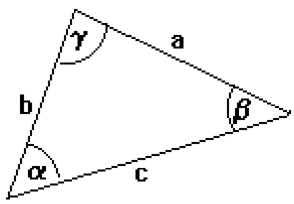
Sinussatz:

$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

$a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



Übungen

3.9 Rechnen Sie (ohne Taschenrechner) die gegebenen Winkel in Gradmaß bzw. in Bogenmaß um!

a) $\varphi = 45°$ b) $\varphi = 135°$ c) $\varphi = 240°$ d) $\varphi = 315°$

e) $x = \frac{2\pi}{3}$ f) $x = \frac{3\pi}{4}$ g) $x = \frac{11\pi}{6}$ h) $x = \frac{7\pi}{6}$

3.10 Rechnen Sie die gegebenen Winkel in Gradmaß bzw. in Bogenmaß um!

a) $\varphi = 35°46'12''$ b) $\varphi = 217°58'08''$

c) $x = 2{,}51\,\mathrm{rad}$ d) $x = 0{,}87\,\mathrm{rad}$

3.11 Verifizieren Sie die Werte aus Tabelle 3.1 (außer 0° und 90°)durch Anwendung des SATZES VON PYTHAGORAS am rechtwinkligen gleichschenkligen bzw. am gleichseitigen Dreieck.

3.12 Bestimmen Sie **ohne Taschenrechner** aber unter Verwendung von Tabelle 3.1 die Funktionswerte von $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ und $\cot x$ für

a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{3\pi}{4}$ c) $x = \frac{4\pi}{3}$ d) $x = \frac{7\pi}{4}$ e) $\varphi = 120°$

f) $\varphi = 135°$ g) $\varphi = 330°$ h) $\varphi = 210°$ i) $\varphi = 270°$

3.13 Berechnen Sie jeweils die Werte der drei anderen Winkelfunktionen

a) $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ b) $\cos\alpha = \frac{2n}{1+n^2}$ c) $\tan\alpha = \frac{12}{5}$

Hinweis: Additionstheoreme verwenden.

3.14 Formen Sie mittels Additionstheoremen um:

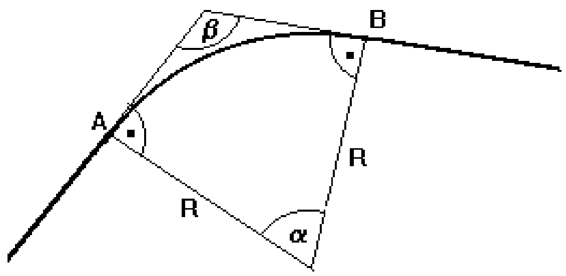
a) $y = \sin\left(\frac{3}{2}x + \pi\right)$ b) $y = \cos\left(\frac{7}{2}\pi - \frac{x}{2}\right)$ c) $y = \tan(\pi - x)$

d) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ e) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$

3.15 Lösen Sie folgende Gleichungen:

a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ b) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ c) $\tan x = 1 - \sqrt{2}$

3.16 Zwei Straßen stoßen im Winkel von $\beta = 108{,}205°$ aufeinander. Sie sollen durch einen Kreisbogen mit dem Radius $R = 250m$ verbunden werden. Wie lang ist der Bogen $\widehat{AB}$?



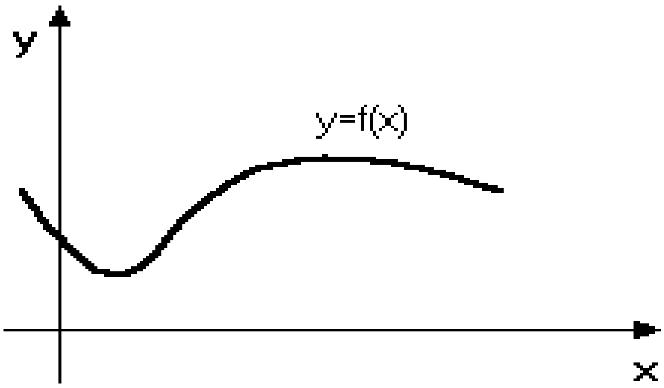
3.17 Aus einem Kreissektor mit dem Zentriwinkel $\beta = 128{,}21°$ und dem Radius $s = 38{,}2$ cm entsteht durch zusammenrollen ein Kegel. Wie groß ist der Öffnungswinkel γ des Kegels?

3.18 An einem Punkt greifen zwei Kräfte $F_1 = 280$ N und $F_2 = 450$ N an, deren Wirkungslinien den Winkel $\delta = 53°20'$ bilden. Berechnen Sie die resultierende Kraft F_R und den Winkel ε zwischen F_1 und der resultierenden Kraft.

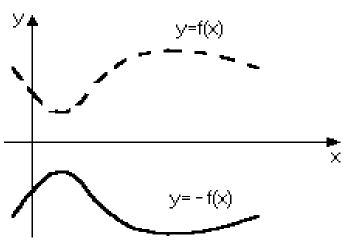
4. Graphische Darstellung elementarer Funktionen

Oftmals reicht es aus, sich einen groben Überblick über den Verlauf des Graphen einer Funktion zu besorgen (*qualitativer* Verlauf). Dies ist mit moderner Rechentechnik, aber auch schon mit grafikfähigen Taschenrechnern im Prinzip kein Problem. Trotzdem sollte man derartigen Ergebnissen nicht blind vertrauen. An vielen Stellen ist es unerläßlich, die Graphen der wichtigsten elementaren Funktion zu kennen und aus diesen Kenntnissen heraus die Graphen ähnlicher Funktionen herzuleiten. Einige markante Funktionswerte kann man dann durchaus zum Zeichnen heranziehen, um das Ergebnis abzurunden.

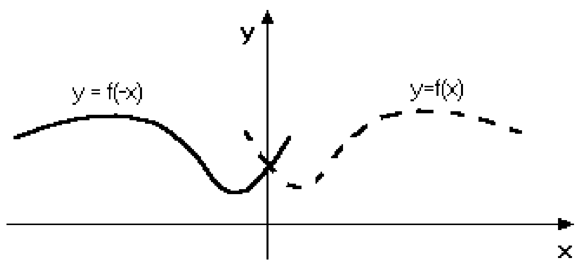
4.1 Manipulation mit Funktionsgraphen



Wir setzten zunächst voraus, dass der Graph der betrachteten Funktion bekannt ist. Einige Manipulationen werden an diesem Graphen (vgl. Skizze) veranschaulicht. Beachten Sie, dass sich bei diesen Manipulationen auch der Definitionsbereich der Funktion verändern kann.
Spiegelung:



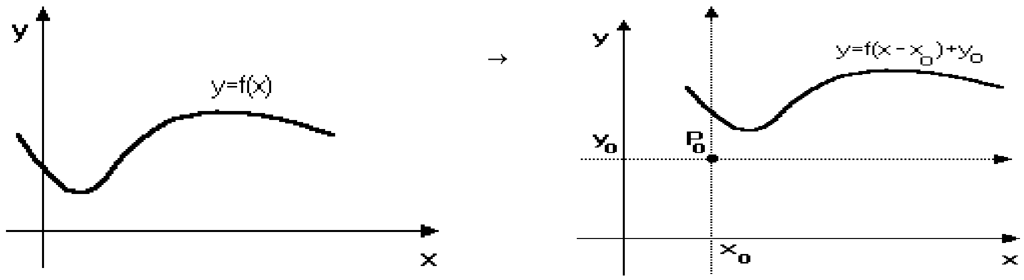
Spiegelung an x-Achse



Spieglung an der y-Achse

Von besonderem Interesse sind Funktionsgraphen, die bei gewissen Spiegelungen *invariant* bleiben, d.h. sie ändern sich nicht.
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **gerade**, wenn sie bei einer Spiegelung bzgl. der y-Achse invariant bleibt, d.h. $f(-x) = f(x)$
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt **ungerade**, wenn sie bei einer Spiegelung bzgl. der x-Achse und anschließenden Spiegelung bzgl. der y-Achse (oder umgekehrt) invariant bleibt, d.h. $-f(-x) = f(x)$.
(Man sagt: Die Funktion ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.)

Verschiebung (Translation):
Die Verschiebung (Translation) des Funktionsgraphen ist ein geeignetes Hilfsmittel, um schnell einen Überblick über den qualitativen Verlauf der Funktion $y = f(x - x_0) + y_0$ zu bekommen. Man zeichnet dazu zunächst ein in den Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ verschobenes *Hilfskoordinatensystem* (gepunktete Linien) und anschließend darin den ursprünglichen Graphen.

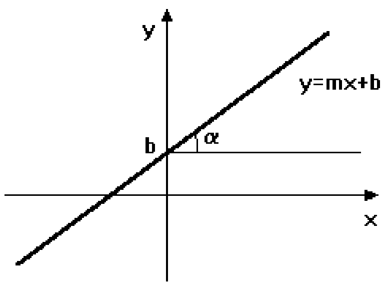


Merke: Der Graph der Funktion $y = f(x - x_0) + y_0$ entsteht, indem man den Graphen der Funktion $y = f(x)$ um x_0 Einheiten in x-Richtung und um y_0 Einheiten in y-Richtung verschiebt:

Verschiebung erfolgt für	$y_0 > 0$	$y_0 < 0$
$x_0 > 0$	nach rechts und oben	nach rechts und unten
$x_0 < 0$	nach links und oben	nach links und unten

4.2 Lineare Funktionen

Normalform der Geradengleichung:



$f(x) = mx + b, \qquad (m, b \in \mathbb{R})$

Die Gerade hat den Anstieg $m = \tan\alpha, \quad (\alpha \neq 90^0)$.

Beispiel 4.1 (Man schaue sich hierzu auch nochmals die Beispiele im Abschnitt 3 an.)
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden, die durch die Punkte $P_1(-2, 1)$ und $P_2(3, -1)$ geht.
1. *Lösungsvariante*:
Die Geradengleichung muß die Bedingungen

$$m \cdot (-2) + b = 1 \text{ und } m \cdot 3 + b = -1$$

erfüllen. Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt:

$$(-2m + b) - (3m + b) = 1 - (-1) \iff -5m = 2 \iff m = -\frac{2}{5}.$$

In eine der beiden Gleichungen eingesetzt folgt:

$$-2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + b = 1 \Rightarrow b = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Also ergibt sich als gesuchte Geradengleichung:

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ oder $y = -0,4x + 0,2$.

2. *Lösungsvariante*:

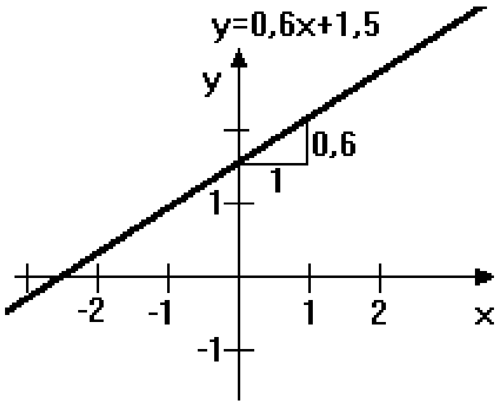
Unter Verwendung der Zweipunktform der Geraden (vgl. Abschnitt 3) erhält man:

$\frac{y-1}{x-(-2)} = \frac{(-1)-1}{3-(-2)} \Rightarrow \frac{y-1}{x+2} = \frac{-2}{5} \Rightarrow y-1 = -\frac{2}{5}(x+2) \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$.

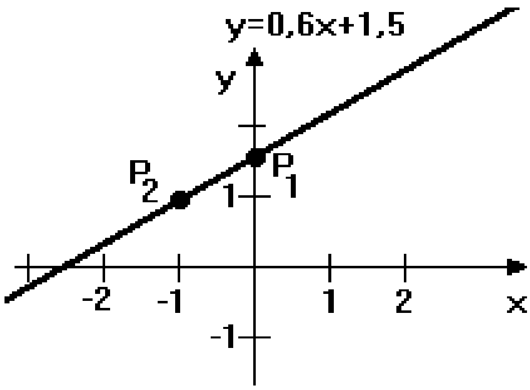
b) Stellen Sie die lineare Funktion $y = 0,6x + 1,5$ graphisch dar.

Lösung:

Man trägt zunächst $b = 1,5$ auf der y-Achse ab und konstruiert anschließend den Anstieg $m = 0,6$ mit Hilfe des Steigungsdreiecks.



Eine andere Variante wäre, zwei verschiedene Punkte der Geraden zu bestimmen. Einen erhält man sofort mit $x_1 = 0,\ y_1 = b = 1,5$. Dann wählt man willkürlich $x_2 = -1$(z.B.) und erhält $y_2 = 0,9$ (in diesem Falle).



4.3 Quadratische Funktionen

$$y = ax^2 + bx + c, \qquad (a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

Wir formen zunächst die quadratische Funktion um

$y = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right]$ (vgl. Abschnitt 2.2)

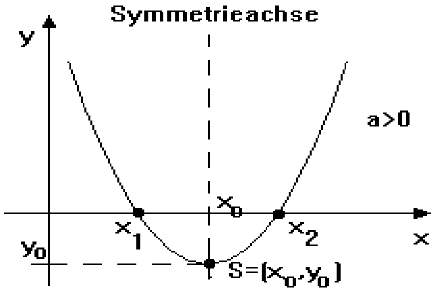
$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

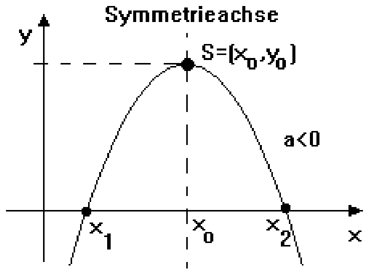
Unter dem Blickwinkel von Abschnitt 4.1 handelt es sich um eine Funktion der Form

$y = f(x-x_0) + y_0$ mit $f(x) = ax^2,\ x_0 = -\frac{b}{2a}$ und $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$.

Es liegt also eine Translation der Funktion $f(x) = ax^2$ vor. Man muß somit die Parabel $y = ax^2$ in das nach $P_0 = (x_0, y_0)$ verschobene Hilfskoordinatensystem einzeichnen. Anders formuliert, man verschiebt einfach den *Scheitelpunkt* der Parabel nach $S = P_0 = (x_0, y_0)$.

Der Graph der quadratischen Funktion $y = ax^2 + bx + c$ ist eine **Parabel**.





<ins>Koordinaten des Scheitelpunktes:</ins>

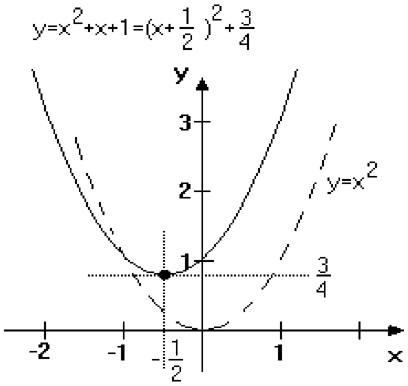
$$S = (x_0, y_0) \text{ mit } x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}, \qquad (a \neq 0).$$

Einprägsamer ist die Berechnung des Scheitelpunktes in folgender Form:

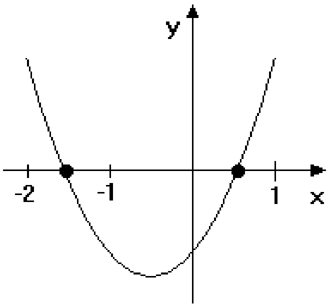
$x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = f(x_0)$ wobei x_1, x_2 die Nullstellen der quadratische Funktion sind.

Falls die Nullstellen reell sind, hat man sofort einen qualitativen Überblick über die Lage der Parabel.

Beispiel 4.2
Man stelle die Funktion $y = x^2 + x + 1$ graphisch dar.
Lösung: $y = x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (quadr. Ergänzung). Man muss also den Scheitelpunkt der Parabel $y = x^2$ nach $S(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4})$ verschieben.



Beispiel 4.3
Man löse die Ungleichung $x^2 + x - \dfrac{3}{4} < 0$.
Lösung: Mit den Erfahrungen aus Abschnitt 2.2 erhält man $L = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

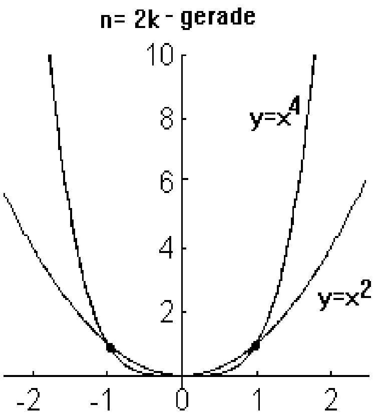


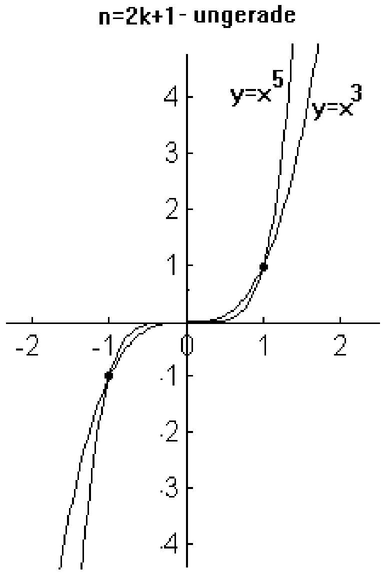
4.4 Potenzfunktionen

$$f(x) = x^a, \qquad x > 0,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ a \neq 1$$

für spezielle Exponenten a sind sie auch in der ganzen Menge $\mathbb{R}$ (bzw. für $x \neq 0$) definiert.

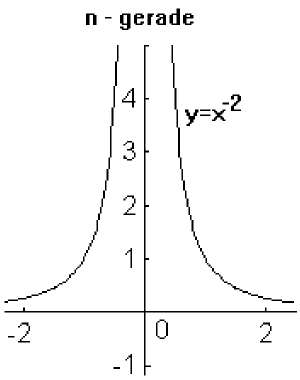
1.Fall: $a = n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}$

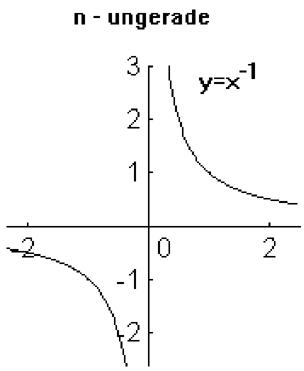




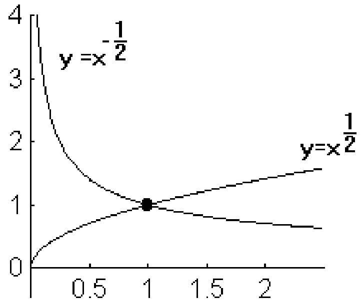
Bemerkung:
Die Funktion $f(x) = x^n$ ist für gerades $n = 2k$ eine gerade und für ungerades $n = 2k+1$ eine ungerade Funktion.

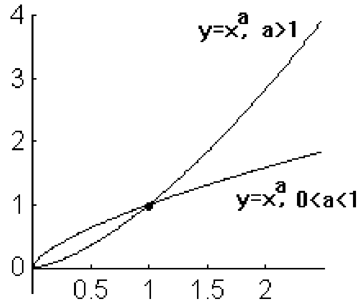
2. Fall: $\quad a = -n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0$



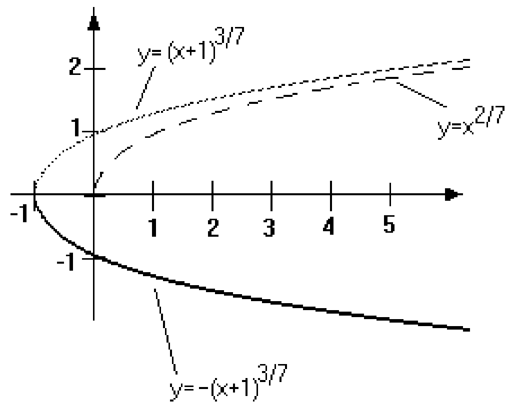


3.Fall: $\quad a \in \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Z}, \quad x > 0$



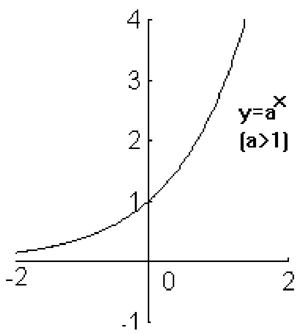


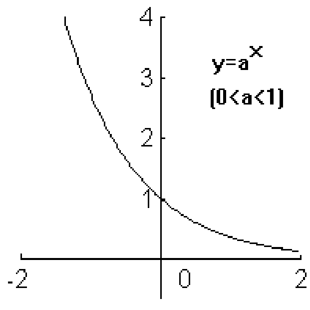
Beispiel 4.4
Man skizziere den Graph der Funktion $y = -(x+1)^{\frac{2}{7}}$.
Lösung:
Die Funktion $y = -(x+1)^{\frac{2}{7}}$ entsteht durch Spiegelung der Funktion $y = (x+1)^{\frac{2}{7}}$ an der x-Achse.
Diese wiederum entsteht aus der Funktion $y = x^{\frac{2}{7}}$ durch eine Verschiebung um $x_0 = -1;\ y_0 = 0$.
(Man beachte, daß man $(x+1)^{\frac{2}{7}} = (x-(-1))^{\frac{2}{7}}$ schreiben muß, um unmittelbar $x_0 = -1$ ablesen zu können!)
Den qualitativen Verlauf der Funktion $y = x^{\frac{2}{7}}$ entnimmt man dem obigen 3.Fall mit $a = \frac{2}{7} < 1$.
Damit haben wir alle wichtigen Parameter, um sofort den Graphen von $y = -(x+1)^{\frac{2}{7}}$ skizzieren zu können.



4.5 Exponentialfunktionen

$$y = a^x, \quad a \neq 1,\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}$$

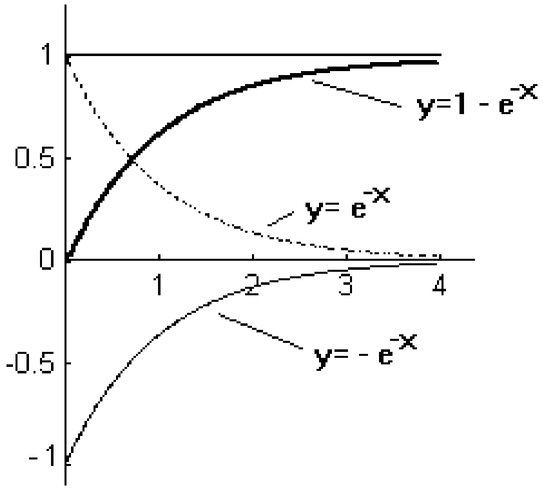




Bemerkung:
Man beachte, daß $y = a^x$ für $0 < a < 1$ monoton fallend ist.

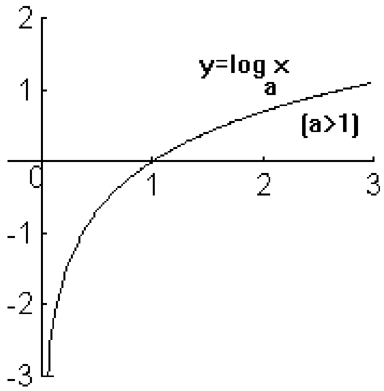
Beispiel 4.5
Man stelle die Funktion $y = 1 - e^{-x}$, $(x \geq 0)$ graphisch dar (Sättigungsfunktion)

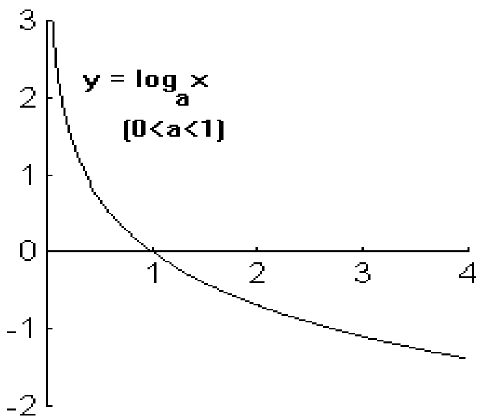
Die Funktion $y = 1 - e^{-x}$ entsteht durch Spiegelung der Funktion $y = e^{-x}$ an der x-Achse und anschließende Verschiebung mit $x_0 = 0$; $y_0 = 1$.



4.6 Logarithmusfunktionen

$$y = \log_a x, \quad a \neq 1,\ a > 0,\ x > 0$$





Bemerkung:
Man beachte, daß $y = \log_a x$ für $0 < a < 1$ monoton fallend ist.

4.7 Weitere elementare Funktionen

Die **trigonometrischen Funktionen**
$y = \sin x \qquad y = \cos x \qquad y = \tan x \qquad y = \cot x$
wurden bereits im Abschnitt 3.3 erwähnt.

Gelegentlich spielen auch noch die folgenden Funktionsklassen eine Rolle. Nähere Informationen zu diesen kann man bei Bedarf aus jedem Taschenbuch Mathematik erfahren.

Arkusfunktionen (Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich):
$y = \arcsin x \qquad y = \arccos x \qquad y = \arctan x \qquad y = \operatorname{arccot} x$

Hyperbolische Funktionen:

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ $\quad y = \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Areafunktionen sind die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen:

$y = ar\sinh x \quad y = ar\cosh x \quad y = ar\tanh x \quad y = ar\coth x$

Übungen

4.1 Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen $y = f(x)$ und skizzieren Sie ihre Graphen (ohne Erstellung einer Wertetabelle; Funktionen einer Teilaufgabe in einem Koordinatensystem darstellen)

a) $y = \frac{1}{2}x - 1; \quad y = -\left(\frac{1}{2}x - 1\right); \quad y = \frac{1}{2}(-x) - 1$

b) $y = -2x + 1,5; \quad y = -2(x+2) + 1,5; \quad y = 0,3x - 0.7$

c) $y = 2x^2; \quad y = (2x)^2; \quad y = 2x^2 - 2$

d) $y = (x-1)^2; \quad y = x^2 - 2x; \quad y = -x^2 + 4x - 2$

e) $y = \dfrac{1}{x+1}; \quad y = 3\dfrac{x}{x+1}; \quad y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

f) $y = \sqrt{x+1}; \quad y = -\sqrt{x+1} + 1; \quad y = \sqrt{-x+1}$

g) $y = \sqrt[3]{x+2}; \quad y = \left|\sqrt[3]{x+2} - 1\right|; \quad y = -\sqrt[3]{-x+2}$

h) $y = \ln(x-1); \quad y = -\ln(x-1) + 2; \quad y = \ln(1-x)$

i) $y = 2^{x+1}; \quad y = -2^x + 1; \quad y = |2^x - 2|$

j) $y = \begin{cases} e^x - 1 & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

k) $y = \sin 2x; \quad y = 2\sin x; \quad y = \sin\left(-\dfrac{x}{2}\right)$

4.2 Schränken Sie in den folgenden Fällen gegebenenfalls den Definitionsbereich so ein, dass eine bijektive (eineindeutige) Funktion entsteht! Geben Sie sodann die Umkehrfunktion an!

a) $y = x^2 + 1$ $\quad$ b) $y = |2x + 4|$ $\quad$ c) $y = 2x^3 + 2$

d) $y = 2\sin x \cos x$ $\quad$ e) $y = \ln(2x+3) - 4$

4.3 Stellen Sie die Exponential- und Logarithmusfunktionen als solche mit der natürlichen Basis *e* dar!

a) $y = 2 \cdot 3^{2x}$ $\quad$ b) $y = 0,3^{4x} - 1$ $\quad$ c) $y = 3\log_5 x$ $\quad$ d) $y = 2\lg(3x+1)$

4.4 Wie unterscheiden sich die Graphen der Funktionen

a) $y = f(x)$ $\quad$ b) $y = f(x) + y_0$ $\quad$ c) $y = f(x - x_0)$ $\quad$ d) $y = f(x - x_0) + y_0$ $\quad$?

4.5 Eine harmonische Schwingung läßt sich durch die Gleichung $y = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$ beschreiben. Dabei ist A die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und α die Anfangsphase.

Wie beeinflussen die Parameter A, ω und α den Graphen der Sinusfunktion? Skizzieren Sie die Graphen für

a) $A = 1,\ \alpha = 0,\ \omega = 0,5\ bzw.\ \omega = 2$

b) $\omega = 1,\ \alpha = 0,\ A = 0,5\ bzw.\ A = 2$

c) $A = 1,\ \omega = 1,\ \alpha = -\frac{\pi}{6}\ bzw.\ \alpha = \frac{\pi}{6}$

4.6 Welche Periode haben die Funktionen

a) $y = \sin x + \cos x$ $\quad$ b) $y = \sin x \cdot \cos x$ $\quad$ c) $y = \tan 2x$?

4.7 Welche Anfangstemperatur ϑ_0 darf eine Flüssigkeit in einem Behälter höchstens haben, wenn sie durch eine Rohrschlange mit der konstanten Temperatur $\vartheta_1 = 15°$ in einer dreiviertel Stunde auf 90° und in 2,5 Sunden auf 30° abgekühlt sein soll?

Hinweis: Die Temperaturabnahme vom Anfangswert ϑ_0 auf die Temperatur ϑ_1 des Kühlmediums verläuft exponentiell nach der Gleichung

$$\vartheta = \vartheta_1 + (\vartheta_0 - \vartheta_1)\cdot e^{\kappa t}.$$

Dabei ist κ eine Materialkonstante mit der Maßeinheit $[\frac{1}{h}]$.

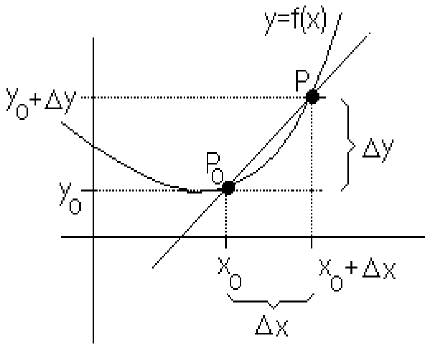
4.8 a) Bestimmen Sie eine lineare Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_0(1;2)$ und $P_1(3;7)$ geht!
b) Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, deren Graph durch die Punkte $P_0(-1;3)$, $P_1(0;-1)$ und $P_2(1;3)$ geht!

4.9 Welchen Winkel bildet die Gerade mit der x-Achse in positiver Richtung?
a) $y = 2x$ b) $y = 3x + 4$ c) $3(y-1) = 12x + 5$

5. Differenzieren und Integrieren

5.1 Ableitung einer Funktion

Wir betrachten eine Funktion $y = f(x)$ und bezeichnen mit Δx den Zuwachs des Argumentes x. Dann erfährt die abhängige Variable y den Zuwachs $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. (Siehe Skizze!)



In vielen naturwissenschaftlichen Fragestellungen taucht der sogenannte Differenzenquotient auf:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

wobei $x_1 = x_0 + \Delta x$,

$$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y.$$

Geometrisch interpretiert, gibt er den Anstieg der Sekante an (vgl. Skizze). In technischen Anwendungen handelt es sich oft um einen Durchschnittswert.

Beispiel 5.1

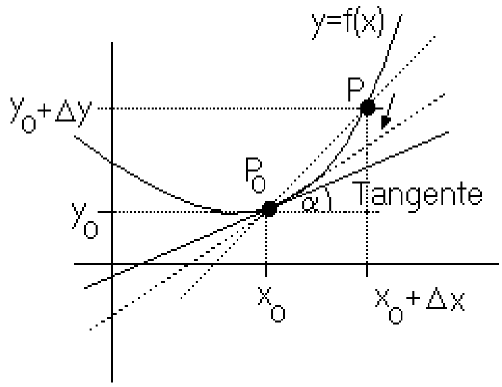
a) Durchschnittsgeschwindigkeit: $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{Wegdifferenz (zurückgelegter Weg)}}{\text{Zeitdifferenz (Zeitspanne)}}$

b) Durchschnittsbeschleunigung:

• $= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{Geschwindigkeitsdifferenz (-änderung)}}{\text{Zeitdifferenz (Zeitspanne)}}$

c) Durchschnittsstromstärke: • $= \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_1 - Q_0}{t_1 - t_0} = \frac{\text{Ladungsdifferenz (-änderung)}}{\text{Zeitdifferenz (Zeitspanne)}}$

Für den Grenzübergang $\Delta x \to 0$ erhält man geometrisch den Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle x_0.



Definition: Die Funktion $y = f(x)$ heißt in x_0 *differenzierbar*, wenn der folgende Grenzwert existiert

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Für die *Ableitung* (oder auch *Differentialquotient*) schreibt man $y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$.
In technischen Anwendungen, wenn die unabhängige Variable die Zeit t ist, bevorzugt man auch die Schreibweise $\dot{y}$.

Beispiel 5.2
Betrachtet man im Beispiel 5.1 $\Delta t \to 0$, so erhält man statt des Durchschnittswertes den Augenblickswert.

a) $v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}$ (Geschwindigkeit)
b) $a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$ (Beschleunigung)
c) $i = \dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$ (Stromstärke)

Beispiel 5.3
Man bestimme die Ableitung von $y = x^2$.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$
$$\Rightarrow y' = (x^2)' = 2x.$$

Eine Tabelle der Ableitungen elementarer Funktionen finden Sie in jedem Taschenbuch der Mathematik. **Die am häufigsten vorkommenden Ableitungen sollte man nach einiger Übung beherrschen**, **ohne nachsehen zu müssen**! Hierzu gehören die folgenden:

Funktion	$f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Definitionsbereich
Potenzfunktion	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}$, falls $\alpha \in \mathbb{N}$ $x \neq 0$, falls $(-\alpha) \in \mathbb{N}$ $x > 0$, sonst
Trigonometrische Funktionen	$\sin x$ $\cos x$ $\tan x$	$\cos x$ $-\sin x$ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k$ ganz
Arkusfunktionen	$\arcsin x$ $\arctan x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\frac{1}{1+x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$ $x \in \mathbb{R}$
Exponentialfunktion	e^x a^x	e^x $(\ln a)\cdot a^x$	$x \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$, und $a > 0, a \neq 1$
Logarithmusfunktion	$\ln\lvert x\rvert$ $\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$ $\frac{1}{(\ln a)\cdot x}$	$\lvert x\rvert \neq 0$ $x \neq 0$ und $a > 0, a \neq 1$

5.2 Technik des Differenzierens

Funktionen differenziert man unter Verwendung der Ableitungen der Grundfunktionen und den Differentiationsregeln.

Faktorregel: $[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$

Beispiel 5.4 a) $y = \frac{2}{3}x^3 \Rightarrow y' = \frac{2}{3}(x^3)' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 = 2x^2$
b) $y = 2\sqrt{x} \Rightarrow y' = 2(\sqrt{x})' = 2\cdot(x^{1/2})' = 2\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Summenregel: $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

Beispiel 5.5 a) $y = 2^x + x^2 \Rightarrow y' = (\ln 2)\cdot 2^x + 2x$
b) $y = 2\sin x - 3\tan x \Rightarrow y' = 2\cos x - 3(1 + \tan^2 x)$

Produktregel: $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ oder kürzer: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Beispiel 5.6 a)
$y = x^2\cos x \Rightarrow y' = [x^2]'\cos x + x^2[\cos x]' = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2\sin x$
b) $y = (x-1)\ln x \Rightarrow y' = (x-1)'\ln x + (x-1)\cdot[\ln x]' = 1\cdot\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x} = \ln x - \frac{1}{x} + 1$

Quotientenregel: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$ oder kürzer: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$

Beispiel 5.7 a) $y = \frac{x-1}{x^2-2}$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x-1)'(x^2-2) - (x-1)(x^2-2)'}{(x^2-2)^2} = \frac{1\cdot(x^2-2) - (x-1)\cdot 2x}{(x^2-2)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x^2-2)^2}$$

b) $y = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2}$

$= \frac{1}{(\cos x)^2}$

Kettenregel: $[f(g(x))]' = f'(u)\cdot g'(x)$ mit $u = g(x)$

In anderer Schreibweise: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ (Man erweitert formal einfach mit du).

Praktische Berechnung:

1. Schritt: Man bestimmt von der verketteten Funktion $y = f(g(x))$ die äußere Funktion $y = f(u)$ und die innere Funktion $u = g(x)$. (Im konkreten Beispiel natürlich nicht so offensichtlich zu sehen.)

2. Schritt: Man bildet die Ableitungen $\frac{dy}{du} = f'(u)$ und $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

3. Schritt: Man bildet das Produkt $f'(u)\cdot g'(x)$ und substituiert $u = g(x)$.

Beispiel 5.8

a) $y = (3x^2 + 5)^4$: | äußere Funktion: $y = u^4 \Rightarrow y' = 4u^3$ | innere Funktion: $u = 3x^2 + 5 \Rightarrow u' = 6x$ |

$\Rightarrow y' = 4u^3\cdot 6x = 4(3x^2+5)^3\cdot 6x = 24x(3x^2+5)^3$

b) $y = \cos(x^3 - 1)$: | äußere Funktion: $y = \cos u \Rightarrow y' = -\sin u$ | innere Funktion: $u = x^3 - 1 \Rightarrow u' = 3x^2$ |

$\Rightarrow y' = -\sin u\cdot 3x^2 = -3x^2 \sin(x^3 - 1)$

c) $y = \ln(1 + \sqrt{x})$: | äußere Funktion: $y = \ln u \Rightarrow y' = \frac{1}{u}$ | innere Funktion: $u = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |

$\Rightarrow y' = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

d) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2}$:

| äußere Funktion: $y = \arcsin u \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

innere Funktion: $u = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow u' =$??? (Nebenrechnung!) |

Nebenrechnung $u = \sqrt{1-x^2}$: | äußere Funktion: $u = \sqrt{v} \Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{v}}$ | innere Funktion: $v = 1 - x^2 \Rightarrow v' = -2x$ |

$\Rightarrow u' = \frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ende Nebenrechnung)

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{|x|}\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für } -1 < x < 0 \end{cases}$$

Übungen

5.1 Bestimmen Sie die 1. Ableitung $f'(x)$ folgender Funktionen $f(x)$! Für welche Werte ist sie nicht definiert?

a) $y = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{x}$ b) $y = a^2x^3 - \sqrt{b}\,x^2 + \frac{c}{2}x - 1$ c) $y = (\sqrt{x} - 1)(1 + \sqrt{x})$

d) $y = (1 - x^{-3})(\frac{1}{x^2} - 2)$ e) $y = \frac{\sin x}{1 + (\cos x)^2}$ f) $y = x \cdot \arcsin x$

g) $y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$ h) $y = \frac{2x^3-3}{x^2}$ i) $y = \frac{\ln x}{x}$

j) $y = (1 - x^4)^2$ k) $y = (1 - x^4)^{200}$ l) $y = \sin x \cdot 4^x$

m) $y = 3^{x^2}$ n) $y = (3^x)^2$ o) $y = 2\sin(\frac{a}{x})$

p) $y = \frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{1-x^2}$ q) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ r) $y = e^x \tan x$

s) $y = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$ t) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ u) $y = x \cdot e^{-x^2}$

5.2 Fassen Sie den analytischen Ausdruck als Funktion der angegebenen Variablen auf und bestim men Sie die Ableitung bezüglicher dieser Variablen!

a) $R(\omega) = A\cos(x + \omega t)$ b) $v(R_1) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ c) $s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin(\alpha t)$

d) $A(B) = C \cdot D^B - F \cdot B^D$ e) $\varphi(t) = \frac{1}{k}\ln(k\omega_0 t + 1)$ f) $v(s) = \sqrt{\frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{2ks}{m}})}, \quad s \geq 0$

g) $A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ h) $R(T) = a \cdot e^{\frac{b}{T}}$ i) $I(n) = zU_q\frac{n}{zR_a + R_i n^2}$

5.3 Welchen Winkel bildet die Tangente im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ an die Kurve $y = f(x)$ mit der x-Achse?

a) $y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$ b) $y = \sin(\sqrt{2x}), \quad x_0 = \frac{1}{2}$ c) $y = x\sqrt{x + 1}, \quad x_0 = 3$

5.4 Weitere Übungen zum Differenzieren:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+4}$

d) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2+4)^2}$ e) $f(x) = xe^x$ f) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

g) $f(x) = \frac{x\sin x}{x^2-1}$ h) $f(x) = \sqrt{\sin(4x)}$ i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-2}{2x+1}}$

j) $f(x) = x^{\sin x}$ k) $f(x) = \frac{x}{3x-1} + x^2\sqrt{2x - 1}$ l) $f(x) = x(\ln x)^2$

m) $f(x) = x^2e^{-x^2} + e^x\cos x$ n) $f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ o) $f(x) = \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}ln\tan\frac{x}{2}$

p) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$ q) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ r) $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$

s) $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$ t) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ u) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

v) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ w) $f(x) = \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3}}$ x) $f(x) = \sqrt[3]{(2x + 1)^2}$

y) $f(x) = e^{ax}\cos(bx)$ z) $f(x) = \ln\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ α) $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$

β) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$ γ) $f(x) = |2x|$ δ) $f(x) = \cos^2 x + \sin|x|$

5.3 Einfache Integrationsregeln

Hinweis: Die Integralrechnung wird im Mathematik-Grundstudium noch einmal ausführlich behandelt. Zuvor werden aber einfache Grundkenntnisse in Physik benötigt, so dass Sie die folgenden einfachen Beispiele und Aufgaben auf jeden Fall lösen sollten!

Da auf Grund der Definition des unbestimmten Integrals

$$F'(x) = f(x) \iff \int f(x)dx = F(x) + C$$

gilt, kann man aus der Tabelle der Ableitungen elementarer Funktionen (siehe Abschnitt 5.1) eine **Tabelle der Grundintegrale** zusammenstellen, und diese durch Differentiation unmittelbar nachprüfen.

Beispiel 5.9

a) $\int x^{\alpha}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$, denn $\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]' = (\alpha+1)\frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\alpha+1} = x^{\alpha}$

b) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, denn $[-\cos x]' = -(-\sin x) = \sin x$.

Die folgenden einfachen **Integrationsregeln** kann man ebenfalls durch Differentiation sofort überprüfen.

$$\boxed{\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx} \qquad (1)$$

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx} \qquad (2)$$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)} \qquad (3)$$

Mit Hilfe der Grundintegrale und dieser Integrationsregeln können schon relativ viele Funktionen integriert werden. Dabei ist es nützlich, konstante Faktoren zu Beginn der Rechnung abzuspalten und Brüche sowie Wurzelausdrücke der Variablen in Potenzschreibweise darzustellen.

Beispiel 5.10

a) $\int 11x^7 dx$ Man kann den konstanten Faktor 11 vor das Integral 'ziehen' und die Aufgabe auf das Grundintegral $\int x^n dx$ zurückführen: $\int 11x^7 dx = 11\int x^7 dx = \frac{11}{8}x^8 + C$

b) $\int (\sqrt{x^3} - \cos x)dx \qquad (x > 0)$

Beide Summanden führen auf Grundintegrale:

$$\int (\sqrt{x^3} - \cos x)dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx - \int \cos x dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - (\sin x) + C = \frac{2}{5}\sqrt{x^5} - \sin x + C$$

c) $\int \frac{3 - 5x + 7x^3}{x^4}dx \qquad (x \neq 0)$

Der Integrand wird zunächst umgeformt, indem man den Zähler gliedweise durch x^4 dividiert.

$$\int \frac{3-5x+7x^3}{x^4}dx = \int \left(\frac{3}{x^4} - \frac{5}{x^3} + \frac{7}{x}\right)dx = 3\int x^{-4}dx - 5\int x^{-3}dx + 7\int \frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{3x^{-3}}{-3} - \frac{5x^{-2}}{-2} + 7\ln|x| + C = -\frac{1}{x^3} + \frac{5}{2x^2} + 7\ln|x| + C$$

d) $\int \cos(5x-1)dx$

Die Integrationsregel (3) kann mit $ax + b = 5x - 1$ auf das Grundintegral $\int \cos x dx$ angewendet werden. $\int \cos(5x-1)dx = \frac{1}{5}\sin(5x-1)+C$

e) $\int \frac{dx}{9+16x^2}$

Mit 'etwas Fantasie' erinnert des Integral an das Grundintegral $\int \frac{dx}{1+x^2}$. Man formt zunächst den Integranden um: $\int \frac{dx}{9+16x^2} = \int \frac{dx}{9(1+(\frac{4}{3}x)^2)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(\frac{4}{3}x)^2}$.

Nun kann die Integrationsregel (3) mit $ax+b = \frac{4}{3}x$ angewendet werden.

$\frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(\frac{4}{3}x)^2} = \frac{1}{9}\cdot\frac{3}{4}\arctan(\frac{4}{3}x)+C = \frac{1}{12}\arctan(\frac{4}{3}x)+C$

5.4 Integration durch Substitution

Die sogenannte **Methode der Integration durch Substitution** beruht auf der Idee, den Integranden im Integral $\int f(x)dx$ durch Einführung einer neuen Variablen (*Durchführung einer Substitution*) in ein 'einfacher' gebautes oder sogar in ein Grundintegral zu überführen. Für den Anfang genügt es, wenn Sie in dem folgenden Spezialfall das Integral durch Substitution lösen können.

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \left|\begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ x & = & \varphi(t) \\ \frac{dx}{dt} & = & \varphi'(t) \\ \Rightarrow dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{array}\right| = \int f(x)dx = F(x)+C = F(\varphi(t)) \;+C.$$

Durch die spezielle Form des Integranden $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ bietet sich sofort die Substitution $x = \varphi(t)$ an, die bei Kenntnis des Integrals $\int f(x)dx$ zum Ziel führt. Die Schwierigkeit besteht allerdings darin, diese spezielle Form bei einem konkreten Beispiel auch wirklich zu erkennen.

Beispiel 5.11 a) Man bestimme $\int (\sin t)^2 \cos t\, dt$

Lösung: Der Integrand $(\sin t)^2\cos t$ hat die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, wobei $\varphi(t) = \sin t$ ist (denn $\cos t$ ist ja die Ableitung von $\sin t$). Es bietet sich also die Substitution $x = \sin t$ an.

$$\int (\sin t)^2 \cos t\, dt = \left|\begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ x & = & \sin t \\ \frac{dx}{dt} & = & \cos t \\ \Rightarrow dx & = & \cos t\, dt \end{array}\right| = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}+C = \frac{\sin^3 t}{3}+C.$$

b) Oft hat der gegebene Integrand zwar nicht die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, kann aber durch "*Erweitern*" mit einem konstanten Faktor auf diese Form gebracht werden.

Man bestimme $\int x\cdot\sqrt{x^2+1}\; dx$

Lösung: Da $(x^2+1)' = 2x$ ist, kann der Integrand $x\sqrt{x^2+1}$ durch erweitern mit 2 auf die Form $\frac{1}{2}(2x)\sqrt{x^2+1}$ gebracht werden. Es bietet sich also die Substitution $u = x^2+1$ an.

(Das Erweitern muß man nicht unbedingt durchführen, es reicht zu erkennen, daß der Integrand von einem konstanten Faktor abgesehen die Form $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ hat.)

$$\int \sqrt{x^2+1}\, x\,dx = \left| \begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ u & = & x^2+1 \\ \frac{du}{dx} & = & 2x \\ \Rightarrow du & = & 2x\,dx \end{array} \right| = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{u^3} + C = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{(x^2+1)^3} + C$$

c) Im nächsten Beispiel hat der Integrand nicht die Form $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$, kann aber durch elementare Umformungen auf die gewünschte Form gebracht werden. Man bestimme $\int \sin^3 x\,dx$

Lösung: Durch die Umformung $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ wird der Integrand auf die Form $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ mit $\varphi(x) = \cos x$ gebracht. Mithin führt die Substitution $u = \cos x$ zum Ziel.

$$\int \sin^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \left| \begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ u & = & \cos x \\ \frac{du}{dx} & = & -\sin x \\ \Rightarrow du & = & -\sin x\,dx \end{array} \right| = \int (1-u^2)(-du) =$$

$$-u + \frac{u^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Eine wichtiger Spezialfall ist die *lineare Substitution* $x = \varphi(t) = at+b$. Es gilt

$$\int f(at+b)dt = \left| \begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ x & = & at+b \\ \frac{dx}{dt} & = & a \\ \Rightarrow dx & = & a\,dt \end{array} \right| = \int f(x)\frac{dx}{a} = \frac{1}{a}F(x) + C = \frac{1}{a}F(at+b) + C. \quad (a \neq 0)$$

Diese Formel haben wir schon als Integrationsregel (3) im Abschnitt ”Einfache Integrationsregeln” kennengelernt. Nach persönlichem Geschmack sollte man entscheiden, ob man lieber mit der fertigen Integrationsregel arbeitet oder etwas ’umständlicher’ und jedesmal detailliert die lineare Substitution durchführt.

Ein weiterer Sonderfall soll nicht unerwähnt bleiben.

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}dt = \left| \begin{array}{lcl} \text{Substitution:} & & \\ x & = & \varphi(t) \\ \frac{dx}{dt} & = & \varphi'(t) \\ \Rightarrow dx & = & \varphi'(t)\,dt \end{array} \right| = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C = \ln|\varphi(t)| + C, \quad (\varphi(t) \neq 0)$$

Beispiel 5.12

a) $$\int e^{4x+6}dx = \left| \begin{array}{lcl} \text{Subst.:} & & \\ u & = & 4x+6 \\ du & = & 4dx \end{array} \right| = \int e^u \frac{du}{4} = \frac{1}{4}e^u + C = \frac{1}{4}e^{4x+6} + C$$

b) $$\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+8}dx = \left| \begin{array}{lcl} \text{Subst.:} & & \\ u & = & 3x^2+5x+8 \\ du & = & (6x+5)dx \end{array} \right| = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|3x^2+5x+8| + C$$

Übungen

5.5 a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ b) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2x}}dx$ c) $\int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx$

5.6 a) $\int \frac{3x-4}{5x^2}dx$ b) $\int (2x+3)^2 dx$ c) $\int (2e^x - 7\cos x)dx$

5.7 a) $\int (6x^2 + \sin 2x)dx$ b) $\int \frac{2x + \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x}}dx$ c) $\int \frac{3e^{2x} + e^x \cos x}{e^x}dx$

5.8 a) $\int (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)dx$ b) $\int \frac{dx}{(2-5x)^{100}}$ c) $\int \frac{1}{\cos^2(3x+3)}dx$

5.9 a) $\int \cos^5 x \cdot \sin x dx$ b) $\int \frac{\ln x}{x}dx$ c) $\int \frac{xdx}{x^2+9}$

5.10 a) $\int xe^{-x^2}dx$ b) $\int \frac{3x^2dx}{(1-5x^3)^3}$ c) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

5.11 a) $\int \frac{(5+x)dx}{x^2+10x+30}$ b) $\int x\cos(x^2+1)dx$ c) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

5.12 a) $\int \frac{e^x dx}{(e^x-3)^3}$ b) $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+5}$ c) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$