Wahrscheinlichkeitskenngrößen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion: $p(x) = \dfrac{dF(x)}{dx}$

Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion): $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(x) \cdot dx$

Auftrittswahrscheinlichkeit: $P(a \le x \le b) = \int\limits_{a}^{b} p(x) \cdot dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left[F(b+\varepsilon) - F(a-\varepsilon) \right]$

$$P(a \le x_q \le b) = \sum_{i=\frac{a}{q}}^{\frac{b}{q}} P(x_i = i \cdot q) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[F(b+\varepsilon) - F(a-\varepsilon) \right] \quad (\swarrow)$$

Addition unabhängiger Signale bekannter Wahrscheinlichkeit

$$p(y) = p_1(x) * p_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_1(x) \cdot p_2(y-x) \cdot dx$$

$$P(y_i) = P_1(x_i) * P_2(x_i) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} P_1(x_j) \cdot P_2(y_i - x_j) \quad \text{mit } x_j = j \cdot q, \;\; y_i = i \cdot q \quad (\swarrow)$$

Polynom-Multiplikation (belieb. Quantisierung): $\sum\limits_{i} \left[P(y_i) \cdot r^{y_i} \right] = \sum\limits_{j} \left[P_1(x_j) \cdot r^{x_j} \right] \bullet \sum\limits_{k} \left[P_2(x_k) \cdot r^{x_k} \right]$

Statistische Kenngrößen von Leistungssignalen

Gleichanteil/linearer Mittelwert: $\overline{x} = \dfrac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cdot dt = \dfrac{1}{N} \cdot \sum\limits_{n=n_1}^{n_1+N-1} x(n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$

$$\overline{x} = q \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[i \cdot P(x_i = i \cdot q) \right] \quad (\swarrow)$$

Gleichleistung: $P_{=} = \left[\overline{x} \right]^2$

mittlere Leistung/quad. Mittelwert: $P = \overline{x^2} = \dfrac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) \cdot dt = \dfrac{1}{N} \cdot \sum\limits_{n=n_1}^{n_1+N-1} x^2(n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot p(x) \cdot dx$

$$P = \overline{x^2} = q^2 \cdot \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left[i^2 \cdot P(x_i = i \cdot q) \right] \quad (\swarrow)$$

Effektivwert: $x_{eff} = \sqrt{P} = \sqrt{\overline{x^2}}$

Wechselleistung/Varianz:

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \frac{1}{T} \cdot \int\limits_{t_1}^{t_1+T} \left[x(t) - \overline{x} \right]^2 \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} \left[x(n) - \overline{x} \right]^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[x_{(q)} - \overline{x} \right]^2 \cdot p(x) \cdot dx$$

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\left[i \cdot q - \overline{x} \right]^2 \cdot P(x_i = i \cdot q) \right) \quad (\swarrow)$$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{P_{\sim}} = \sqrt{\sigma^2}$

Zusammenhang der Leistungen: $P = \overline{x^2} = P_{=} + P_{\sim} = \left[\overline{x} \right]^2 + \sigma^2$

$(\swarrow)$ bei äquidistanter Quantisierung auch anwendbar

Statistische Kenngrößen von Energiesignalen

Impulsmoment: $$m_{i1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$$

Energie: $$E = m_{i2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$$

Ermittlung Anteile:

gerader Anteil: $u_g(t) = \dfrac{u(t)+u(-t)}{2}$ bzw. $x_g(n) = \dfrac{x(n)+x(-n)}{2}$

ungerader Anteil: $u_u(t) = \dfrac{u(t)-u(-t)}{2}$ bzw. $x_u(n) = \dfrac{x(n)-x(-n)}{2}$

Transformationsvorschrift der Fourier-Transformation

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(f) \cdot e^{j2\pi f} \cdot df \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot dt$$

Korrespondenzen der Fourier-Transformation

$$u(t) = \begin{cases} U_0 \ \mathit{für} \ -\dfrac{T}{2} \le t \le +\dfrac{T}{2} \\ 0 \ \mathit{sonst} \end{cases} \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = U_0 \cdot T \cdot si(\pi Tf)$$

$$u(t) = U_0 \cdot si(\frac{\pi}{T} \cdot t) \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = \begin{cases} U_0 \cdot T \ \mathit{für} \ -\dfrac{1}{2T} \le f \le +\dfrac{1}{2T} \\ 0 \ \mathit{sonst} \end{cases}$$

$$u(t) = U_0 \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = U_0 \cdot \delta(f)$$

$$u(t) = U_0 \cdot e^{j2\pi f_0 t} \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = U_0 \cdot \delta(f - f_0)$$

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$

$$u(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f_0 t) \quad \overset{\text{FT}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad U(f) = j\frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) - j\frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0)$$

Abtastung im Zeitbereich/Periodifizierung im Frequenzbereich

$$A\{u(t)\} = u(t) \cdot Ш_A(t) = u(t) \bullet t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n \cdot t_A) \bullet t_A \cdot \delta(t - n \cdot t_A)$$

FT $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

$$P\{U(f)\} = U(f) * Ш_P(f) = U(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_P) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} U(f - k \cdot f_P) \quad \text{mit } f_P = \frac{1}{t_A}\text{, n, k ganzzahlig}$$

Periodifizierung im Zeitbereich/Abtastung im Frequenzbereich

$$u(t)_P = P\{u_T(t)\} = u_T(t) * Ш_P(t) = u_T(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot t_P) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_T(t - m \cdot t_P)$$

FT $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$

$$U(f)_A = A\{U_T(f)\} = U_T(f) \cdot Ш_A(f) = U_T(f) \bullet f_A \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A)$$

$$= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} U_T(\mu \cdot f_A) \bullet f_A \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A) \quad \text{mit } f_A = \frac{1}{t_P}\text{, m, μ ganzzahlig}$$