DIFFERENZIALGLEICHUNGEN 1.ORDNUNG

Trennung der Variablen

Eine DGL der Form

$$\boxed{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$$

kann man u. U. geschlossen lösen:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

Lineare Differentialgleichungen

$$\boxed{y' + f(x) \cdot y = g(x)}$$

Allgemeine Lösung $y_A = y_H + y_P$:

$$\boxed{y_A = e^{-F(x)} \cdot \left(\int g(x) \cdot e^{F(x)} dx + C\right).}$$

Dabei ist $F(x) = \int f(x)dx$ und $C \in R$.

Liegt ein Anfangswertproblem vor, so ermittelt man anschließend mit Hilfe der Anfangsbedingung den/die Wert/e für die Integrationskonstante C.

Spezielle Nichtlineare DGL´en

a) Bernoullische Differentialgleichungen

$$\boxed{y' + b(x) \cdot y + c(x) \cdot y^{\alpha} = 0}$$

Mit der Substitution

$$u(x) = y^{1-a}$$

entsteht die lineare DGL

$$u' + (1 - a) \cdot b(x) \cdot u = (a - 1) \cdot c(x)$$

b) Riccatische Differentialgleichungen

$$\boxed{y' + b(x) \cdot y + c(x) \cdot y^2 = g(x)}$$

Kennt man eine spezielle Lösung y_p, so führt die Substitution

$$y' + b(x) \cdot y + c(x) \cdot y^{\alpha} = 0$$

auf eine Bernoullische DGL.

LINEARE DGL`EN 2.ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

$$\boxed{ay'' + by' + cy = g(x)}$$

1. Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen DGL $ay'' + by' + cy = 0$

Charakteristische Gleichung der DGL

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.$$

Es gibt stets 2 reelle **Fundamentallösungen** y_1 und y_2 der homogenen DGL:

1.Fall Zwei verschiedene reelle Wurzeln $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \qquad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

2.Fall Eine reelle Doppelwurzel $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$$y_1 = e^{\lambda x} \qquad y_2 = xe^{\lambda x}$$

3.Fall Ein komplexes Wurzelpaar $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \beta j$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x \qquad y_2 = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$\boxed{y_H = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

2. Schritt: Spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Störfunktion	Geeignete Ansatzfunktion
$g_1(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ Resonanzfall: $\lambda = 0$	$G_1(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n$
$g_2(x) = a \cdot \cos(kx)$ $g_3(x) = b \cdot \sin(kx)$ $g_4(x) = a \cdot \cos(kx) + b \cdot \sin(kx)$ Resonanzfall: $\lambda = \pm kj$	$G_2(x) = A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)$
$g_5(x) = e^{mx} (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n)$ Resonanzfall: $\lambda = m$	$G_5(x) = e^{mx} \left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n\right)$
$g_6(x) = e^{mx} \left(a \cdot \cos(kx) + b \cdot \sin(kx)\right)$ Resonanzfall: $\lambda = m \pm kj$	$G_6(x) = e^{mx} \left(A \cdot \cos(kx) + B \cdot \sin(kx)\right)$

Im Resonanzfall ist jeweils der Faktor x^r hinzuzufügen, wobei r die Vielfachheit der Wurzel ist.

LINEARE DIFFERENZIALGLEICHUNGSSYSTEME-SYSTEME 1.ORDNUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}}$$

Aus der **Charakteristischen Gleichung**

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ermittelt man die **Eigenwerte** λ_1 und λ_2.

Aus

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhält man dazugehörige **Eigenvektoren** $\begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix}$

und damit die **allgemeine Lösung des homogenen Systems**:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 x}.}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL erhält man über einen speziellen Ansatz oder über die Variation der Konstanten.

NUMERISCHE LÖSUNG VON ANFANGSWERTPROBLEMEN

DGL:	$y'(x) = f[x, y(x)]$
AB:	$y(x_0) = y_0$

Polygonzugverfahren von Euler-Cauchy:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)\ ,\ i = (0\ ,1\ ,2\ ,\ldots)}$$

Verbessertes Polygonzugverfahren (Verfahren von Heun):

$$\boxed{\begin{aligned} y^*_{i+1} &= y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})\right] \end{aligned}}\ ,\ i = (0\ ,1\ ,2\ ,\ldots)$$

Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

$$k_i^{(1)} = h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_i^{(2)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_i^{(1)}\right)$$

$$k_i^{(3)} = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{1}{2} \cdot k_i^{(2)}\right)$$

$$k_i^{(4)} = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_i^{(3)}\right)$$

$$\boxed{k_i = \frac{1}{6}\left(k_i^{(1)} + 2k_i^{(2)} + 2k_i^{(3)} + k_i^{(4)}\right)}$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + k_i}$$

i = 1, 2, 3, ...

REIHEN MIT KONSTANTEN GLIEDERN

Geometrische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ hat die Partialsummen: $s_k = \dfrac{1-q^{k+1}}{1-q}$

Konvergenz für $|q| < 1$; Bestimmte Divergenz für $q \geq 1$;
Unbestimmte Divergenz für $q \leq (-1)$

Harmonische Reihe: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n} = \infty$ ist bestimmt divergent.

Aber: $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ ist konvergent.

1. Kriterium (Vergleichskriterium):

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (I) und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ (II) Reihen mit **positiven Gliedern**, so gilt :

a) Aus der **Konvergenz** von (II) und der Beziehung $a_n \leq b_n$ für alle $n > n_0$ folgt die **Konvergenz** von (I).

b) Aus der **Divergenz** von (II) und der Beziehung $a_n \geq b_n$ für alle $n > n_0$ folgt die **Divergenz** von (I).

2. Kriterium (Wurzelkriterium):

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit **positiven Gliedern** und gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, dann ist die Reihe für $q < 1$ **konvergent** und für $q > 1$ **divergent**.

3. Kriterium (Quotientenkriterium):

Analog zum Wurzelkriterium gilt:

Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit **positiven Gliedern** und gilt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, dann ist die Reihe für $q < 1$ **konvergent** und für $q > 1$ **divergent**.

4. Kriterium (Leibniz-Kriterium):

Wenn in einer **alternierenden Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$, die Glieder betragsmäßig monoton abnehmen, d. h. $a_{n+1} < a_n$ für $n > n_0$ und gegen Null streben $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\right)$, so **konvergiert** die Reihe.

EINIGE KONKRETE REIHEN MIT KONSTANTEN GLIEDERN

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

POTENZREIHEN

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

bzw. allgemein

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$

<u>1. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert nur für x=0 bzw. $x=x_0$ (trivialer Fall).
Man sagt: Die Potenzreihe ist *nirgends konvergent*.

<u>2. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert für alle reellen x.
Man sagt: Die Potenzreihe ist *überall konvergent*.

<u>3. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert absolut in einem Intervall $(-R, R)$ bzw. $(x_0 - R, x_0 + R)$
und divergiert in $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ bzw. $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, \infty)$.
Für x = -R und x = R ist das Verhalten von Reihe zu Reihe unterschiedlich.

R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe:

$$\boxed{\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.}$$

TAYLOR-Reihen bzw. **MACLAURIN-Reihen** sind spezielle Potenzreihen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \quad \text{bzw.} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

ÜBERSICHT ÜBER DIE WICHTIGSTEN REIHENENTWICKLUNGEN

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

2. $$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n \quad , \quad x \in (0,2]$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad , \quad x \in (-1,1]$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad , \quad x \in [-1,1)$$

3. $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

4. $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

5. $$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

6. $$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

7. $$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n \quad , \quad x \in [-1,1] \quad \text{(Binomische Reihe)}$$

8. $$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

9. $$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

10. $$\operatorname{ar\,sinh} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

11. $$\operatorname{ar\,tanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

FOURIERREIHEN

Reelle Darstellung (Periode $2p$):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(nx + \varphi_n)\right]$$

$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)dx$	$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)dx$	$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)dx$

$$a_n = A_n \cdot \cos(\varphi_n) \quad , \quad b_n = -A_n \cdot \sin(\varphi_n)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad \tan(\varphi_n) = -\frac{b_n}{a_n} \qquad n=1,2,3...$$

Für gerade Funktionen sind alle $b_n = 0$ und für ungerade Funktionen alle $a_n = 0$.

Komplexe Darstellung (Periode $2p$):

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-jnx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jnx}$$

$c_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)dx$	$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot e^{-jnx}dx$

$$n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - j \cdot b_n) \quad , \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + j \cdot b_n) \quad , \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \quad b_0 = 0$$

$$A_n = 2 \cdot |c_n| \quad , \quad \varphi_n = \arg(c_n)$$

T-periodische Funktionen:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$$

$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(\tau)d\tau$	$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(\tau) \cdot \cos(n\omega\tau)d\tau$	$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^{T} f(\tau) \cdot \sin(n\omega\tau)d\tau$

Für gerade Funktionen sind alle $b_n = 0$ und für ungerade Funktionen alle $a_n = 0$.

FOURIERSCHE INTEGRALFORMEL

Unter bestimmten Voraussetzungen kann eine Funktion f(t) wie folgt dargestellt werden:

$f(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau d\omega$	$f(t)=\int_0^\infty[a(\omega)\cdot\cos(\omega t)+b(\omega)\cdot\sin(\omega t)]d\omega$
$f(t)=\int_0^\infty[A(\omega)\cdot\cos(\omega t+\varphi(\omega))]d\omega$	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^\infty e^{j\omega t}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau d\omega$

$f(t)=\int_{-\infty}^\infty c(\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$	$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\omega$

mit

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot\cos(\omega\tau)d\tau \quad , \quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot\sin(\omega\tau)d\tau$$

$$A(\omega)=\sqrt{[a(\omega)]^2+[b(\omega)]^2} \quad , \quad \varphi(\omega)=\arg(c(\omega))$$

Wichtige Begriffe:

$A(\omega)$ ... Amlitudendichtefunktion (Amplitudenspektrum)

$\varphi(\omega)$ ... Phasendichtefunktion (Phasenspektrum)

$a(\omega)$ ... Kosinusspektrum $\qquad$ $b(\omega)$ ... Sinusspektrum

FOURIER-TRANSFORMATION

$$\boxed{F(\omega)=2\pi\cdot c(\omega)=\int_{-\infty}^\infty f(\tau)\cdot e^{-j\omega\tau}d\tau}$$

wird als **Spektralfunktion** oder auch als **FOURIER-Transformierte** der Zeitfunktion f(t) bezeichnet.

Wichtige Rechenregeln:

Zeitbereich		**Frequenzbereich**
$\alpha\cdot f(t)+\beta\cdot g(t)$		$\alpha\cdot F(\omega)+\beta\cdot G(\omega)$
$f(a\cdot t)$		$\frac{1}{\lvert a\rvert}\cdot F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t-c)$		$e^{-j\omega c}\cdot F(\omega)$
$e^{j\gamma t}\cdot f(t)$		$F(\omega-\gamma)$
$f^{(n)}(t)$		$(j\omega)^n\cdot F(\omega)$
$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$		$\frac{1}{j\omega}\cdot F(\omega)$
$f(t)*g(t)$		$F(\omega)\cdot G(\omega)$

mit $f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^\infty f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau$ (Faltungsprodukt).

LAPLACE – TRANSFORMATION

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \qquad s = \delta + j\omega$$

Eigenschaften:

Zeitbereich	**Bildbereich**
$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$
$f(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{\alpha} \cdot F(\frac{s}{\alpha})$, $a > 0$
$f(t-c)$	$e^{-sc} \cdot F(s)$
$e^{zt} \cdot f(t)$	$F(s-z)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
$\frac{1}{n!} \int_0^\infty (t-\tau)^n \cdot f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s^{n+1}} \cdot F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$

Korrespondenztabelle:

Originalfunktion f(t)	**Bildfunktion** F(s)
$\frac{t^n}{n!}$, n=1,2,...	$\frac{1}{s^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \lvert a \rvert$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \lvert a \rvert$
$e^{(at)}$	$\frac{1}{s-a}$, $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$
$e^{(at)} \cdot \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$
$e^{(at)} \cdot \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$
$t \cdot \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
$t \cdot \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$, $\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{(at)} \cdot \frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$

VEKTORFELDER

$$\vec{f}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Kurvenintegrale

$$W = \int_{(C)} \vec{f}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{(C)} f_1(x,y,z)dx + f_2(x,y,z)dy + f_3(x,y,z)dz$$

berechnet man für die Kurve $C:\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\quad,\quad t_1 \le t \le t_2$ nach der Formel

$$W = \int_{(C)} \left(f_1(x,y,z)\cdot \dot{x}(t) + f_2(x,y,z)\cdot \dot{y}(t) + f_3(x,y,z)\cdot \dot{z}(t)\right)dt$$

wobei x, y und z durch x(t), y(t) und z(t) zu ersetzen sind.

POTENZIALFELDER
(GRADIENTENFELDER, KONSERVATIVE FELDER)

$$\vec{f}(\vec{r}) = -\text{grad } U$$

liegen vor, wenn die **Integrabilitätsbedingungen**

$$\text{rot } \vec{f} = \vec{0}$$

bzw. ausführlich

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

erfüllt sind.
Kurvenintegrale sind dann **wegunabhängig**.
Das auf den Punkt $P_0(x_0; y_0; z_0)$ bezogene Potential ist

$$U(\vec{r}) = U(x,y,z) = -\int_{P_0(x_0,y_0,z_0)}^{P(x,y,z)} f_1(\xi,\upsilon,\zeta)d\xi + f_2(\xi,\upsilon,\zeta)d\upsilon + f_3(\xi,\upsilon,\zeta)d\zeta$$

ROTOR (ROTATION, WIRBELSTÄRKE, WIRBELDICHTE)

$$rot\ \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Konservative Felder sind durch rot $\vec{f} = \vec{0}$ (**Wirbelfreiheit**) charakterisiert.

Rechenregeln:

$$\text{rot } (\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \text{rot } \vec{f}_1 + \text{rot } \vec{f}_2$$
$$\text{rot } (\alpha \vec{f}) = \alpha \cdot \text{rot } \vec{f}$$
$$\text{rot } (U \cdot \vec{f}) = U \cdot \text{rot } \vec{f} + (\text{grad } U) \times \vec{f}$$

DIVERGENZ (QUELLDICHTE)

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$

Ist div $\vec{f}(\vec{r}) > 0$, so heißt der Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ eine **Quelle**.
Ist div $\vec{f}(\vec{r}) < 0$, so heißt der Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ eine **Senke**.
Ist div $\vec{f}(\vec{r}) = 0$ in einem Gebiet, so heißt das Feld dort quellen- und senkenfrei.

Rechenregeln:

$$\text{div}(\vec{f}_1 + \vec{f}_2) = \text{div}\,\vec{f}_1 + \text{div}\,\vec{f}_2$$
$$\text{div}(\alpha \vec{f}) = \alpha \cdot \text{div}\,\vec{f}$$
$$\text{div}(U \cdot \vec{f}) = U \cdot \text{div}\,\vec{f} + \vec{f} \cdot (\text{grad } U)$$

Es gilt stets $\text{rotgrad}\,\vec{f} = \vec{0}$ und $\text{divrot}\,\vec{f} = 0$

KOMBINATORIK

1. Permutationen

$$\boxed{P_n = n!}$$

Sind unter den n Elementen

n_1 identische vom Typ 1,
n_2 identische vom Typ 2,
.
.
.
n_k identische vom Typ k,

(also $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$), so gibt es insgesamt

$$\boxed{P_{n;w} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

Permutationen mit Wiederholung.

2. Variationen ohne Wiederholung

$$\boxed{V_n^{(k)} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

3. Variationen mit Wiederholung

$$\boxed{V_{n;w}^{(k)} = n^k}$$

4. Kombinationen ohne Wiederholung

$$\boxed{C_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}}$$

5. Kombinationen mit Wiederholung

$$\boxed{C_{n;w}^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \binom{n+k-1}{k}}$$

ZUFÄLLIGE EREIGNISSE

1.) $A \subset B$: A zieht B nach sich. Wenn A eintritt, so ist auch B eingetreten.

2.) $\overline{A}$: Das zu A komplementäre Ereignis. $\overline{A}$ tritt genau dann ein, wenn A nicht eintritt.

3.) $C = A \cup B$: C ist gleich A plus B (A oder B). C tritt ein, wenn A oder B (oder beide) eintreten.

4.) $C = A \cap B$: C ist gleich A mal B (A und B). C tritt ein, wenn A und B eintreten.

A und B heißen **disjunkt (unvereinbar),** wenn $A \cap B = \emptyset$.

S ist das **sichere** Ereignis.

U ist das **unmögliche** Ereignis.

KLASSISCHE DEFINITION DER WAHRSCHEINLICHKEIT

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \ldots \cup E_{i_k}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Anzahl der für das Ereignis A günstigen Elementarereignisse}}{\text{Gesamtzahl der möglichen Elementarereignisse}}}$$

Merke: Die klassische Definition ist nur anwendbar, wenn ein Laplace´sches Ereignisfeld vorliegt (**endlich viele** Elementarereignisse, die alle **gleichmöglich** sind).

DIE AXIOMATISCHE DEFINITION DER WAHRSCHEINLICHKEIT

Axiom1: $0 \le P(A) \le 1$
Axiom2: $P(S) = 1$
Axiom3: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Axiom4: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$
Axiom5: $P(U) = 0$
Axiom6: $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$
Axiom7: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (Additionssatz)

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEITEN UND UNABHÄNGIGE EREIGNISSE

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \text{für } P(A)>0}$$

Allgemeiner Multiplikationssatz:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A/B)\cdot P(B)=P(B/A)\cdot P(A)}$$

Spezieller Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n$$

Formel der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\boxed{P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)\cdot P(A_i)}$$

Bayes`sche Formel:

$$\boxed{P(A_k/B)=\frac{P(B/A_k)\cdot P(A_k)}{P(B)}=\frac{P(B/A_k)\cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)\cdot P(A_i)}}$$

Für beide Formeln ist Voraussetzung, dass ein **vollständiges System von Ereignissen** A_1, A_2, . . . , A_n vorliegt, d.h.:

$$A_i\cap A_j=U \quad (i\neq j)$$

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S\,.$$

SPEZIELLE DISKRETE VERTEILUNGEN

1. Diskrete Gleichverteilung

$$\boxed{P(X = x_i) = \frac{1}{n},} \quad i = 1,2,3,...,n$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad D^2(X) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}$$

2. Binominalverteilung

Die Zufallsgröße

X = "Anzahl der Versuche, bei denen das Ereignis A eintritt"

ist binominalverteilt mit den Parametern n und p, wenn

a) ein Zufallsversuch n-mal unabhängig voneinander durchgeführt wird und

b) das Ereignis A bei jeder Versuchswiederholung dieselbe Wahrscheinlichkeit p besitzt.

Das Verteilungsgesetz hat die Gestalt

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}}$$

$$\boxed{E(X) = n \cdot p \quad , \quad D^2(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

3. Poisson-Verteilung

Für große n und kleine p kann man die Binominalveteilung näherungsweise durch die rechentechnisch leichter handhabbare **Poisson-Verteilung** ersetzen. Als Faustregel kann man die beiden Ungleichungen

$$\lambda = n \cdot p < 10 \quad \text{und} \quad 1500p < n$$

verwenden. Sind diese beiden erfüllt, so kann man bedenkenlos anstelle der Binominalverteilung das Verteilungsgesetz der Poisson-Verteilung verwenden, für das es geeignete Tabellen gibt:

$$\boxed{P(X = k) = \pi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad , \quad k=0,1,2,..}$$

$$\boxed{E(X) = D^2(X) = \lambda \,.}$$

SPEZIELLE STETIGE VERTEILUNGEN

1. Stetige Gleichverteilung (auf dem Intervall [a,b]):

Dichtefunktion	Verteilungsfunktion
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{für} \quad a \le t \le b \end{cases}$	$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{für} \quad a < x \le b \\ 1 & \text{für} \quad x > b \end{cases}$
$E(X) = \dfrac{a+b}{2} \quad , \quad D^2(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$	

2. Exponentialverteilung

Dichtefunktion	Verteilungsfunktion
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{für} \quad t > 0 \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$
$E(X) = \dfrac{1}{\lambda} \quad , \quad D^2(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$	

3. Normalverteilung

Dichtefunktion	Verteilungsfunktion
$f_{\mu;\sigma}(t) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F_{\mu;\sigma}(x) = \dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$

Wichtige Formeln:

$$F_{m;s}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{s}\right) \quad , \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x) \quad , \quad P(m-a < X < m+a) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{a}{s}\right) - 1$$

$1-s-\text{Regel}: \quad P(m-s < X < m+s) = 0.6826$

$2-s-\text{Regel}: \quad P(m-2s < X < m+2s) = 0.9545$

$3-s-\text{Regel}: \quad P(m-3s < X < m+3s) = 0.9973$

KOVARIANZ UND KORRELATIONSKOEFFIZIENT

für ein Paar (X,Y) von Zufallsgrößen

Kovarianz

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big((X - E(X))\cdot(Y - E(Y))\big) = E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y)$$

a) im diskreten Fall:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_i \sum_k (x_i - E(X))\cdot(y_k - E(Y))\cdot p_{ik}$$

b) im stetigen Fall:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (s - E(X))\cdot(t - E(Y))\cdot f(s,t)\,dt\,ds$$

Korrelationskoeffizient

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D(X)\cdot D(Y)}$$

a) im diskreten Fall:

$$\rho(X,Y) = \frac{\sum_i \sum_k (x_i - E(X))\cdot(y_k - E(Y))\cdot p_{ik}}{\sqrt{\sum_i (x_i - E(X))^2\cdot P(X = x_i)}\cdot\sqrt{\sum_k (y_k - E(Y))^2\cdot P(Y = y_k)}}$$

b) im stetigen Fall:

$$\rho(X,Y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (s - E(X))\cdot(t - E(Y))\cdot f(s,t)\,dt\,ds}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(s - E(X))^2\cdot f_x(s)\,ds}\cdot\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(t - E(Y))^2\cdot f_y(t)\,dt}}$$

Eigenschaften des Korrelationskoeffizienten:

1.) $-1 \le \rho(X,Y) \le 1$
   Für $\rho(X,Y) = 0$ heißen X, Y **unkorreliert**.
2.) X,Y **unabhängig** $\Rightarrow \rho(X,Y) = 0$
3.) $\rho(X,Y) = 0$ und (X,Y) **normalverteilt** $\Rightarrow$ X,Y **unabhängig**
4.) $\rho(X,Y) = \pm 1 \Rightarrow Y = aX + b \quad (a \ne 0)$ (mit Wahrscheinlichkeit 1)

PUNKTSCHÄTZUNGEN

Verteilung	zu schätzender Parameter	Punktschätzwert
Normalverteilung	μ	$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
	$\sigma^2 \quad (\mu \text{ bekannt })$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$
	$\sigma^2 \quad (\mu \text{ unbekannt })$	$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$
Exponentialverteilung	λ	$\frac{1}{\overline{x}}$
Poissonverteilung	λ	$\overline{x}$

BEREICHSSCHÄTZUNGEN (KONFIDENZSCHÄTZUNGEN)

(Normalverteilte Grundgesamtheit; Konfidenzniveau $1-a$)

Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für m bei bekanntem s^2:

$$\boxed{\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für m bei unbekanntem s^2:

$$\boxed{\overline{x} - t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{x} + t_{n-1;\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Konfidenzintervall für die Varianz s^2:

$$\boxed{\frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;\alpha_1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot s^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha_2}}}$$

mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ (üblicherweise wählt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$).