

Name, Vorname:

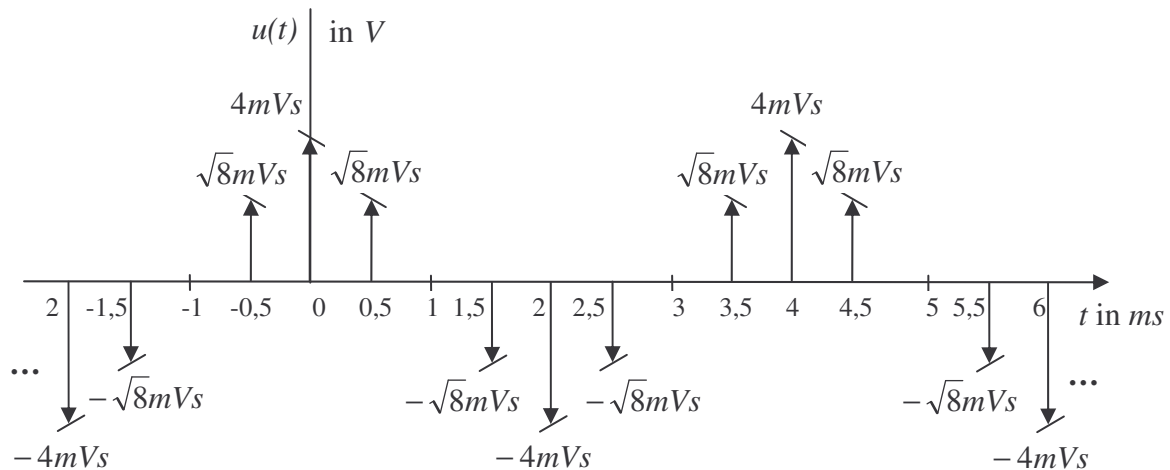
Matr.-Nr.:

**Wichtige Hinweise:**

- Ausführungen, Notizen und Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet.
- Vor der entsprechenden Lösung ist deutlich die dazugehörige Nummer der Aufgabe zu vermerken.
- Die Aufgabenblätter sind nach dem Ende der Klausur zusammen mit den erstellten Lösungen abzugeben.
- Auf allen Lösungsblättern ist der Name deutlich zu vermerken.

**Aufgabe 1:**

Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte des angegebenen abgetasteten kosinusförmigen unendlich langen Signals. Stellen Sie den Frequenzbereich für die Frequenzen von  $-3kHz \leq f \leq 3kHz$  grafisch dar und ermitteln Sie sämtliche markanten Werte!



**Lösung:**

Aufstellen der Gleichung der abgetasteten Zeitfunktion

$$u(t) = U_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot t\right) \cdot \text{III}_A(t)$$

mit  $\text{III}_A(t) = t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$

als Abtastfunktion folgt

$$u(t) = U_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot t\right) \cdot t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A) \quad 1$$

Ausblendeigenschaft ergibt eine Summe gewichteter Dirac-Stöße zu den Zeitpunkten  $n \cdot t_A$  gemäß gegebenem Bild

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot t_A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{t_p} \cdot n \cdot t_A\right) \cdot \delta(t - n \cdot t_A)$$

Rücklesen der konkreten Werte aus gegebenem Bild

Kosinusperiode:  $t_p = 4ms$  1

Abtastperiode:  $t_A = 0,5ms$  1

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

in Gleichung eingesetzt folgt

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot 0,5ms \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{0,5ms}{4ms} \cdot n\right) \cdot \delta(t - n \cdot 0,5ms) s^{-1}$$

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_0 \cdot 0,5ms \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{8} \cdot n\right) \cdot \delta(t - n \cdot 0,5ms) s^{-1} \quad 1$$

Ermittlung von  $U_0$  durch Betrachtung des Zeitpunktes eines vorhandenen Dirac-Stoßes bei der maximalen Amplitude, z.B. bei  $t = 0ms$  mit  $n = 0$  mit dem einzelnen Dirac-Stoß

$$u(t)_{n=0} = 4mVs \cdot \delta(t) s^{-1}$$

Gleichsetzung mit Gleichung für  $n = 0$  liefert

$$u(t)_{n=0} = U_0 \cdot 0,5ms \cdot \underbrace{\cos(0)} \cdot \delta(t) s^{-1} = 4mVs \cdot \delta(t) s^{-1} \quad 1$$

$$= 1$$

$$\rightarrow U_0 \cdot 0,5ms = 4mVs$$

$$U_0 = \frac{4mVs}{0,5ms}$$

$$U_0 = 8V \quad 1$$

ermittelte abgetastete Zeitfunktion somit

$$u(t) = \underbrace{8V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4ms} \cdot t\right)}_{u_K(t)} \cdot \underbrace{0,5ms \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 0,5ms) s^{-1}}_{\text{III}_A(t)} \quad 1$$

Transformation der einzelnen multiplizierten Anteile gemäß Korrespondenz

$$u_K(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi \cdot f_A \cdot t)$$

$$u_K(t) = 8V \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{4ms} \cdot t\right)$$

$$\text{mit } f_A = \frac{1}{4ms} = 250Hz \quad 1$$

FT

$$\underline{u}_K(f) = \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_A) + \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_A)$$

$$\underline{u}_K(f) = 4V \cdot \delta(f + 250Hz) Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz) Hz^{-1} \quad 1$$

$$\text{III}_A(t) = t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A)$$

$$\text{III}_A(t) = 0,5ms \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot 0,5ms) s^{-1}$$

$$\text{mit } t_A = 0,5ms$$

$$\text{III}_P(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_p)$$

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

$$\text{mit } f_p = \frac{1}{t_A} = \frac{1}{0,5ms} = 2kHz \quad 1$$

$$\text{III}_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 2kHz) Hz^{-1} \quad 1$$

Berechnung des resultierenden Spektrums als Faltungsoperation

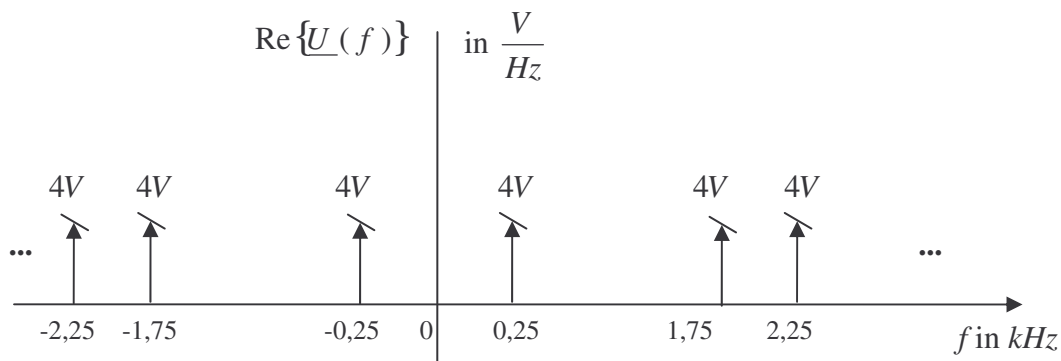
$$\underline{U}(f) = \underline{U}_K(f) * \text{III}_p(f)$$

das heißt Periodifizierung von  $U_K(f)$  im Abstand von 2kHz

$$\underline{U}(f) = [4V \cdot \delta(f + 250Hz) Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz) Hz^{-1}] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot 2kHz) Hz^{-1}$$

$$\underline{U}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [4V \cdot \delta(f + 250Hz - k \cdot 2kHz) Hz^{-1} + 4V \cdot \delta(f - 250Hz - k \cdot 2kHz) Hz^{-1}]$$

$$\text{Im}\{\underline{U}(f)\} = 0 \quad 1$$



**Punktevergabe grafische Darstellung**

Frequenzachse: Dirac-Stöße bei  $-0,25 kHz$  und  $0,25 kHz$  1

weitere Stöße bei  $-2,25 kHz$ ;  $-1,75 kHz$ ;  $1,75 kHz$   
und  $2,25 kHz$  1

Amplitudenachse: Stoßflächen reell  $[\text{Re}\{U(f)\}]$  1

linke und rechte Stoßfläche positiv 1

Werte der Stoßflächen von  $4V$  1

**Aufgabe 1)  $\Sigma$  17 Punkte**

### Aufgabe 2:

Ein reelles und hinsichtlich seines Verlaufes ungerades Signal werde mit der Fouriertransformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert.

Treffen Sie Aussagen

- zur Existenz eines Realteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Realteils im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Realteils und
- zur Existenz eines Imaginärteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Imaginärteils im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Imaginärteils!

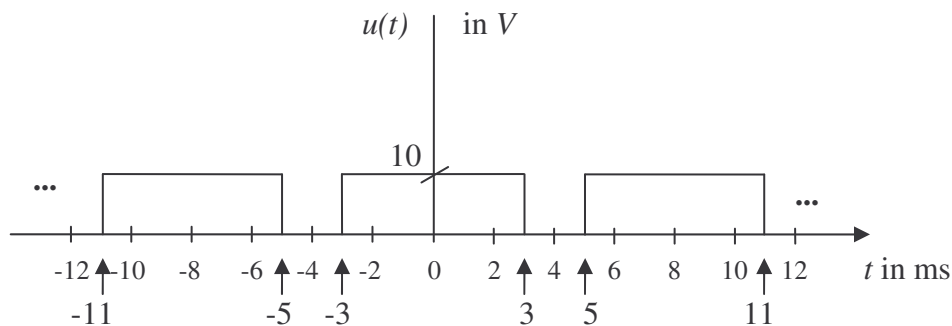
**Lösung:**

- a) Realteil im Frequenzbereich ist Null 1
- b) Imaginärteil im Frequenzbereich ist vorhanden 1  
und hat einen ungeraden Verlauf 1

Aufgabe 2)  $\Sigma$  3 Punkte

**Aufgabe 3:**

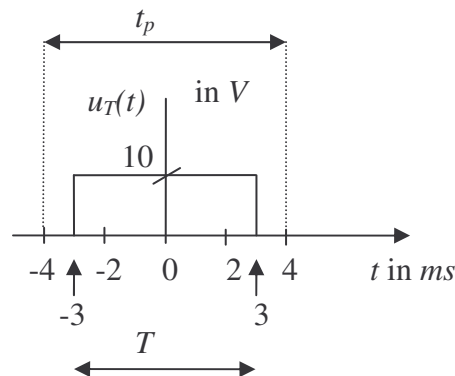
Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte der angegebenen periodischen unendlich langen Rechteckimpulsfolge als Gleichung im Frequenzbereich. Stellen Sie weiterhin den Frequenzbereich für die Frequenzen von  $-0,5\text{kHz} \leq f \leq +0,5\text{kHz}$  grafisch dar und berechnen Sie sämtliche markanten Werte der grafischen Darstellung!



**Lösung:**

Periode  $t_p = 8\text{ms}$  1

Herausschneiden einer um  $t = 0$  symmetrischen Periode



Rechteckbreite  $T = 6\text{ms}$  1

Rechteckhöhe  $U_0 = 10\text{V}$  1

Fourier-Transformation des einzelnen Rechtecks

$$\underline{U}_T(f) = U_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot f) \quad 1$$

$$\underline{U}_T(f) = 60 \frac{\text{mV}}{\text{Hz}} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{6}{\text{kHz}} \cdot f\right) \quad 1$$

Scha-Funktion für die Faltungsoperation zur Periodifizierung im Zeitbereich

$$\text{III}_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot t_p) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot 8\text{ms}) \text{ s}^{-1}$$

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

Scha-Funktion für die Abtastung im Frequenzbereich

$$\text{III}_A(f) = f_A \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A) \quad \text{mit } f_A = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{8\text{ms}} = \frac{1}{8} \text{kHz} = 0,125\text{kHz} \quad 1$$

$$\text{III}_A(f) = \frac{1}{8} \text{kHz} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

Abtastung der Fourier-transformierten einzelnen Signalperiode

$$\underline{U}(f) = \underline{U}_T(f) \cdot \text{III}_A(f)$$

$$\underline{U}(f) = 60 \frac{\text{mV}}{\text{Hz}} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{6}{\text{kHz}} \cdot f\right) \cdot \frac{1}{8} \text{kHz} \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

$$\underline{U}(f) = 7,5\text{V} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{6}{\text{kHz}} \cdot f\right) \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1}$$

Ausblendeigenschaft der Dirac-Stöße ergibt

$$\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 7,5\text{V} \cdot \text{si}\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu\right) \cdot \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

Werteermittlung

$$\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 7,5\text{V} \cdot \frac{\sin\left(\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu\right)}{\pi \cdot \frac{3}{4} \cdot \mu} \cdot \delta\left(f - \mu \cdot \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1}$$

$$\underline{U}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_\mu(f)$$

$$\mu = 0 \quad \underline{U}_0(f) = 7,5\text{V} \cdot \delta(f) \text{Hz}^{-1}$$

$$\mu = 1 \quad \underline{U}_1(f) = 7,5 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot \pi} \text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} = 2,25\text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{1}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

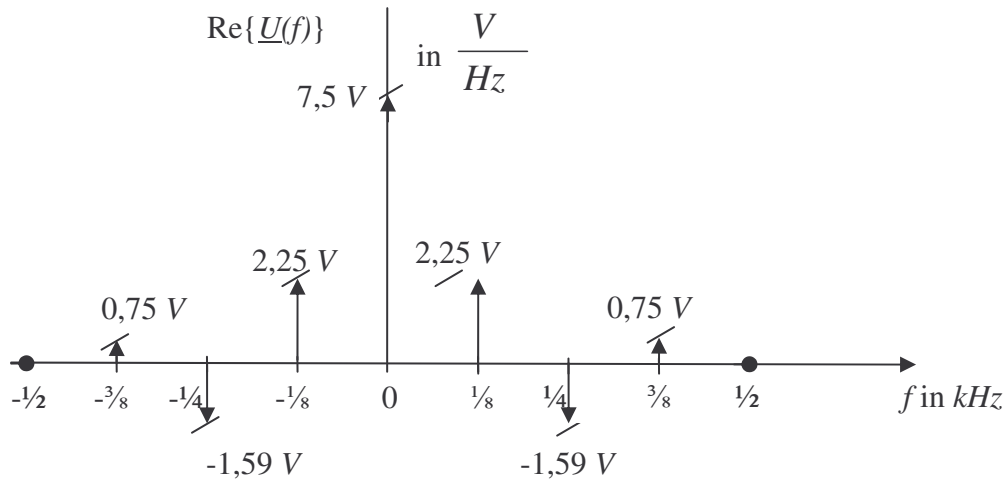
$$\mu = 2 \quad \underline{U}_2(f) = -7,5 \cdot \frac{2}{3 \cdot \pi} \text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{1}{4} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} = -1,59\text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{1}{4} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

$$\mu = 3 \quad \underline{U}_3(f) = 7,5 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{9 \cdot \pi} \text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{3}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} = 0,75\text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{3}{8} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

$$\mu = 4 \quad \underline{U}_4(f) = 0\text{V} \cdot \delta\left(f - \frac{1}{2} \text{kHz}\right) \text{Hz}^{-1} \quad 1$$

Für negative  $\mu$ -Werte ergeben sich die gleichen Ergebnisse, da  $\text{si}(x)$  eine gerade Funktion ist.

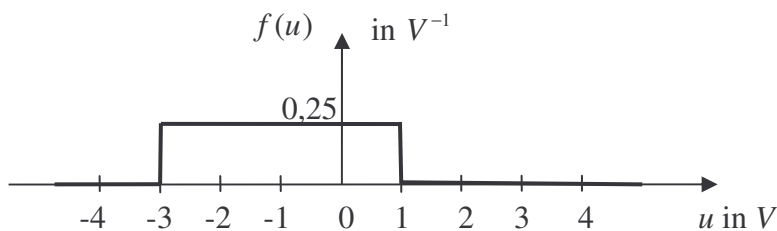
$$\text{Im}\{\underline{U}(f)\} = 0 \quad 1$$



spiegelsymmetrische si-Funktion 1  
richtige Frequenz 1  
Aufgabe 3)  $\Sigma$  17 Punkte

#### Aufgabe 4:

Ein stochastisches Signal sei durch folgende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion charakterisiert.



Ermitteln Sie

- die Verteilungsfunktion (Bezeichnung auch als Wahrscheinlichkeitsfunktion) als grafische Darstellung,
- die Auftretswahrscheinlichkeit eines Spannungswertes von genau 0,5V,
- die Auftretswahrscheinlichkeit von Spannungswerten im Bereich von -2,5V bis -2V,
- die mittlere Signalleistung und
- den Gleichanteil des stochastischen Signals!

#### Lösung:

a)  $F(u) = \int_{-\infty}^u f(u) \cdot du$  1

entspricht der Integration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

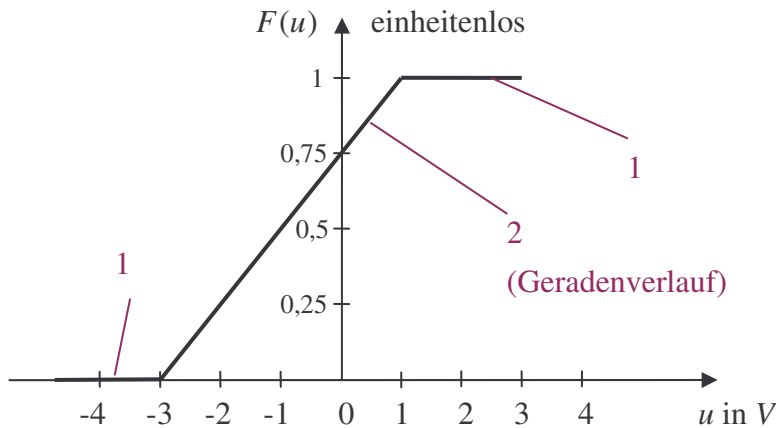
$F(u < -3V) = 0$  (1)

$$F(-3V \leq u \leq 1V) = \int_{-3V}^u 0,25V^{-1} \cdot du = 0,25V^{-1} \cdot u \Big|_{-3V}^u$$

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

$$F(-3V \leq u \leq 1V) = 0,25V^{-1} \cdot u + 0,75 \quad (2)$$

$$F(u > 1V) = 1 \quad (1)$$



4  
Aufgabe 4a)  $\Sigma$  5 Punkte

- b)  $W(0,5V) = 0$  oder  $0\%$  1  
 (Grund: Signal ist wertkontinuierlich und besitzt unendlich viele Spannungswerte, die im Bereich zwischen -3V und 1V auftreten)

Aufgabe 4b)  $\Sigma$  1 Punkt

- c) Lösungsvariante 1:  
 aus der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:

$$W(u_1 \leq u \leq u_2) = \int_{u_1}^{u_2} f(u) \cdot du \quad 1$$

entspricht der innerhalb der Spannungsbereichsgrenzen eingeschlossenen Fläche der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$W(-2,5V \leq u \leq -2V) = \int_{-2,5V}^{-2V} 0,25V^{-1} \cdot du = 0,25V^{-1} \cdot u \Big|_{-2,5V}^{-2V} = -0,5 - (-0,625) = -0,5 + 0,625 \quad 1$$

$$\underline{W(-2,5V \leq u \leq -2V) = 0,125} \quad \text{oder} \quad \underline{12,5\%} \quad 1$$

Aufgabe 4c)  $\Sigma$  3 Punkte

- Lösungsvariante 2:  
 aus der Verteilungsfunktion:

$$W(u_1 \leq u \leq u_2) = F(u_2) - F(u_1) \quad 1$$

entspricht der Differenz der Funktionswerte der Verteilungsfunktion resultierend aus der oberen und unteren Grenze des Spannungsbereiches

$$W(-2,5V \leq u \leq -2V) = F(-2V) - F(-2,5V) = 0,25V^{-1} \cdot (-2V) - 0,25V^{-1} \cdot (-2,5V) = -0,5 + 0,625 \quad 1$$

$$\underline{W(-2,5V \leq u \leq -2V) = 0,125} \quad \text{oder} \quad \underline{12,5\%} \quad 1$$

Aufgabe 4c)  $\Sigma$  3 Punkte

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

d) mittlere Leistung

$$P = \overline{u^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \cdot f(u) \cdot du \quad 1$$

$$P = \int_{-3V}^{1V} u^2 \cdot 0,25V^{-1} \cdot du \quad 1$$

$$P = 0,25V^{-1} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_{-3V}^{1V} = 0,25V^{-1} \cdot \left( \frac{1}{3}V^3 + 9V^3 \right) \quad 1$$

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{28}{3} V^2$$

$$P = 2,3\overline{V^2} = \underline{\underline{\frac{7}{3} V^2}} \quad 1$$

Aufgabe 4d)  $\Sigma$  4 Punkte

e) Gleichanteil

Lösungsvariante 1:

durch Berechnung:

$$\overline{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u \cdot f(u) \cdot du = \int_{-3V}^{1V} u \cdot 0,25V^{-1} \cdot du \quad 1$$

$$\overline{u} = 0,25V^{-1} \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_{-3V}^{1V} = 0,25V \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{2} V$$

$$\underline{\underline{\overline{u} = -1V}} \quad 1$$

Aufgabe 4e)  $\Sigma$  2 Punkte

Lösungsvariante 2:

durch Ablesen des Gleichanteils als Spiegelachse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $f(u)$  mit dem Wert

$$\underline{\underline{\overline{u} = -1V}} \quad 2$$

Aufgabe 4e)  $\Sigma$  2 Punkte

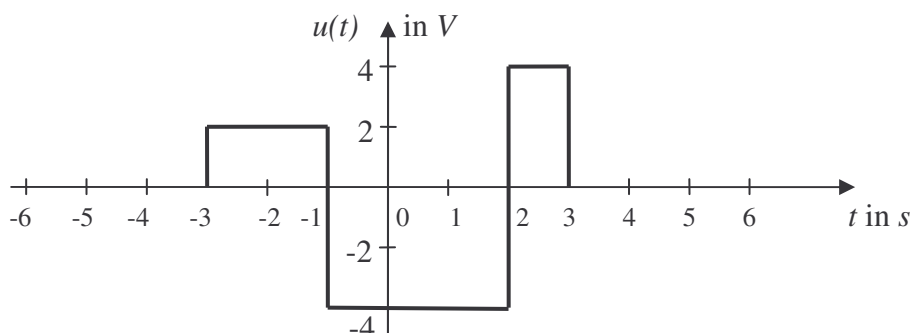
Aufgabe 4)  $\Sigma$  gesamt 15 Punkte

### Aufgabe 5:

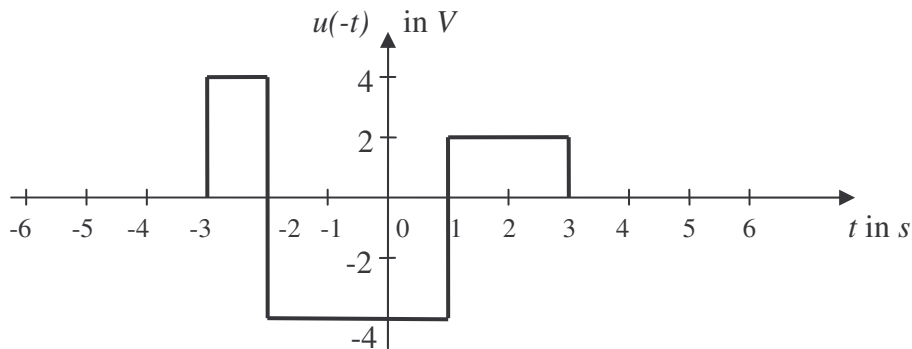
Zerlegen Sie das folgende gegebene Signal in

- seinen geraden Anteil und
- seinen ungeraden Anteil.

Stellen Sie beide Anteile grafisch dar!





**Lösung:**Ermittlung der Funktion  $u(-t)$  durch Spiegelung der Funktion  $u(t)$  an der  $u$ -Achsea) Ermittlung des geraden Anteils  $u_g(t)$  durch grafische Addition gemäß

$$u_g(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2} \quad 0,5$$

$$u_g(t < -3s) = \frac{0V + 0V}{2} = 0V \quad (0,5)$$

$$u_g(-3s \leq t < -2s) = \frac{2V + 4V}{2} = 3V \quad (0,5)$$

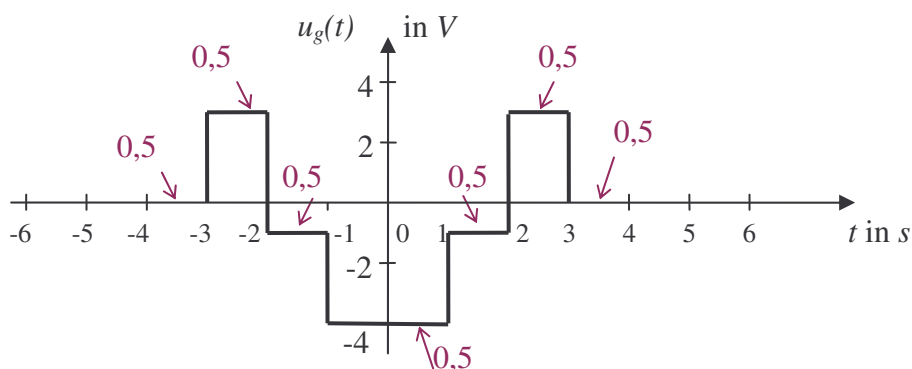
$$u_g(-2s \leq t < -1s) = \frac{2V - 4V}{2} = -1V \quad (0,5)$$

$$u_g(-1s \leq t < 1s) = \frac{-4V - 4V}{2} = -4V \quad (0,5)$$

$$u_g(1s \leq t < 2s) = \frac{-4V + 2V}{2} = -1V \quad (0,5)$$

$$u_g(2s \leq t < 3s) = \frac{4V + 2V}{2} = 3V \quad (0,5)$$

$$u_g(3s \leq t) = \frac{0V + 0V}{2} = 0V \quad (0,5)$$



pro richtigem Wert im richtigen Zeitbereich:  $7 \cdot 0,5$   
Aufgabe 4a)  $\Sigma$  4 Punkte

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

b) Ermittlung des ungeraden Anteils  $u_u(t)$  durch grafische Addition gemäß

$$u_u(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2} \quad 0,5$$

$$u_u(t < -3s) = \frac{0V - 0V}{2} = 0V \quad (0,5)$$

$$u_u(-3s \leq t < -2s) = \frac{2V - 4V}{2} = -1V \quad (0,5)$$

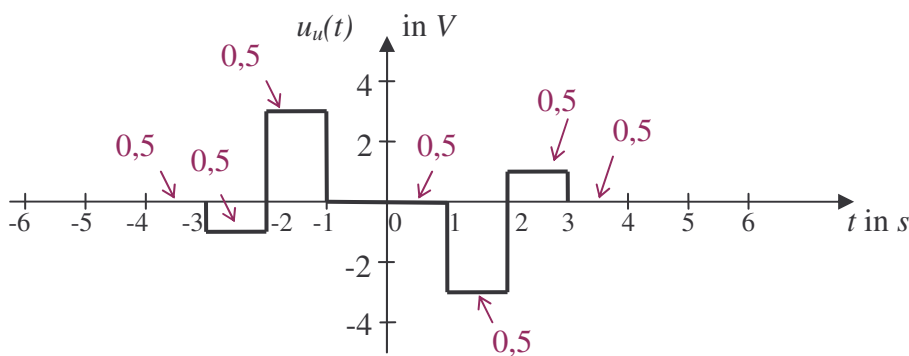
$$u_u(-2s \leq t < -1s) = \frac{2V - (-4V)}{2} = 3V \quad (0,5)$$

$$u_u(-1s \leq t < 1s) = \frac{-4V - (-4V)}{2} = 0V \quad (0,5)$$

$$u_u(1s \leq t < 2s) = \frac{-4V - 2V}{2} = -3V \quad (0,5)$$

$$u_u(2s \leq t < 3s) = \frac{4V - 2V}{2} = 1V \quad (0,5)$$

$$u_u(3s \leq t) = \frac{0V - 0V}{2} = 0V \quad (0,5)$$



pro richtigem Wert im richtigen Zeitbereich:  $7 \cdot 0,5$

Aufgabe 4b)  $\Sigma$  4 Punkte

Aufgabe 4)  $\Sigma$  8 Punkte

### Formelsammlung

#### Wahrscheinlichkeitskenngrößen

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion:  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion):  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx$

Auftrittswahrscheinlichkeit:  $W(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$

$$W(x_q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{x_q - \varepsilon}^{x_q + \varepsilon} f(x) \cdot dx$$

FH Jena	FB Elektrotechnik/Informationstechnik Prüfungsaufgaben Signalverarbeitung SS 09	Prof. Giesecke
---------	--	----------------

### Statistische Kenngrößen von Leistungssignalen

Gleichanteil/linearer Mittelwert: 
$$\bar{x} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} x(t) \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} x(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$$\bar{x} = \sum_{\text{alle } x_q} x_q \cdot W(x_q)$$

Gleichleistung:

$$P_{\bar{}} = [\bar{x}]^2$$

mittlere Leistung/quadr. Mittelwert: 
$$P = \overline{x^2} = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} x^2(t) \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} x^2(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$P = \overline{x^2} = \sum_{\text{alle } x_q} x_q^2 \cdot W(x_q)$$

Effektivwert:

$$x_{\text{eff}} = \sqrt{P} = \sqrt{\overline{x^2}}$$

Wechselleistung/Varianz:

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} [x(t) - \bar{x}]^2 \cdot dt = \frac{1}{N} \cdot \sum_{n=n_1}^{n_1+N-1} [x(n) - \bar{x}]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \bar{x}]^2 \cdot f(x) \cdot dx$$

$$P_{\sim} = \sigma^2 = \sum_{\text{alle } x_q} [x_q - \bar{x}]^2 \cdot W(x_q)$$

Standardabweichung: 
$$\sigma = \sqrt{P_{\sim}} = \sqrt{\sigma^2}$$

Leistungsbeziehung: 
$$P = \overline{x^2} = P_{\bar{}} + P_{\sim} = [\bar{x}]^2 + \sigma^2$$

### Statistische Kenngrößen von Energiesignalen

Impulsfläche (Impulsmoment 1. Ordnung): 
$$m_{i1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)$$

Impulsenergie (Impulsmoment 2. Ordnung): 
$$m_{i2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) \cdot dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n)$$

### Ermittlung des geraden und ungeraden Anteils

gerader Anteil: 
$$x_g(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \quad \text{bzw.} \quad x_g(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}$$

ungerader Anteil: 
$$x_u(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \quad \text{bzw.} \quad x_u(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}$$

### Transformationsvorschrift der Fourier-Transformation

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df \quad \circ \xrightarrow{\text{FT}} \bullet \quad \underline{U}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{G}(f) \cdot e^{j2\pi f t} \cdot df \quad \circ \xrightarrow{\text{FT}} \bullet \quad \underline{G}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-j2\pi f t} \cdot dt$$

### spezielle Funktionswerte

$$u(t=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f) \cdot df \quad \text{und} \quad \underline{U}(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \cdot dt \quad \text{bzw.} \quad \underline{G}(f=0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot dt$$

### Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}
 u_2(t) = u_1(t - t_0) & \quad \text{FT} \quad \bullet \\
 u_2(t) = u_1(t) \cdot e^{j2\pi f_0 t} & \quad \text{FT} \quad \bullet
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \underline{U}_2(f) = \underline{U}_1(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0} \\
 \text{Betrag: } |\underline{U}_2(f)| = |\underline{U}_1(f)| \\
 \text{Phase: } \varphi_{\underline{U}_2}(f) = \varphi_{\underline{U}_1}(f) - 2\pi f t_0 \\
 \underline{U}_2(f) = \underline{U}_1(f - f_0)
 \end{array} \right.$$

### Korrespondenzen der Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}
 u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für } -\frac{T}{2} \leq t \leq +\frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot T \cdot \text{si}(\pi \cdot T \cdot f) \\
 u(t) = U_0 \cdot \text{si}(\pi \cdot B \cdot t) & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = \begin{cases} \frac{U_0}{B} & \text{für } -\frac{B}{2} \leq f \leq +\frac{B}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
 u(t) = U_0 & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot \delta(f) \\
 u(t) = U_0 \cdot e^{j2\pi f_0 t} & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = U_0 \cdot \delta(f - f_0) \\
 u(t) = U_0 \cdot \cos(2\pi f_0 t) & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) + \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0) \\
 u(t) = U_0 \cdot \sin(2\pi f_0 t) & \quad \text{FT} \quad \bullet & \quad \underline{U}(f) = j \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f + f_0) - j \frac{U_0}{2} \cdot \delta(f - f_0)
 \end{aligned}$$

### Gruppenlaufzeit

$$\tau_{Gr} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi(f)}{df}$$

### Abtastung im Zeitbereich / Periodifizierung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 A\{u(t)\} = u(t) \cdot \text{III}_A(t) = u(t) \cdot t_A \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n \cdot t_A) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n \cdot t_A) \cdot t_A \cdot \delta(t - n \cdot t_A) \\
 \text{FT} \quad \bullet \\
 P\{\underline{U}(f)\} = \underline{U}(f) * \text{III}_P(f) = \underline{U}(f) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k \cdot f_P) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underline{U}(f - k \cdot f_P) \quad \text{mit } f_P = \frac{1}{t_A} \\
 \text{(n, k ganzzahlig)}
 \end{aligned}$$

### Periodifizierung im Zeitbereich / Abtastung im Frequenzbereich

$$\begin{aligned}
 u(t)_P = P\{u_T(t)\} = u_T(t) * \text{III}_P(t) = u_T(t) * \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - m \cdot t_P) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} u_T(t - m \cdot t_P) \\
 \text{FT} \quad \bullet \\
 \underline{U}(f)_A = A\{\underline{U}_T(f)\} = \underline{U}_T(f) \cdot \text{III}_A(f) = \underline{U}_T(f) \cdot f_A \cdot \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \mu \cdot f_A) \\
 = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \underline{U}_T(\mu \cdot f_A) \cdot f_A \cdot \delta(f - \mu \cdot f_A) \quad \text{mit } f_A = \frac{1}{t_P} \\
 \text{(m, } \mu \text{ ganzzahlig)}
 \end{aligned}$$