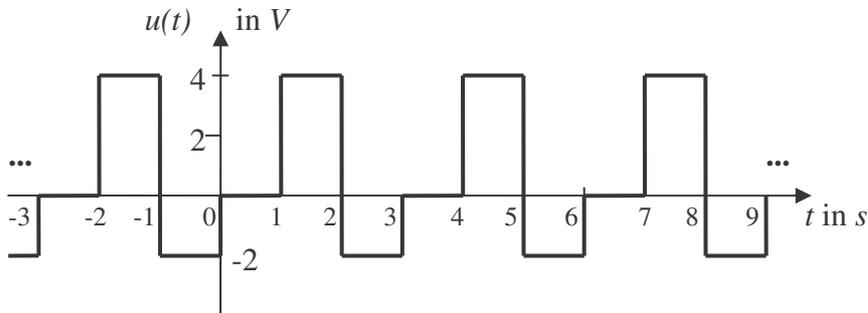


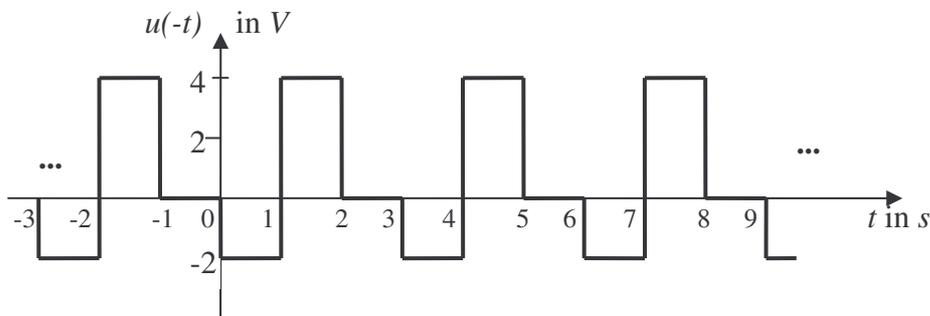
Aufgabe 1:

Zerlegen Sie das folgende periodische Signal in seinen geraden und seinen ungeraden Anteil und stellen Sie die ermittelten Anteile im Bereich $-3s \leq t \leq 9s$ grafisch dar!



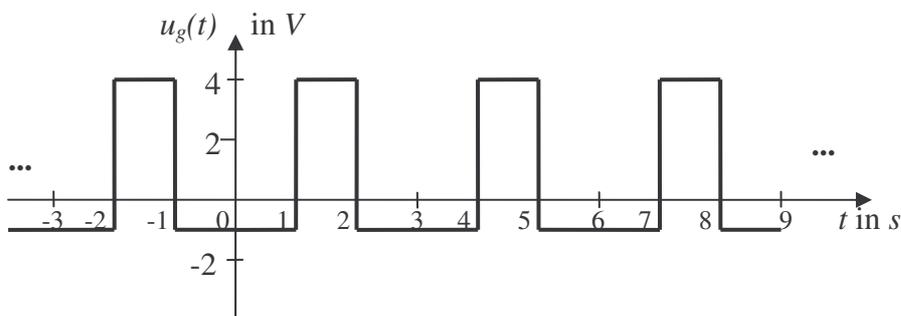
Lösung:

Ermittlung der Funktion $u(-t)$ durch Spiegelung der Funktion $u(t)$ an der u -Achse



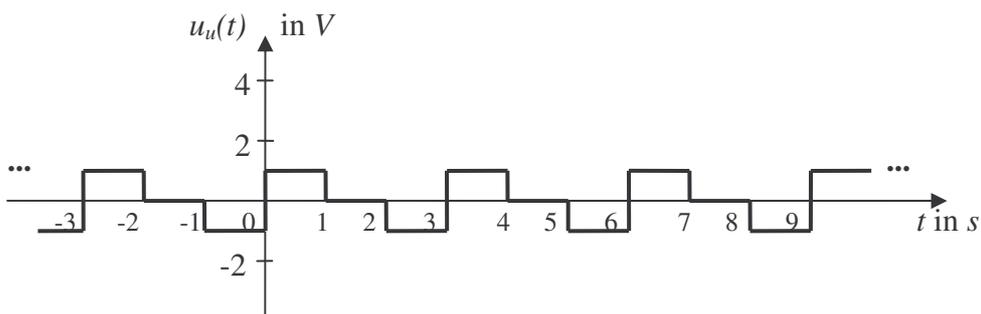
Ermittlung des geraden Anteils $u_g(t)$ durch grafische Addition gemäß

$$u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}$$



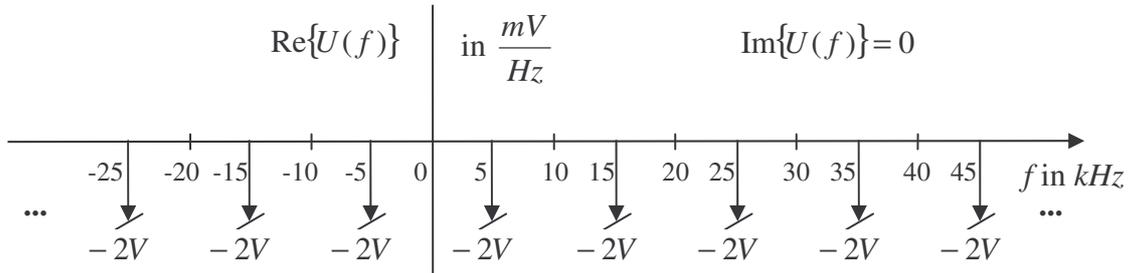
Ermittlung des ungeraden Anteils $u_u(t)$ durch grafische Addition gemäß

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}$$



Aufgabe 2:

Ermitteln Sie von dem gegebenen rein reellen periodischen Frequenzspektrum den Signalverlauf im Zeitbereich und stellen Sie das Ergebnis im Bereich von $-50\mu s \leq t \leq 350\mu s$ grafisch dar! Bezeichnen Sie sämtliche markanten Werte.

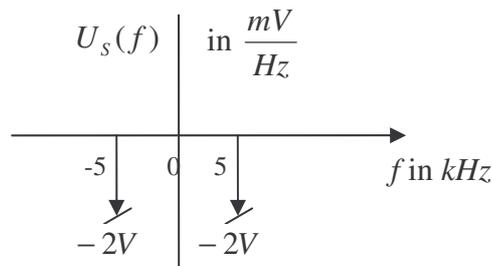


Lösung:

- Spektrum einer Periode $U_s(f)$

$$U_s(f) = -2V \cdot \delta(f + 5kHz) - 2V \cdot \delta(f - 5kHz)$$

oder grafische Darstellung



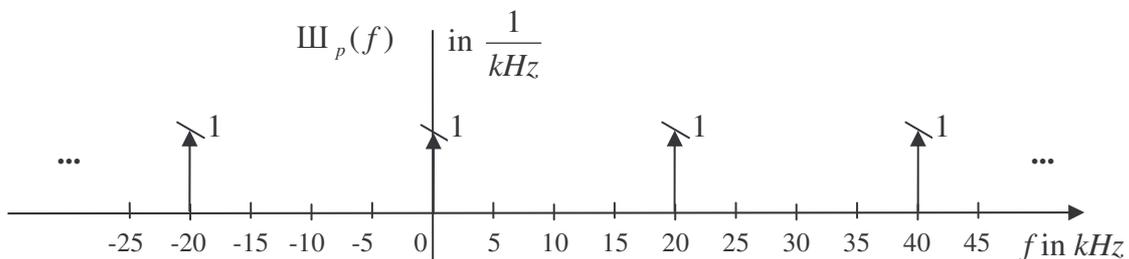
- Bestimmung der Periodifizierungsfunktion $\text{III}_p(f)$

spektrale Periode $f_p = 20kHz$

Scha-Funktion zur Periodifizierung

$$\text{III}_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 20kHz)$$

oder grafische Darstellung



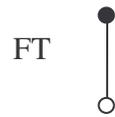
- Gesamtfunktion im Frequenzbereich als Faltung

$$U(f) = U_s(f) * \text{III}_p(f)$$

$$U(f) = [-2V \cdot \delta(f + 5kHz) - 2V \cdot \delta(f - 5kHz)] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 20kHz)$$

- Rücktransformation der spektralen Periode $U_s(f)$

$$U_s(f) = -2V \cdot \delta(f + 5kHz) - 2V \cdot \delta(f - 5kHz)$$

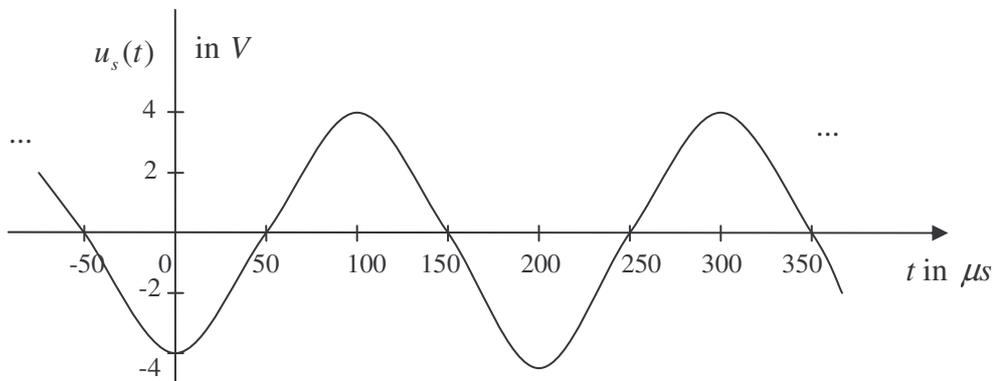


$$u_s(t) = -4V \cdot \cos(2\pi \cdot 5kHz \cdot t)$$

Periode der Zeitfunktion $t_p = \frac{1}{f_A} = \frac{1}{5kHz} = 200\mu s$

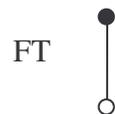
$$u_s(t) = -4V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{200\mu s} \cdot t\right)$$

oder grafische Darstellung



- Rücktransformation der Periodifizierungsfunktion $\text{III}_p(f)$

$$\text{III}_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 20kHz)$$

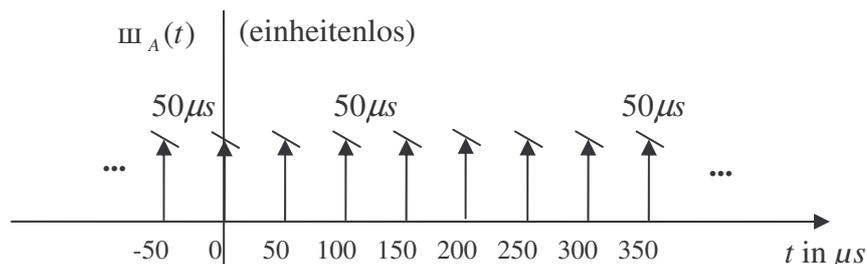


$$\text{III}_A(t) = t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$$

Abtastintervall $t_A = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{20kHz} = 50\mu s$

$$\text{III}_A(t) = 50\mu s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 50\mu s)$$

oder grafische Darstellung



- Gesamtfunktion im Zeitbereich als Multiplikation

$$u(t) = u_s(t) \cdot \text{III}_A(t)$$

$$u(t) = -4V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{200\mu s} \cdot t\right) \cdot 50\mu s \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 50\mu s)$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -200\mu V_s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right) \cdot \delta(t - n \cdot 50\mu s)$$

$$u_{n=-1}(t) = -200\mu V_s \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot \delta(t + 50\mu s) = 0$$

$$u_{n=0}(t) = -200\mu V_s \cdot \cos(0) \cdot \delta(t) = -200\mu V_s \cdot \delta(t)$$

$$u_{n=1}(t) = -200\mu V_s \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \delta(t - 50\mu s) = 0$$

$$u_{n=2}(t) = -200\mu V_s \cdot \cos(\pi) \cdot \delta(t - 100\mu s) = +200\mu V_s \cdot \delta(t - 100\mu s)$$

$$u_{n=3}(t) = 0$$

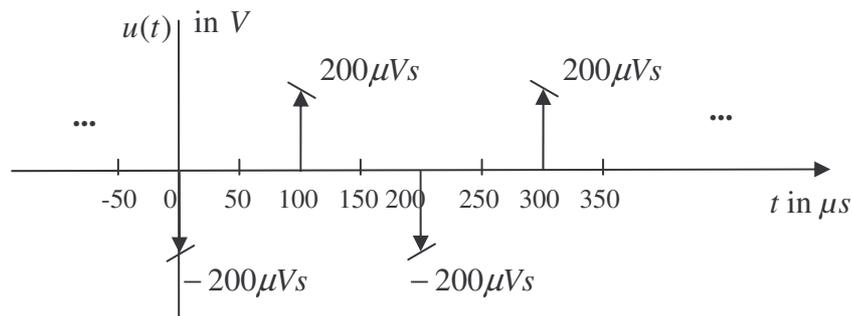
$$u_{n=4}(t) = -200\mu V_s \cdot \delta(t - 200\mu s)$$

$$u_{n=5}(t) = 0$$

$$u_{n=6}(t) = +200\mu V_s \cdot \delta(t - 300\mu s)$$

$$u_{n=7}(t) = 0$$

grafische Darstellung



Aufgabe 3:

Berechnen Sie von folgendem zeitdiskreten Signal

$$x(n) = \left[2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right) \right]^2 \quad \text{mit } n \text{ ganzzahlig}$$

die statistischen Parameter

- Gleichanteil und
- mittlere Signalleistung.

Lösung:

a) Bestimmen der zeitdiskreten Werte einer Periode

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x(n)	0	1	3	4	3	1	0	1	3	4

1 Periode, damit $N_p = 6$

Gleichanteil

$$\bar{x} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N_p-1} x(n)_p$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = 2}}$$

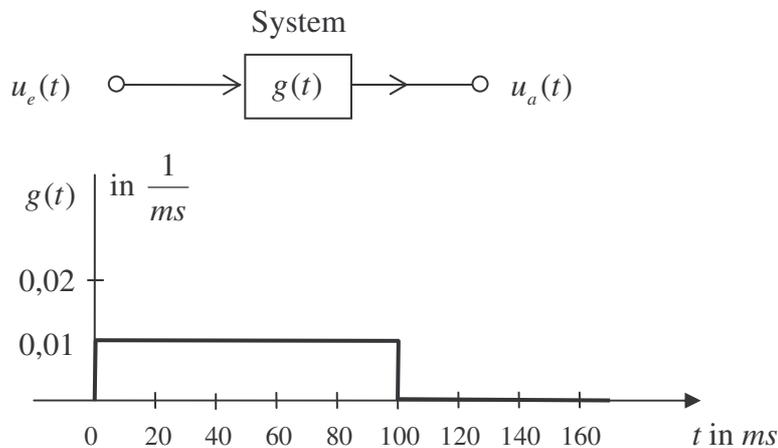
b) mittlere Signalleistung

$$P = \overline{x^2} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N_p-1} x^2(n)_p$$

$$\underline{\underline{P = 6}}$$

Aufgabe 4:

Ein reales System habe die Impulsantwort $g(t)$ eines Kurzzeitintegrators bzw. Spalttiefpasses entsprechend der folgenden Darstellung.

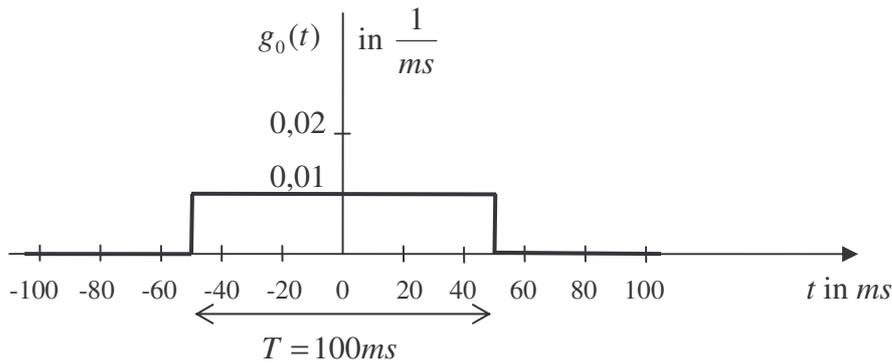


Ermitteln Sie

- den Betrag der Übertragungsfunktion $|G(f)|$ als grafische Darstellung im Frequenzbereich von $-30Hz \leq f \leq +30Hz$. Berechnen Sie den Wert für den Frequenzpunkt $f = 0$ und bezeichnen Sie die Frequenzwerte der Nullstellen in der grafischen Darstellung.
- den Phasenverlauf $\varphi(f)$ der Übertragungsfunktion als grafische Darstellung im Frequenzbereich von $-30Hz \leq f \leq +30Hz$ unter Angabe der Phasenwerte im Intervall zwischen $-\pi \leq \varphi(f) \leq +\pi$.
- die Gruppenlaufzeit $\tau_{Gr}(f)$ des Systems.

Lösung:

- zeitliche Verschiebung ändert den Betrag des Frequenzspektrums nicht



Fouriertransformation des nullpunktsymmetrischen Rechtecks ergibt

$$G_0(f) = g_0(t=0) \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot f)$$

$$G_0(f) = 0,01 \cdot \frac{1}{\text{ms}} \cdot 100\text{ms} \cdot \text{si}(\pi \cdot 100\text{ms} \cdot f)$$

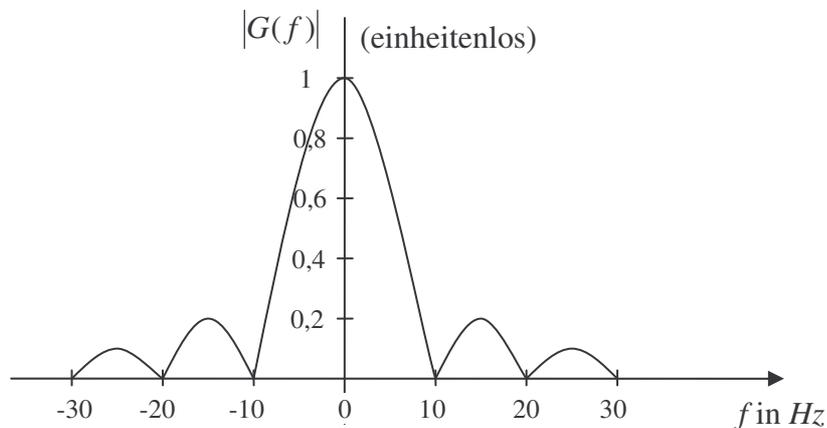
$$G_0(f) = \text{si}(\pi \cdot 100\text{ms} \cdot f)$$

$$\text{mit } 100\text{ms} = \frac{1}{10\text{Hz}} \text{ bzw. } \frac{1}{T} = \frac{1}{100\text{ms}} = 10\text{Hz}$$

$$G_0(f) = \text{si}\left(\pi \cdot \frac{1}{10\text{Hz}} \cdot f\right)$$

Betragsverlauf

$$|G(f)| = |G_0(f)| = |\text{si}(\pi \cdot 100\text{ms} \cdot f)| = \left| \text{si}\left(\pi \cdot \frac{1}{10\text{Hz}} \cdot f\right) \right|$$

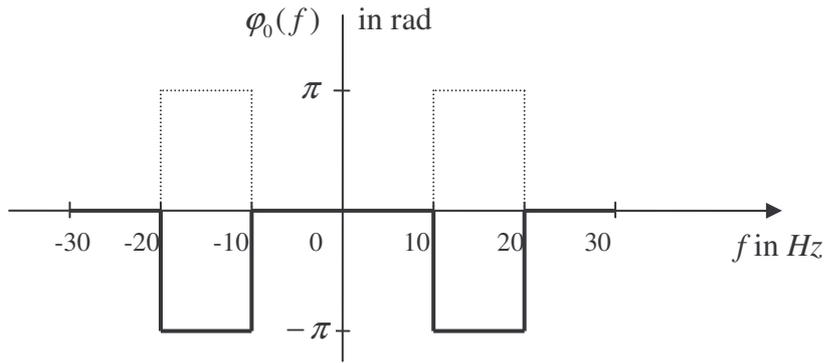


b)

ein reelles Rechteck mit geradem Zeitverlauf ergibt ein rein reelles und grades Frequenzspektrum mit den Phasenwerten

$$\varphi_0(f) = \begin{cases} 0 & \text{bei } G_0(f) > 0 \\ -\pi \text{ bzw. } +\pi & \text{bei } G_0(f) < 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{bei } G_0(f) = 0 \end{cases}$$

Phasenverlauf der nullpunktsymmetrischen Impulsantwort



bei $f = k \cdot 10\text{Hz}$ mit k ganzzahlig und $k \neq 0$ ist die Phase nicht definiert

Rechteck mit geradem Verlauf wurde um 50 ms nach rechts verschoben

$$g(t) = g_0(t - t_0)$$



$$G(f) = G_0(f) \cdot e^{-j2\pi_0 f}$$

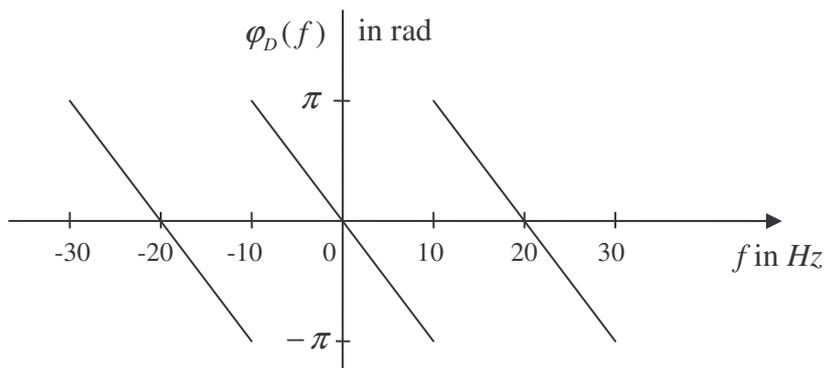
für die Phase gilt damit

$$\varphi(f) = \varphi_0(f) + \varphi_D(f)$$

$\varphi_D(f)$: Phase des komplexen Drehzeigers

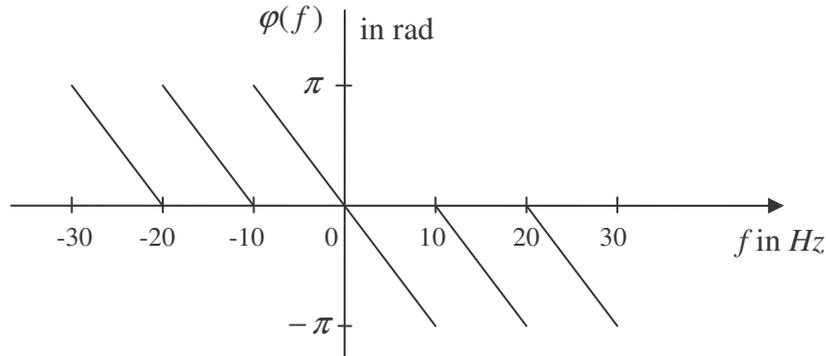
$$\varphi_D(f) = -2\pi_0 f$$

$$\varphi_D(f) = -\pi \cdot \frac{f}{10\text{Hz}}$$



Addition beider Phasen

$$\varphi(f) = \varphi_0(f) + \varphi_D(f)$$



bei $f = k \cdot 10\text{Hz}$ mit k ganzzahlig und $k \neq 0$ ist die Phase nicht definiert

c) Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}$$

alle Geraden besitzen den gleichen Anstieg,

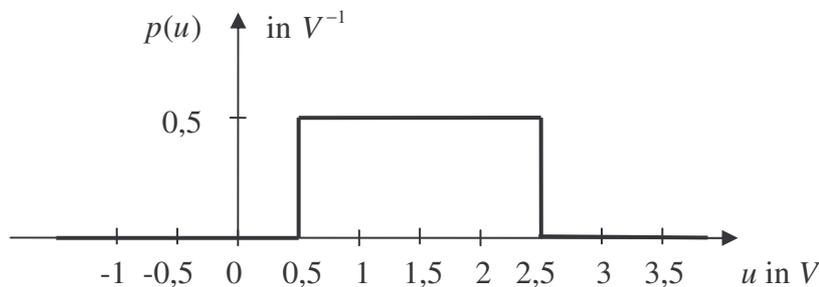
$$\underline{\underline{\tau_{Gr} = 50\text{ms}}}$$

oder Ablesen aus der Spiegelachse von $g(t)$

$$\underline{\underline{\tau_{Gr} = 50\text{ms}}}$$

Aufgabe 5:

Ein stochastisches Signal sei durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion charakterisiert.



Ermitteln Sie

- ob es sich um ein wertkontinuierliches oder ein wertdiskretes Signal handelt,
- die Verteilungsfunktion (Bezeichnung auch als Wahrscheinlichkeitsfunktion) als grafische Darstellung,
- die Auftrittswahrscheinlichkeit eines Spannungswertes von genau 1V,
- die Auftrittswahrscheinlichkeit von Spannungswerten im Bereich von 2V bis 2,2 V,
- die mittlere Signalleistung und
- den Gleichanteil

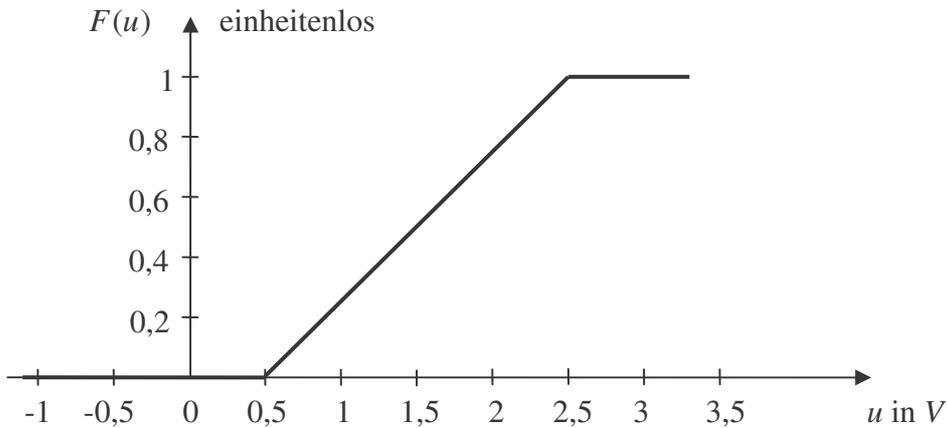
des stochastischen Signals!

Lösung:

- Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion besitzt keine Dirac-Stöße
→ es handelt sich um ein wertkontinuierliches Signal

- $$F(u) = \int_{-\infty}^u p(u) \cdot du$$

$$F(u > 2,5V) = 1$$



c) $P(1V) = 0$ oder 0%

d) Lösungsvariante 1:
aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$P(u_1 \leq u \leq u_2) = \int_{u_1}^{u_2} p(u) \cdot du$$

$P(2V \leq u \leq 2,2V) = 0,1$ oder 10%

Lösungsvariante 2:

aus der Verteilungsfunktion:

$$P(u_1 \leq u \leq u_2) = F(u_2) - F(u_1)$$

aus 4b) $F(0,5V \leq u \leq 2,5V) = 0,5V^{-1} \cdot u - 0,25$

$P(2V \leq u \leq 2,2V) = 0,1$ oder 10%

e) mittlere Leistung

$$P = \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot p(u) \cdot du$$

$P = 2,583V^2 = \frac{31}{12}V^2 = 2\frac{7}{12}V^2$

f) Gleichanteil

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot p(u) \cdot du$$

$\bar{u} = 1,5V$

oder durch Ablesen des Gleichanteils als Spiegelachse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(u)$ mit dem Wert

$\bar{u} = 1,5V$