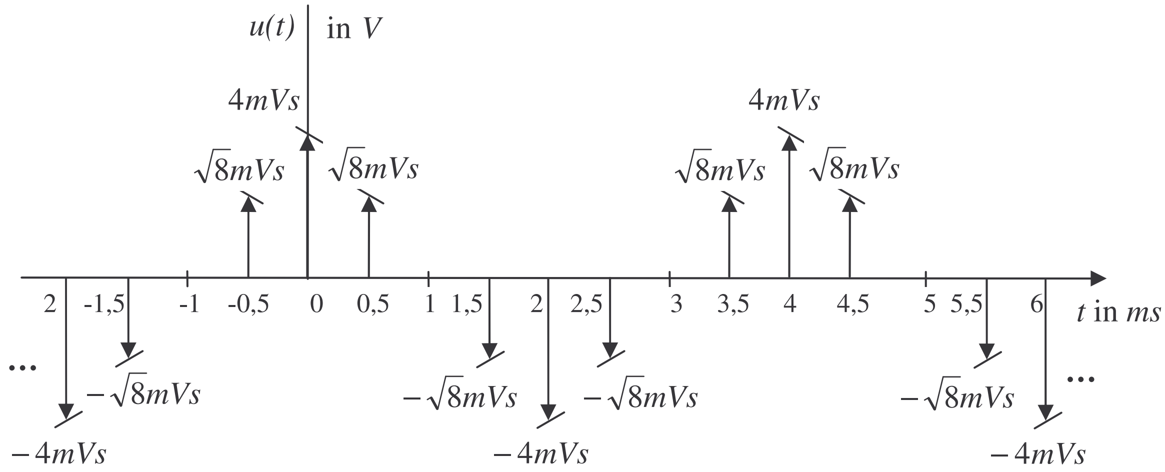
Name, Vorname: **Matr.-Nr.:**

Wichtige Hinweise:

- Ausführungen, Notizen und Lösungen auf den **Aufgabenblättern** werden **nicht gewertet**.
- Vor der entsprechenden Lösung ist **deutlich** die dazugehörige **Nummer der Aufgabe** zu vermerken.
- Die **Aufgabenblätter** sind nach dem Ende der Klausur zusammen mit den erstellten Lösungen **abzugeben**.
- Auf allen Lösungsblättern ist der **Name deutlich** zu vermerken.

Aufgabe 1:

Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte des angegebenen abgetasteten kosinusförmigen unendlich langen Signals. Stellen Sie den Frequenzbereich für die Frequenzen von $-3kHz \le f \le 3kHz$ grafisch dar und ermitteln Sie sämtliche markanten Werte!



Lösung:

Aufstellen der Gleichung der abgetasteten Zeitfunktion

$$u(t) = U_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot t\right) \cdot Ш_A(t)$$

mit $Ш_A(t) = t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$

als Abtastfunktion folgt

$$u(t) = U_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot t\right) \cdot t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$$ 1

Ausblendeigenschaft ergibt eine Summe gewichteter Dirac-Stöße zu den Zeitpunkten $n \cdot t_A$ gemäß gegebenem Bild

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot t_A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot n \cdot t_A\right) \cdot \delta(t - n \cdot t_A)$$

Rücklesen der konkreten Werte aus gegebenem Bild

Kosinusperiode: $\underline{t_p = 4ms}$ 1

Abtastperiode: $\underline{t_A = 0{,}5ms}$ 1 in Gleichung eingesetzt folgt

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot 0{,}5ms \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{0{,}5ms}{4ms} \cdot n\right) \cdot \delta(t - n \cdot 0{,}5ms)s^{-1}$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot 0{,}5ms \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot n\right) \cdot \delta(t - n \cdot 0{,}5ms)s^{-1}$$ 1

Ermittlung von U_0 durch Betrachtung des Zeitpunktes eines vorhandenen Dirac-Stoßes bei der maximalen Amplitude, z.B. bei $t = 0ms$ mit $n = 0$
mit dem einzelnen Dirac-Stoß

$$u(t)_{n=0} = 4mVs \cdot \delta(t)s^{-1}$$

Gleichsetzung mit Gleichung für $n = 0$ liefert

$$u(t)_{n=0} = U_0 \cdot 0{,}5ms \cdot \underbrace{\cos(0)}_{=1} \cdot \delta(t)s^{-1} = 4mVs \cdot \delta(t)s^{-1}$$ 1

$$\rightarrow U_0 \cdot 0{,}5ms = 4mVs$$

$$U_0 = \frac{4mVs}{0{,}5ms}$$

$$\underline{U_0 = 8V}$$ 1

ermittelte abgetastete Zeitfunktion somit

$$u(t) = \underbrace{8V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4ms} \cdot t\right)}_{u_K(t)} \bullet \underbrace{0{,}5ms \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 0{,}5ms)s^{-1}}_{Ш_A(t)}$$ 1

Transformation der einzelnen multiplizierten Anteile gemäß Korrespondenz

$$u_K(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t)$$

$$u_K(t) = 8V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4ms} \cdot t\right)$$

mit $f_A = \frac{1}{4ms} = 250Hz$ 1

FT ○—●

$$\underline{U}_K(f) = \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_A) + \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_A)$$

$$\underline{\underline{U}_K(f) = 4V \cdot \delta(f + 250Hz)Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz)Hz^{-1}}$$ 1

$$Ш_A(t) = t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$$

$$Ш_A(t) = 0{,}5ms \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 0{,}5ms)\ s^{-1}$$

mit $t_A = 0{,}5ms$

○—●

$$Ш_P(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_p)$$

mit $f_p = \frac{1}{t_A} = \frac{1}{0{,}5ms} = 2kHz$ 1

$$Ш_P(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 2kHz)Hz^{-1}$$ 1

Berechnung des resultierenden Spektrums als Faltungsoperation

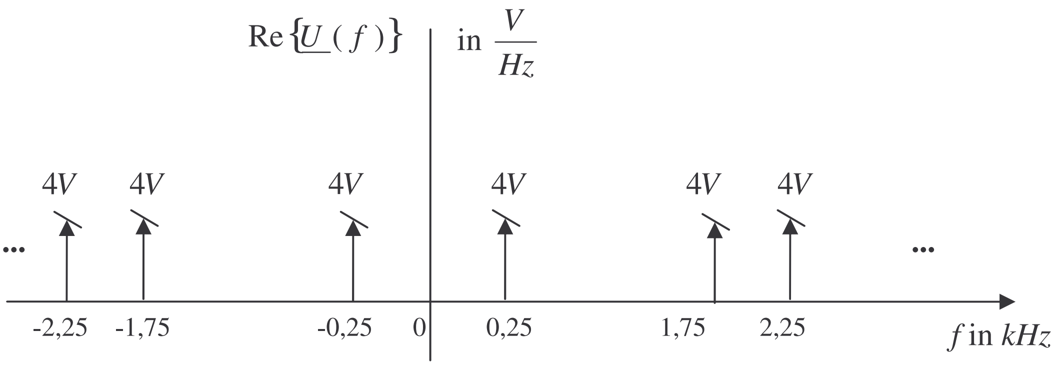
$$\underline{U}(f) = \underline{U}_K(f) * Ш_P(f)$$

das heißt Periodifizierung von $U_K(f)$ im Abstand von 2kHz

$$\underline{U}(f) = \left[4V \cdot \delta(f + 250Hz)Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz)Hz^{-1}\right] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 2kHz)Hz^{-1}$$

$$\underline{U}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[4V \cdot \delta(f + 250Hz - k \cdot 2kHz)Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz - k \cdot 2kHz)Hz^{-1}\right]$$

$\mathrm{Im}\{\underline{U}(f)\} = 0$ 1



Punktevergabe grafische Darstellung

Frequenzachse: Dirac-Stöße bei -0,25 kHz und 0,25 kHz 1

weitere Stöße bei -2,25 kHz; -1,75 kHz; 1,75 kHz und 2,25 kHz 1

Amplitudenachse: Stoßflächen reell [Re{$U(f)$}] 1

linke und rechte Stoßfläche positiv 1

Werte der Stoßflächen von 4V 1

Aufgabe 1) Σ 17 Punkte

Aufgabe 2:

Ein relles und hinsichtlich seines Verlaufes ungerades Signal werde mit der Fouriertransformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert.

Treffen Sie Aussagen

a) zur Existenz eines Realteiles im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Realteils im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Realteils und

b) zur Existenz eines Imaginärteiles im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Imaginärteils im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Imaginärteils!

Lösung:

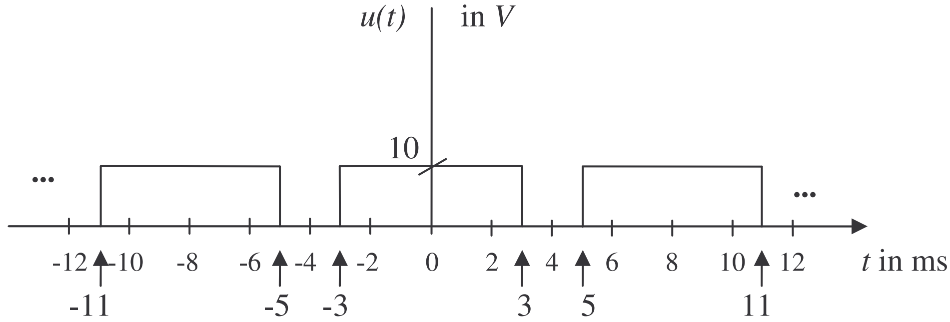
a) Realteil im Frequenzbereich ist Null 1

b) Imaginärteil im Frequenzbereich ist vorhanden 1
und hat einen ungeraden Verlauf 1

Aufgabe 2) Σ 3 Punkte

Aufgabe 3:

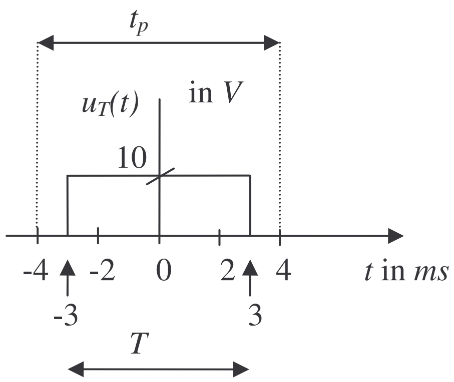
Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte der angegebenen periodischen unendlich langen Rechteckimpulsfolge als Gleichung im Frequenzbereich. Stellen Sie weiterhin den Frequenzbereich für die Frequenzen von $-0{,}5kHz \leq f \leq +0{,}5kHz$ grafisch dar und berechnen Sie sämtliche markanten Werte der grafischen Darstellung!



Lösung:

Periode $t_p = 8ms$ 1

Herausschneiden einer um $t = 0$ symmetrischen Periode



Rechteckbreite $T = 6ms$ 1

Reckteckhöhe $U_0 = 10V$ 1

Fourier-Transformation des einzelnen Recktecks

$$\underline{U}_T(f) = U_0 \cdot T \cdot si(\pi \cdot T \cdot f)$$ 1

$$\underline{U}_T(f) = 60\frac{mV}{Hz} \cdot si(\pi \cdot \frac{6}{kHz} \cdot f)$$ 1

Scha-Funktion für die Faltungsoperation zur Periodifizierung im Zeitbereich

$$ш_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot t_p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot 8ms)\ s^{-1}$$

Scha-Funktion für die Abtastung im Frequenzbereich

$$Ш_A(f) = f_A \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A) \qquad \text{mit } f_A = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{8ms} = \frac{1}{8} kHz = 0{,}125 kHz$$ 1

$$Ш_A(f) = \frac{1}{8} kHz \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}$$ 1

Abtastung der Fourier-transformierten einzelnen Signalperiode

$$\underline{U}(f) = \underline{U}_T(f) \cdot Ш_A(f)$$

$$\underline{U}(f) = 60 \frac{mV}{Hz} \cdot si\left(\pi \cdot \frac{6}{kHz} \cdot f\right) \cdot \frac{1}{8} kHz \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}$$ 1

$$\underline{U}(f) = 7{,}5V \cdot si\left(\pi \cdot \frac{6}{kHz} \cdot f\right) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}$$

Ausblendeigenschaft der Dirac-Stöße ergibt

$$\boxed{\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 7{,}5V \cdot si\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu\right) \cdot \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}}$$ 1

Werteermittlung

$$\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 7{,}5V \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu\right)}{\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu} \cdot \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}$$

$$\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_\mu(f)$$

$\mu = 0 \qquad \underline{U}_0(f) = 7{,}5V \cdot \delta(f) Hz^{-1}$

$\mu = 1 \qquad \underline{U}_1(f) = 7{,}5 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \pi} V \cdot \delta\left(f - \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1} = 2{,}25V \cdot \delta\left(f - \frac{1}{8} kHz\right) Hz^{-1}$ 1

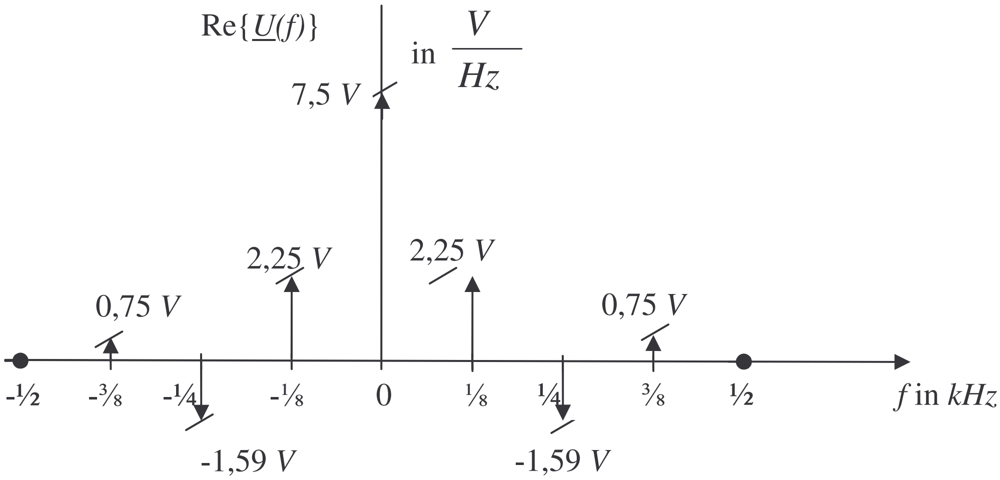
$\mu = 2 \qquad \underline{U}_2(f) = -7{,}5 \cdot \frac{2}{3 \cdot \pi} V \cdot \delta\left(f - \frac{1}{4} kHz\right) Hz^{-1} = -1{,}59V \cdot \delta\left(f - \frac{1}{4} kHz\right) Hz^{-1}$ 1

$\mu = 3 \qquad \underline{U}_3(f) = 7{,}5 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{9 \cdot \pi} V \cdot \delta\left(f - \frac{3}{8} kHz\right) Hz^{-1} = 0{,}75V \cdot \delta\left(f - \frac{3}{8} kHz\right) Hz^{-1}$ 1

$\mu = 4 \qquad \underline{U}_4(f) = 0V \cdot \delta\left(f - \frac{1}{2} kHz\right) Hz^{-1}$ 1

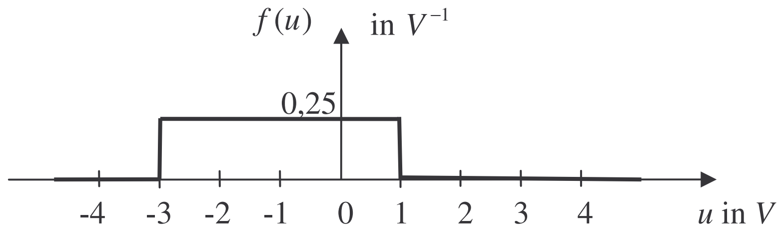
Für negative μ-Werte ergeben sich die gleichen Ergebnisse, da $si(x)$ eine gerade Funktion ist.

$\mathrm{Im}\{\underline{U}(f)\} = 0$ 1



spiegelsymmetrische si-Funktion 1
richtige Frequenz 1
Aufgabe 3) Σ 17 Punkte

Aufgabe 4:
Ein stochastisches Signal sei durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion charakterisiert.



Ermitteln Sie

a) die Verteilungsfunktion (Bezeichnung auch als Wahrscheinlichkeitsfunktion) als grafische Darstellung,
b) die Auftrittswahrscheinlichkeit eines Spannungswertes von genau 0,5V,
c) die Auftrittswahrscheinlichkeit von Spannungswerten im Bereich von -2,5V bis -2V,
d) die mittlere Signalleistung und
e) den Gleichanteil

des stochastischen Signals!

Lösung:

a) $$F(u) = \int_{-\infty}^{u} f(u) \cdot du$$ 1

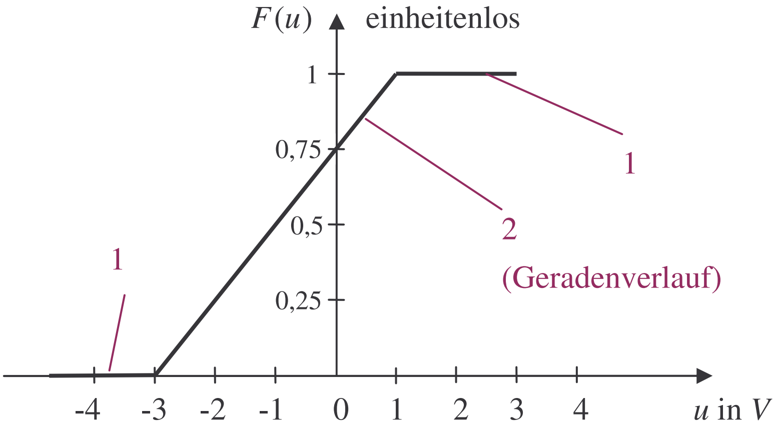
entspricht der Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$\underline{F(u < -3V) = 0}$ (1)

$$F(-3V \le u \le 1V) = \int_{-3V}^{u} 0{,}25V^{-1} \cdot du = 0{,}25V^{-1} \cdot u \Big|_{-3V}^{u}$$

$\underline{F(-3V \le u \le 1V) = 0{,}25V^{-1} \cdot u + 0{,}75}$ (2)

$\underline{F(u > 1V) = 1}$ (1)



4

Aufgabe 4a) Σ 5 Punkte

b) $\underline{\underline{W(0{,}5V) = 0}}$ oder $\underline{\underline{0\%}}$ 1

(Grund: Signal ist wertkontinuierlich und besitzt unendlich viele Spannungswerte, die im Bereich zwischen -3V und 1V auftreten)

Aufgabe 4b) Σ 1 Punkt

c) <u>Lösungsvariante 1:</u>

aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$W(u_1 \le u \le u_2) = \int_{u_1}^{u_2} f(u) \cdot du \qquad 1$$

entspricht der innerhalb der Spannungsbereichsgrenzen eingeschlossenen Fläche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$W(-2{,}5V \le u \le -2V) = \int_{-2{,}5V}^{-2V} 0{,}25V^{-1} \cdot du = 0{,}25V^{-1} \cdot u \Big|_{-2{,}5V}^{-2V} = -0{,}5 - (-0{,}625)$$

$$= -0{,}5 + 0{,}625 \qquad 1$$

$\underline{\underline{W(-2{,}5V \le u \le -2V) = 0{,}125}}$ oder $\underline{\underline{12{,}5\%}}$ 1

Aufgabe 4c) Σ 3 Punkte

<u>Lösungsvariante 2:</u>

aus der Verteilungsfunktion:

$W(u_1 \le u \le u_2) = F(u_2) - F(u_1)$ 1

entspricht der Differenz der Funktionswerte der Verteilungsfunktion resultierend aus der oberen und unteren Grenze des Spannungsbereiches

$$W(-2{,}5V \le u \le -2V) = F(-2V) - F(-2{,}5V) = 0{,}25V^{-1} \cdot (-2V) - 0{,}25V^{-1} \cdot (-2{,}5V)$$

$$= -0{,}5 + 0{,}625 \qquad 1$$

$\underline{\underline{W(-2{,}5V \le u \le -2V) = 0{,}125}}$ oder $\underline{\underline{12{,}5\%}}$ 1

Aufgabe 4c) Σ 3 Punkte

d) mittlere Leistung

$$P = \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot f(u) \cdot du$$ 1

$$P = \int_{-3V}^{1V} u^2 \cdot 0{,}25V^{-1} \cdot du$$ 1

$$P = 0{,}25V^{-1} \cdot \left. \frac{u^3}{3} \right|_{-3V}^{1V} = 0{,}25V^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}V^3 + 9V^3 \right)$$ 1

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{28}{3} V^2$$

$$\underline{\underline{P = 2{,}\overline{3}V^2 = \frac{7}{3}V^2}}$$ 1

Aufgabe 4d) Σ 4 Punkte

e) Gleichanteil

<u>Lösungsvariante 1:</u>

durch Berechnung:

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f(u) \cdot du = \int_{-3V}^{1V} u \cdot 0{,}25V^{-1} \cdot du$$ 1

$$\overline{u} = 0{,}25V^{-1} \cdot \left. \frac{u^2}{2} \right|_{-3V}^{1V} = 0{,}25V \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2} V$$

$$\underline{\underline{\overline{u} = -1V}}$$ 1

Aufgabe 4e) Σ 2 Punkte

<u>Lösungsvariante 2:</u>

durch Ablesen des Gleichanteils als Spiegelachse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(u)$ mit dem Wert

$$\underline{\underline{\overline{u} = -1V}}$$ 2

Aufgabe 4e) Σ 2 Punkte

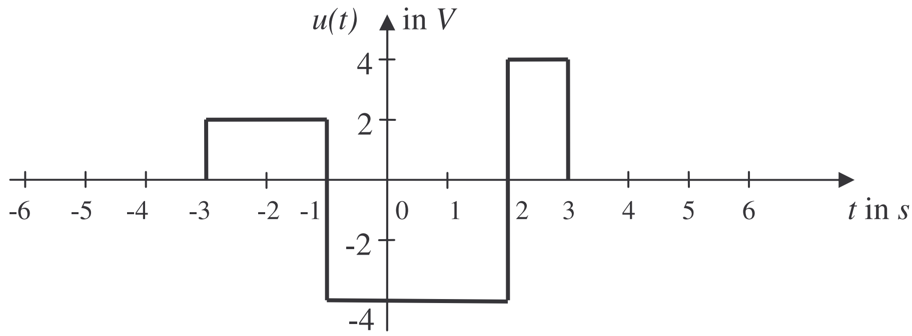
Aufgabe 4) gesamt Σ 15 Punkte

Aufgabe 5:

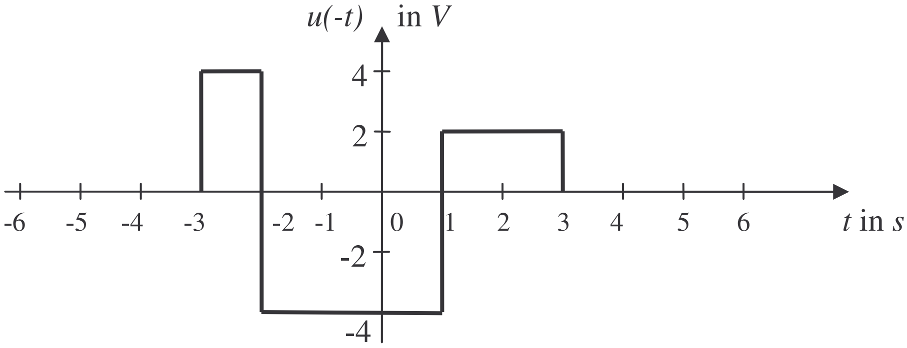
Zerlegen Sie das folgende gegebene Signal in

a) seinen geraden Anteil und
b) seinen ungeraden Anteil.

Stellen Sie beide Anteile grafisch dar!



Lösung:
Ermittlung der Funktion $u(-t)$ durch Spiegelung der Funktion $u(t)$ an der u-Achse



a) Ermittlung des geraden Anteils $u_g(t)$ durch grafische Addition gemäß

$$u_g(t) = \frac{u(t)+u(-t)}{2}$$ 0,5

$$u_g(t < -3s) = \frac{0V + 0V}{2} = 0V$$ (0,5)

$$u_g(-3s \le t < -2s) = \frac{2V + 4V}{2} = 3V$$ (0,5)

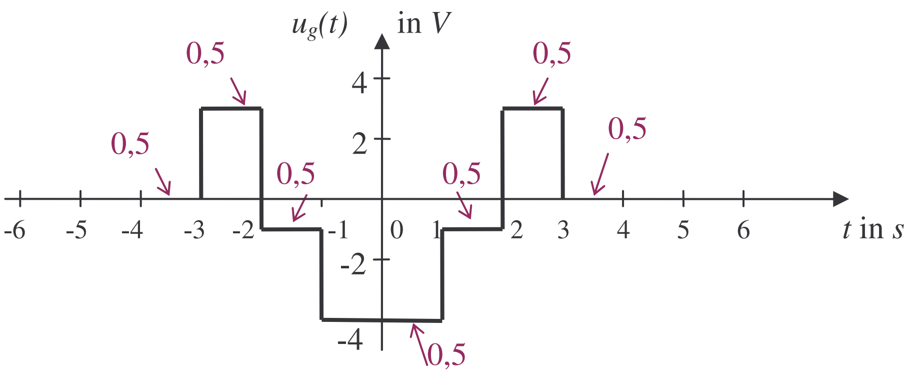
$$u_g(-2s \le t < -1s) = \frac{2V - 4V}{2} = -1V$$ (0,5)

$$u_g(-1s \le t < 1s) = \frac{-4V - 4V}{2} = -4V$$ (0,5)

$$u_g(1s \le t < 2s) = \frac{-4V + 2V}{2} = -1V$$ (0,5)

$$u_g(2s \le t < 3s) = \frac{4V + 2V}{2} = 3V$$ (0,5)

$$u_g(3s \le t) = \frac{0V + 0V}{2} = 0V$$ (0,5)



pro richtigem Wert im richtigen Zeitbereich: $7 \cdot 0{,}5$

Aufgabe 4a) Σ 4 Punkte

b) Ermittlung des ungeraden Anteils $u_u(t)$ durch grafische Addition gemäß

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}$$ 0,5

$$u_u(t < -3s) = \frac{0V - 0V}{2} = 0V$$ (0,5)

$$u_u(-3s \le t < -2s) = \frac{2V - 4V}{2} = -1V$$ (0,5)

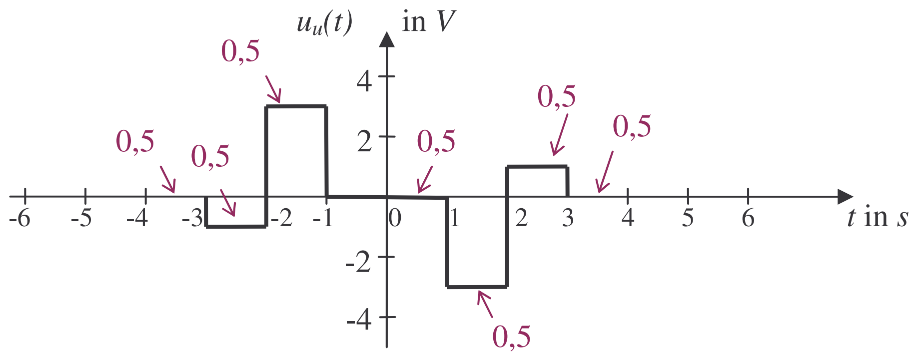
$$u_u(-2s \le t < -1s) = \frac{2V - (-4V)}{2} = 3V$$ (0,5)

$$u_u(-1s \le t < 1s) = \frac{-4V - (-4V)}{2} = 0V$$ (0,5)

$$u_u(1s \le t < 2s) = \frac{-4V - 2V}{2} = -3V$$ (0,5)

$$u_u(2s \le t < 3s) = \frac{4V - 2V}{2} = 1V$$ (0,5)

$$u_u(3s \le t) = \frac{0V - 0V}{2} = 0V$$ (0,5)



pro richtigem Wert im richtigen Zeitbereich: 7 · 0,5

Aufgabe 4b) Σ 4 Punkte

Aufgabe 4) Σ 8 Punkte

Formelsammlung

Wahrscheinlichkeitskenngrößen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion): $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx$

Auftrittswahrscheinlichkeit: $W(a \le x \le b) = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$

$$W(x_q) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{x_q - \varepsilon}^{x_q + \varepsilon} f(x) \cdot dx$$

Statistische Kenngrößen von Leistungssignalen

Gleichanteil/linearer Mittelwert: $\overline{x} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{n=n_1}^{n_1+N-1} x(n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$

$$\overline{x} = \sum_{alle\ x_q} x_q \cdot W(x_q)$$

Gleichleistung: $P_{=} = \left[\overline{x}\right]^2$

mittlere Leistung/quadr. Mittelwert: $P = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum\limits_{n=n_1}^{n_1+N-1} x^2(n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx$

$$P = \overline{x^2} = \sum_{alle\ x_q} x_q^2 \cdot W(x_q)$$

Effektivwert: $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{\overline{x^2}}$

Wechselleistung/Varianz:

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} \left[x(t) - \overline{x}\right]^2 \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \left[x(n) - \overline{x}\right]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[x - \overline{x}\right]^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \sum_{alle\ x_q} \left[x_q - \overline{x}\right]^2 \cdot W(x_q)$$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{P_{\sim}} = \sqrt{\sigma^2}$

Leistungsbeziehung: $P = \overline{x^2} = P_{=} + P_{\sim} = \left[\overline{x}\right]^2 + \sigma^2$

Statistische Kenngrößen von Energiesignalen

Impulsfläche (Impulsmoment 1. Ordnung): $m_{i1} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$

Impulsenergie (Impulsmoment 2. Ordnung): $m_{i2} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$

Ermittlung des geraden und ungeraden Anteils

gerader Anteil: $x_g(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$ bzw. $x_g(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$

ungerader Anteil: $x_u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$ bzw. $x_u(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$

Transformationsvorschrift der Fourier-Transformation

$$u(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f) \cdot e^{j2\pi f} \cdot df \quad \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \underline{U}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

$$g(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}(f) \cdot e^{j2\pi f} \cdot df \quad \overset{FT}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad \underline{G}(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

spezielle Funktionswerte

$$u(t=0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f) \cdot df \ \text{ und } \ \underline{U}(f=0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot dt \ \text{ bzw. } \ \underline{G}(f=0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot dt$$

Verschiebungssatz

$$u_2(t) = u_1(t - t_0) \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \begin{cases} \underline{U}_2(f) = \underline{U}_1(f) \cdot e^{-j2\pi t_0 f} \\ Betrag: \ \left|\underline{U}_2(f)\right| = \left|\underline{U}_1(f)\right| \\ Phase: \ \varphi_{\underline{U}_2}(f) = \varphi_{\underline{U}_1}(f) - 2\pi t_0 f \end{cases}$$

$$u_2(t) = u_1(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}_2(f) = \underline{U}_1(f - f_0)$$

Korrespondenzen der Fourier-Transformation

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \ \text{für} \ -\frac{T}{2} \le t \le +\frac{T}{2} \\ 0 \ sonst \end{cases} \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot T \cdot si(\pi \cdot T \cdot f)$$

$$u(t) = U_0 \cdot si(\pi \cdot B \cdot t) \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = \begin{cases} \frac{U_0}{B} \ \text{für} \ -\frac{B}{2} \le f \le +\frac{B}{2} \\ 0 \ sonst \end{cases}$$

$$u(t) = U_0 \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot \delta(f)$$

$$u(t) = U_0 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot \delta(f - f_0)$$

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet \quad \underline{U}(f) = j\frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) - j\frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$

Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}$$

Abtastung im Zeitbereich / Periodifizierung im Frequenzbereich

$$A\{u(t)\} = u(t) \bullet Ш_A(t) = u(t) \bullet t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n \cdot t_A) \bullet t_A \cdot \delta(t - n \cdot t_A)$$

$$\circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet$$

$$P\{\underline{U}(f)\} = \underline{U}(f) * Ш_P(f) = \underline{U}(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_P) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f - k \cdot f_P) \ \text{mit} \ f_P = \frac{1}{t_A}$$

(n, k ganzzahlig)

Periodifizierung im Zeitbereich / Abtastung im Frequenzbereich

$$u(t)_P = P\{u_T(t)\} = u_T(t) * Ш_P(t) = u_T(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot t_P) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_T(t - m \cdot t_P)$$

$$\circ\!\!\overset{FT}{-\!\!-}\!\!\bullet$$

$$\underline{U}(f)_A = A\{\underline{U}_T(f)\} = \underline{U}_T(f) \bullet Ш_A(f) = \underline{U}_T(f) \bullet f_A \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A)$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_T(\mu \cdot f_A) \bullet f_A \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A) \ \text{mit} \ f_A = \frac{1}{t_P}$$

(m, μ ganzzahlig)