periodisches Signal:

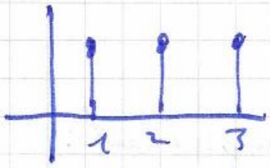
$$P_x = \overline{x^2} = \frac{1}{N_p} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N_p-1} x^2_{(q)}(t)$$

N_p -> Abtastwerte eine Periode über eine Periode

Voraussetzung: - periodensynchrone Abtastung

konstante Werte:

$$P_x = x^2_{(q)} \cdot (k_1)$$



$[P_x]$ = einheitenlos

-> Entnormierung macht für zeitdiskrete Signale keinen Sinn

Signalenergie E und Signalleistung P bei Energie- und Leistungssignale

- für ein Energiesignal gilt!
  - E = endliche positive Wert
  - P = 0

- für ein Leistungssignal gilt:

$E = +\infty$

$P =$ endlicher positiver Wert

Amplitudenparameter

- unabhängig von einem Energiewandler und benötigen keinen Bezugswiderstand

Effektivwert:

→ ist Amplitudenparameter von Leistungssignalen

$\cancel{U_{eff} = U =}$

Berechnung: Quadratwurzel aus mittlerer Signalleistung

$$U_{eff} = \sqrt{P_u} = \sqrt{\overline{u^2}} = \sqrt{m_2} \qquad [U_{eff}] = \sqrt{V^2} = V$$

$$U_{eff} = \sqrt{\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u^2(t)\, dt}$$

zeitdiskretes Signal:

$$X_{eff} = \sqrt{P_x} = \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{m_2} \qquad [X_{eff}] = \text{einheitenlos}$$

$$X_{eff} = \sqrt{\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_{(q)}^2 (k)}$$

Gleichanteil $\bar{u}$ oder $\bar{x}$

$\Rightarrow$ ist ein Amplitudenparameter von Leistungssignalen auch bezeichnet als:

linearer Mittelwert, Gleichkomponente, gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1 oder Erwartungswert $E(u)$ oder $E(x)$

Berechnung: beliebiger Spannungsverlauf $u(t)$:

$$\bar{u} = m_1 = E(u) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\, dt$$

$$[\bar{u}] = V$$

periodischer Spannungsverlauf: $t_p \Rightarrow$ Periodendauer

$$\bar{u} = m_1 = E(u) = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} u(t)\, dt$$

konstante Spannung:

$\bar{u} = m_1 = E(u) = U_0$

→ zeitdiskrete Signale

→ $x_{(7)}(k)$ (wertkontinuierlich oder wert diskret)

→ nicht periodisches Signal: $\bar{x} = m_1 = E(x) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_a}^{k_a+N-1} x_{(7)}(k)$

N: Abtastwertanzahl

k_a: beliebiger Abtastwert $[\bar{x}]$ = einheitenlos

periodisches zeitdiskretes Signal:

$$\bar{x} = m_1 = E(x) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_a}^{k_a+N_p-1} x_{(7)}(k)$$

N_p: Anzahl Werte einer Signalperiode

Abtastung muss periodensynchron erfolgt sein

konstante Werte:

$\bar{x} = x_{(p)}(k_a)$ $k_a \hat{=}$ beliebig

Signalgleichleistung:

(P_u bzw P_x)

⇒ ist ein Signalleistungsparameter von Leistungssignale bezogen auf $R = 1$

auch bezeichnet als: quadratischer linearer Mittelwert $[\bar{u}]^2$ bzw $[\bar{x}]^2$ oder quadratisches gewöhnliches Moment 1. Ordnung m_1^2

Berechnung:

Quadrierung des Gleichanteils

$$P_u = [\bar{u}]^2 = m_1^2 \qquad [P_u] = V^2$$

$$P_u = [\bar{u}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{t_1}^{t_1+T} u(t)\,dt\right]^2$$

reale Gleichleistung → Division durch realen Widerstand R

$$P_{R=} = \frac{P_{u=}}{R} \qquad [P_{R=}] = \frac{V^2}{\frac{V}{A}} = W$$

- zeitdiskrete Signale: $P_x = [\bar{x}]^2 = m_1^2$

$[P_x]$ = einheitenlos

$P_X =$

$$P_{x=} = [\bar{x}]^2 = m_1^2 = \left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x_{(\varphi)}(k)\right]^2$$

Beziehung der Leistungsbilanz

mittlere Signalleistung = Gesamtsignalleistung
= Signalgleichleistung + Signalwechselleistung
(bzw. Varianz)

$$\boxed{\begin{array}{l} P_u = P_{u=} + P_{u\sim} \\ \hline P_x = P_{x=} + P_{x\sim} \end{array}} \rightarrow \text{diskrete}$$

$$m_2 = m_1^2 + \mu_2$$

$\mu_2 = \sigma^2 = P_\sim \Rightarrow$ Zentralmoment 2. Ordnung
= Varianz = Signalwechselleistung

$$P_\sim \begin{array}{l} \nearrow P_{u\sim} \\ \searrow P_{x\sim} \end{array}$$

$$P_u = \underbrace{\bar{u^2}}_{\text{quadratischer Mittelwert}} = \underbrace{[\bar{u}]^2}_{\text{Gleichleistung}} + \sigma^2 \rightarrow \text{Varianz} \mathrel{\hat{=}} (\text{Standardabweichung})^2$$

$P_x = \overline{x^2} = [\bar{x}]^2 + \sigma^2 \leftarrow$ zeitdiskrete Wertfolge
einheitenlose Größe

quadratischer Mittelwert = quadratierte linearer Mittelwert + Varianz

Ermittlung der Signalwechselleistung $P_{u\sim}$ bzw $P_{x\sim}$

→ ist ein Signalleistungsparameter von Leistungssignalen, bei Spannungen bezogen auf R = 1 auch berechnet als: Varianz σ^2, quadrierte Standardabweichung, Dispersion oder Streuung σ^2, Zentralmoment 2. Ordnung μ_2 / Signalleistung des zentrierten (oder mittelwertfreien) Prozesses $\overline{u_z^2}$ (Index z (für zentralwert)) oder quadratischer Mittelwert des zentrierten (= mittelwertfreien) Prozesses $\overline{u_z^2}$.

Signalwechselleistung (bzw Varianz) = mittlere Signalleistung (bzw) Gesamtsignalleistung) − Signalgleichleistung

$P_{u\sim} = P_u - P_{u=}$ $\qquad$ $P_{x\sim} = P_x - P_{x=}$

$\mu_2 = m_2 - m_1^2$

$P_{u\sim} = \sigma^2 = \overline{u^2} - [\overline{u}]^2$ ← Einheit → V^2

$P_{x\sim} = \sigma^2 = \overline{x^2} - [\overline{x}]^2$ ← einheitelos

Varianz = quadratischer Mittelwert - quadrierter linearer Mittelwert

- Signalwechselleistung
  - wird bestimmt durch die Änderung des Signals
  - hat besondere Bedeutung in der Informationstechnik, da in dieser Leistung der informationstragende Anteil des Signals steckt.
  - erfasst auch die dem Nutzsignal überlagerten Störungen

Berechnung: beliebiger Spannungsverlauf:

$$P_{u\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} [u(t) - \bar{u}]^2 \cdot dt$$

Gleichanteil

$$[P_{u\sim}] = V^2$$

Spezialfall - periodischer Verlauf

$$P_{u\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{t_p} \int_{t_1}^{t_1+t_p} [u(t) - \bar{u}]^2 \, dt$$

konstante Spannung:

$$P_{u\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = 0$$

reale Wechselleistung → Division durch realen Widerstand R

$$P_{R\sim} = \frac{P_{u\sim}}{R} \qquad [P_{R\sim}] = \frac{V^2}{\frac{V}{A}} = W$$

- zeitdiskretes Signal $x_{(q)}(k)$
  - nicht periodisches Signal

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=k_a}^{k_a+N-1} [x_{(q)}(k) - \bar{x}]^2$$

$\bar{x}$: linearer Mittelwert der Zahlenfolge

Signalwechselleistung = Varianz

$P_{\sim} = \sigma^2$

zeitdiskrete Signale bzw. Zahlenfolge

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k+N-1} \left[x_{(q)}(k) - \bar{x} \right]^2$$

$\bar{x}$: lineare Mittelwert

Vorgehensweise bei endlicher Wertezahl und keiner Periodizität des Signals

→ in der Messtechnik 2 Fälle

Fall 1: - linearer Mittelwert $\bar{x}$ ist genau bekannt oder kann genau berechnet werden

- dann Berechnung der Varianz

über $P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} [x_{(q)}(k) - \bar{x}]^2$

Fall 2: genaue $\bar{x}$ nicht bekannt, sondern ein linearer $\bar{x}_N$ wird näherungsweise aus den zur Verfügung stehenden N Abtastwerten des aktuellen Messintervalls ermittelt, d.h.

$$\Rightarrow \bar{x}_N = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_{(q)}(k)$$

dann Berechnung der Varianz über

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} \left[x_{(q)}(k) - \bar{x}\right]^2$$

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} \left[x_{(q)}(k) - \frac{1}{N} \sum_{k=k_1}^{k_1+N-1} x_q(k)\right]^2$$

Grund der Division durch $\frac{1}{N-1}$

genäherter Gleichanteil $\bar{x}_N$ mit Werteanzahl N

folgt nach der Gruppe der N Abtastwerte

periodisches Signal

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = \frac{1}{N_p} \sum_{k=k_p}^{k_1+N-1} \left[x_{(q)}(k) - \bar{x}\right]^2$$

N_p: eine Signalperiode oder ganzzahliges Vielfache.

Voraussetzung: periodensynchrone Abtastung konstante Verlauf

$$P_{x\sim} = \sigma^2 = \mu_2 = 0$$

$$[P_{x\sim}] = [\sigma^2] = [\mu_2] = \text{einheitenlos}$$

Standardabweichung σ

$\Rightarrow$ Amplitudenparameter von Leistungssignalen

auch bezeichnet als

- Effektivwert des Wechselanteils $u_{z\,eff}$
  (z steht für zentriert = gleichanteil)
  $u_z(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ $u_{z\,eff} = \overline{U^2}$
  $x_z(k) = x(k) - \bar{x}$

Berechnung: positive Quadratwurzel aus Signalwechselleistung bzw. Varianz.

Zeitkontinuierlich

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{P_{x\sim}} = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\overline{u_z^2}}$$

$$[\sigma] = V$$

zeitdiskrete Wertefolge

$$\sigma = \sqrt{P_{x_\sim}} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2} = \sqrt{\mu_2} = \sqrt{\overline{x_\sim^2}} \qquad [\sigma] = \text{einheitenlos}$$

Impulsfläche

$A_u = m_{i1}$ bzw. $A_x = m_{i1}$

$\Rightarrow$ ist ein Amplitudenflächenparameter von Energiesignalen

auch bezeichnet als: Impulsmoment 1. Ordnung m_{i1}

Berechnung:

zeitkontinuierliche Signale:

$$A_u = m_{i1} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt \qquad [A_u] = [m_{i1}] = Vs$$

zeitdiskretes Signal

$$A_x = m_{i1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{(q)}(k) \qquad [A_x] = [m_{i1}] = \text{einheitenlos}$$

Übersicht sinnvoll bestimmbarer Signalparameter

(nur für 1 Namensgebung)

- Signal
  - Energiesignal
    - Amplitudenflächenparameter
      - Impulsfläche
      - (Lastunabhängig)
      - keine Quadrierung des Integranden
    - Signalenergieparameter
      - Signalenergie
      - Wert für R=1
      - Quadrierung des Integranden
    - keine Mittelwertbildung über der Zeit oder der Werteanzahl (keine Division durch Zeitdauer oder Werteanzahl)
  - Leistungssignal
    - Amplitudenparameter
      - Gleichanteil
      - Standardabweichung
      - Effektivwert
      - (Lastunabhängig)
      - keine Quadrierung des Integranden bzw. $\sqrt{\ }$ aus einem Integral mit quadrierten Integranden.
    - Signalleistungsparameter
      - Signalgleichleistung
      - Signalwechselleistung
      - mittlere Signalleistung = Gesamtsignalleistung
      - Werte für R = 1
      - Quadrierung des Integranden
    - Mittelwertbildung über der Zeit oder der Werteanzahl (Division durch Zeitdauer oder Werteanzahl)

Gleichanteil $\xrightarrow{|\bar{x}|^2}$ Signalgleichleistung

Signalwechselleistung $\xrightarrow{\sqrt{\sigma^2}}$ Standardabweichung

mittlere Signalleistung $\xrightarrow{\sqrt{\overline{x^2}}}$ Effektivwert

Verwendung eines realen Widerstandes

$$\frac{\text{Signalenergie}}{R} = \text{Energie}$$

$$\frac{\text{Signalgleichleistung}}{R} = \text{Gleichleistung}$$

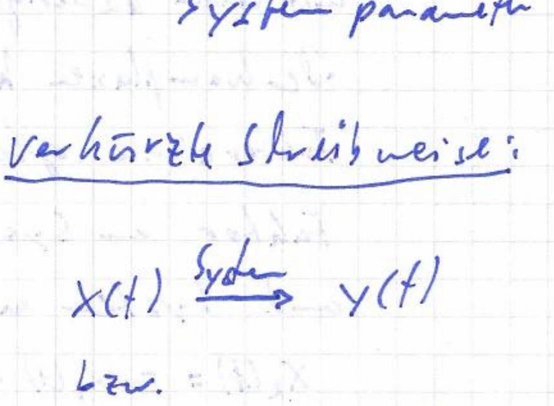
$$\frac{\text{Signalwechselleistung}}{R} = \text{Wechselleistung}$$

$$\frac{\text{mittlere Signalleistung}}{R} = \text{mittlere Leistung}$$

Das System

Ein System ist ein physikalisches oder auch technisches Gebilde (z.B. elektrische Schaltung), das ein Signal, das Eingangssignal oder die Systemanregung oder die Systemerregung in ein im Allgemeinen anderes Signal umformt, welches Ausgangssignal oder Systemreaktion oder Systemantwort genannt wird.

Eingangssignal oder Systemanregung oder Systemerregung



Ausgangssignal oder Systemreaktion oder Systemantwort

<u>verkürzte Schreibweise:</u>

$$x(t) \xrightarrow{\text{System}} y(t)$$

bzw.

$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

Allgemeine Systemeigenschaften

- 4. Eigenschaften

Systemeigenschaften

- Linearität
  - Homogenität = Verstärkungseigenschaft
  - Additivität
- Zeitinvarianz
- Kausalität
- Stabilität

• **Linearität**

- ist nur vorhanden bei Homogenität und Additivität

- Bedingung Homogenität: - wenn bekannt ist

$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$

so führt die Multiplikation mit einem beliebigen reellen oder komplexen konstanten Faktor zum gleichen Faktor am Systemeingang und Systemausgang

$x_2(t) = c \cdot x_1(t) \rightarrow y_2(t) = c \cdot y_1(t)$

- Bedingung für die Additivität: - wenn bekannt ist $x(t) \rightarrow y(t)$ und es sei das Eingangssignal additiv zerlegbar in $x_1(t) + x_2(t) = x(t)$, so können auch beide Anteile getrennt verarbeitet werden und die einzelnen Systemreaktionen addiert werden.

$$\begin{array}{ccc} & x_1(t) \longrightarrow y_1(t) & + \\ + & x_2(t) \rightarrow y_2(t) & \\ \hline & x(t) \longrightarrow y(t) & \end{array}$$

gilt auch für mehr als 2 Terme

auch für zeitdiskrete Systeme mit Ersetzung $t \rightarrow k$ gültig

- Bedingung Linearität: - beinhaltet Homogenität <u>und</u> Additivität

$$x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t)$$

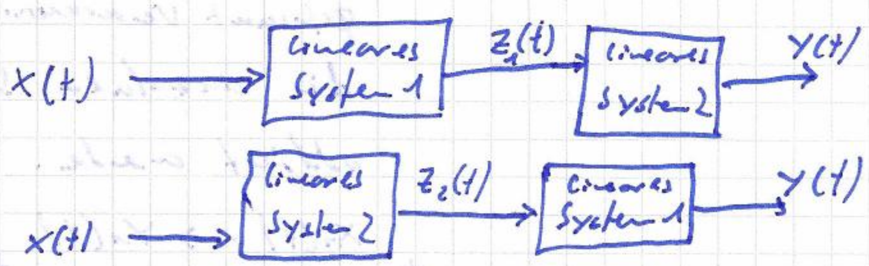
$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$$

- gilt auch für mehr als zwei Terme und auch weitere konstante Faktoren

- Eigenschaften linearer Systeme:

  - Vertauschbarkeit der Verarbeitungsreihenfolge von zwei oder mehreren in Kette geschalteten Systeme mit dabei im Allgemeinen unterschiedlichen Zwischensignalen.



im Allgemeinen $z_1(t) \neq z_2(t)$

  - im Ausgangssignal können nur Frequenzanteile vorkommen, welche auch im Eingangssignal enthalten sind (es können auch Frequenzanteile durch das System auch vollständig unterdrückt werden.).

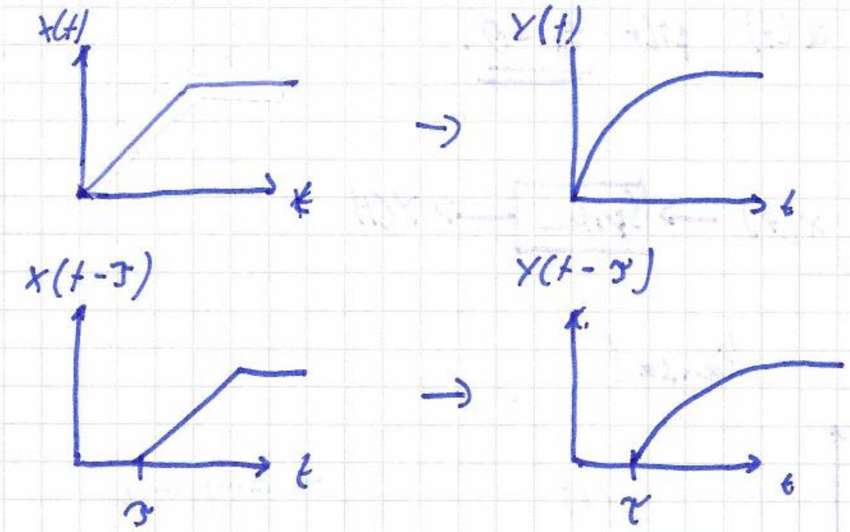
• <u>Zeitinvarianz:</u>

- ist vorhanden, wenn sich die Systemeigenschaften sich <u>zeitlich nicht ändern.</u>

- wenn bekannt ist $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$
so führt eine zeitliche Verschiebung des sonst gleichen Eingangssignales um eine beliebige konstante Zeit τ zu dem gleichen Ausgangssignal wie im unverschobenen Zustand, welches jetzt ebenfalls um τ verschoben erscheint. $x_2(t) = x_1(t-\tau) \rightarrow y_2(t) = y_1(t-\tau)$

- Bedingung Zeitinvarianz: τ ist beliebig, aber konstant

Bsp.:



- gilt auch für zeitdiskrete Signale

- zeitvariante Systeme:
  - sind Systeme mit zeitlichen Parameteränderungen, wie z.B. adaptive Systeme (adaptiv = anpassungsfähig), wie im Mobilfunk zur Kanalentzerrung eingesetzt.

- Kausalität
  - ist vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Beginn der Systemanregung einsetzt.

  ⇝ jedes realisierbare System muss zwingend kausal sein

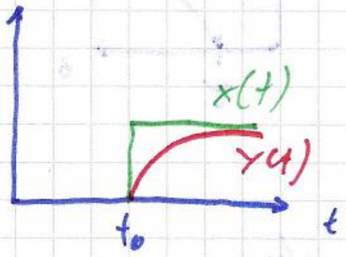
  wenn $x(t) = 0$ für $t < t_0$ $\rightarrow$ $y(t) = 0$ für $t < t_0$

t_0 : beliebige feste Zeitpunkt

- für viele Eingangssignale, insbesondere die Testsignale Deltaimpuls $\delta(t)$, Einheitssprung $\sigma(t)$ und Einheitsanstiegsfunktion $\alpha(t)$ gilt $\underline{\underline{t_0 = 0}}$.

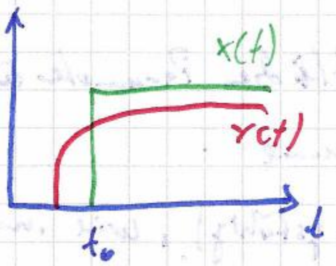
- Bsp.: $x(t) \rightarrow \boxed{\text{System}} \rightarrow y(t)$

kausal

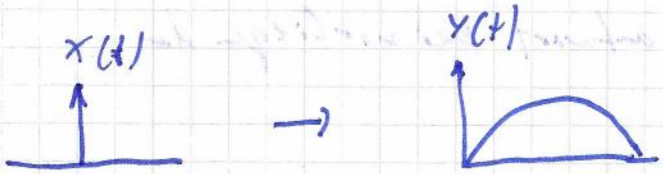


- Eingang
- Ausgang

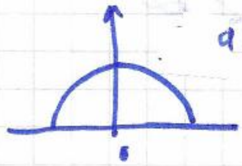
akausal (nicht kausal)



- Bedeutung nicht realisierbarer nicht kausaler bzw. akausaler Systeme:
  - erlaubt in einigen Fällen einfachere Betrachtungsweisen beim Systementwurf (Nullpunktsymmetrie vereinfacht frequenzmäßige Betrachtungsweisen)



kausal



akausal

- einfacher zu berechnen wegen Spiegelsymmetrie (Achsensymmetrie

∘ Stabilität

- ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränkten beliebigen breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt.

- wenn beliebiges breitbandiges $|x(t)| < \infty$ → gilt auch für den Ausgang $|y(t)| < \infty$

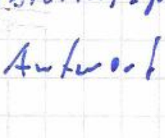
auch bezeichnet: BIBO-Stabilität

(engl. Bounded-Input-Bounded-Output Stability

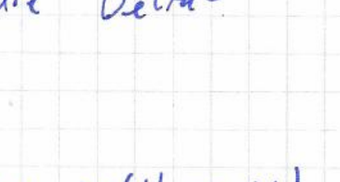
bounded ≙ beschränkt) oder Amplitudenstabilität

weitere Stabilitätsprüfung möglich über die Delta-Impuls-Antwort.

$x(t) = \delta(t)$ ∘→ $\boxed{\text{System}}$ →∘ $y(t) = g(t)$



→ Impulsantwort



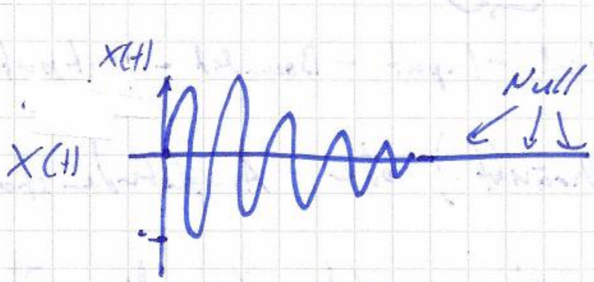
Bedingung an Impulsantwort bei vorliegen der Stabilität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \, dt < \infty$$

für zeitdiskret mit $x(k)$ und $y(k)$ gleichermaßen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(k)|$$

- nach breitbandiger Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal nach einer endlichen Zeit t_2 wieder auf den Wert 0 abklingen und auf den Wert 0 verbleiben.
- Verbleibende Ausgangsleistung nach Verschwinden die Anregung wird 0.



1. $x(t < t_1)$ = breitbandiges Anregungssignal
2. $x(t > t_1) = 0 \rightarrow y(t_2 < t < \infty) = 0$

Leistung: $P_y(t_2 < t < \infty) = 0$

Besonderheit

- reale physikalische Systeme, welche ausschließlich aus passiven Bauelementen aufgebaut sind, sind stets stabil

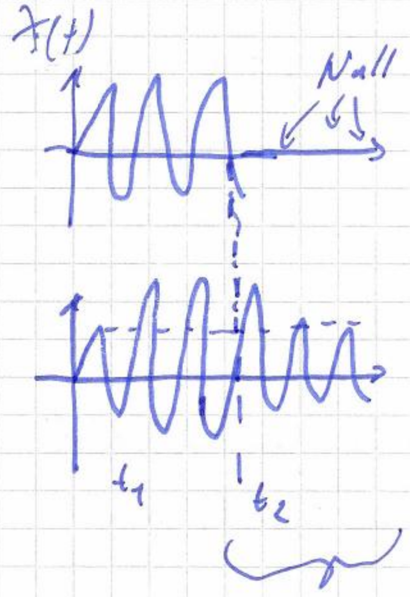
Grenzstabilität oder Quasistabilität

- Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt
- Ausgangssignal kann beim Anliegen bestimmter Eingangssignale unbegrenzt anwachsen. (bis zur physikalisch maximalen Ausgangsleistung der Systeme)

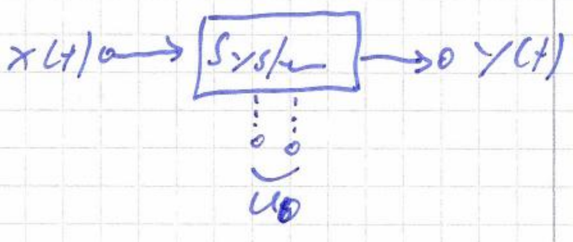
Nachweismöglichkeit:

nach einer breitbandigen Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal nach einer endlichen Zeit t_2 eine konstante Ausgangssignalleistung größer Null abgeben.

→ dabei muss Anregung so angelegt werden, dass das reale System nicht in die Begrenzung laufen kann.



P_y = konstant



- geht nur mit aktiven System
- beispielsweise ein Integrator
- links der jω-Achse stabiles Verhalten
- rechts der jω-Achse instabiles System

1. $x(t<t_1)$ = breitbandiges Anregungssignal (dabei darf keine Ausgangssignal-begrenzung auftreten)

2. $x(t>t_1)=0 \rightarrow P_y = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_2}^{t_2+T} y^2(t)\,dt$ = konstant

} Kriterium Grenzstabilität oder Quasistabilität

Anwendungsbeispiele: - idealer Integrator (ohne Abklingen bzw. verringern des Integrationswertes bei Einspeisung von Nullwerten)

- analoge Sinusgenerator mit Amplitudenregelung im eingeschwungenen Zustand.

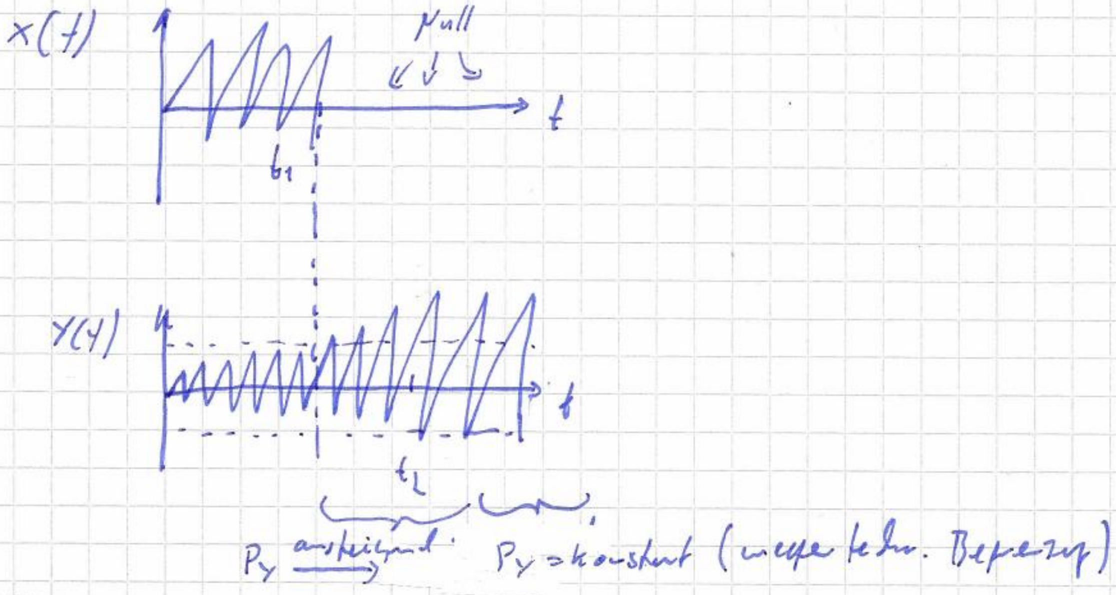
Instabilität

- Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt

- Ausgangssignal kann selbst beim Verschwinden bestimmter Eingangssignale weiterhin unbegrenzt anwachsen (bis zur technischen Begrenzung des realen Systems)

Nachweismöglichkeit:

- nach breitbandiger Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal zu einem späteren Zeitpunkt t_2 eine weiterhin stetig steigende Ausgangsleistung abgeben (bis zur technischen Begrenzung des realen Systems).



Kriterium der Instabilität:

1. $x(t < t_1)$ = breitbandige Anregung (dabei keine Ausgangssignalbegrenzung durch die Amplitude von $x(t)$)

2. $x(t > t_1) = 0$

$\rightarrow P_y(t, \Delta t) < P_y(t_2 > t_1, \Delta t)$

bis zur technische Begrenzung

dann $P_y(t > t_{begr.}) = $ konst.

Kurzzeitleistung:

mit $P_y(t_x, \Delta t)$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_x}^{t_x + \Delta t} y^2(t)\, dt$$

Δt: einige Perioden des Signals

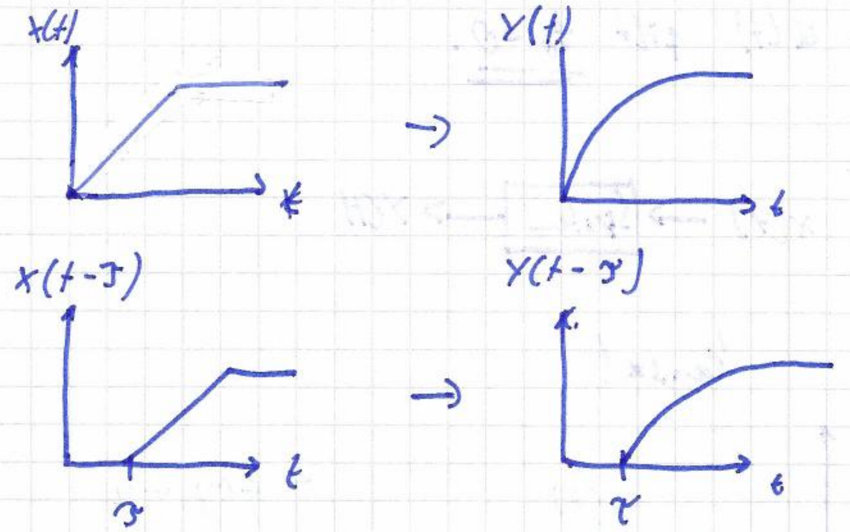
Anwendungsbeispiel:

- Ausschwingen eines analogen Oszillators beim Einschalten des Gerätes.

-

- Bedingung Zeitinvarianz: τ ist beliebig, aber konstant

Bsp.:



- gilt auch für zeitdiskrete Signale

- zeitvariante Systeme:
  - sind Systeme mit zeitlichen Parameteränderungen, wie z.B. adaptive Systeme (adaptiv = anpassungsfähig), wie im Mobilfunk zur Kanalentzerrung eingesetzt.

• <u>Kausalität</u>

- ist vorhanden, wenn die Systemreaktion nicht schon vor Beginn der Systemanregung einsetzt.

  $\rightsquigarrow$ jedes realisierbare System muss zwingend kausal sein

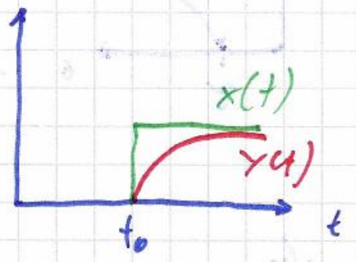
  wenn $x(t) = 0$ für $t < t_0 \rightarrow Y(t) = 0$ für $t < t_0$

t_0 : beliebige feste Zeitpunkt

- für viele Eingangssignale, insbesondere die Testsignale Deltaimpuls $\delta(t)$, Einheitssprung $\sigma(t)$ und Einheitsanstiegsfunktion $\alpha(t)$ gilt $\underline{\underline{t_0 = 0}}$.

- Bsp.: $x(t) \rightarrow \boxed{\text{System}} \rightarrow y(t)$

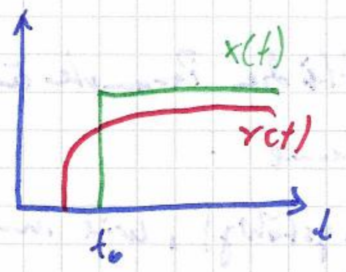
kausal



– Eingang

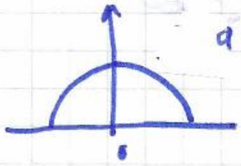
– Ausgang

akausal (nicht kausal)



- Bedeutung nicht realisierbarer nicht kausaler bzw. akausaler Systeme:
    - erlaubt in einigen Fällen einfachere Betrachtungsweisen beim Systementwurf (Nullpunktsymmetrie vereinfacht frequenzmäßige Betrachtungsweisen)

kausal



akausal

- einfacher zu berechnen wegen Spiegelsymmetrie (Achsensymmetrie

• Stabilität

- ist vorhanden, wenn bei einem betragsmäßig beschränkten beliebigen breitbandigen Eingangssignal auch ein betragsmäßig beschränktes Ausgangssignal vorliegt.

- wenn beliebiges breitbandiges $|x(t)| < \infty$ → gilt auch für den Ausgang $|y(t)| < \infty$

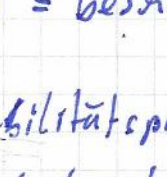
auch bezeichnet: BIBO-Stabilität

(engl. Bounded-Input-Bounded-Output Stability

bounded ≙ beschränkt) oder Amplitudenstabilität

weitere Stabilitätsprüfung möglich über die Delta-Impuls-Antwort.

$x(t) = \delta(t)$ o→ System →o $y(t) = g(t)$



→ Impulsantwort

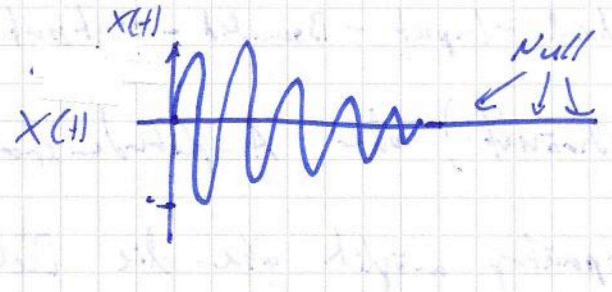
Bedingung an Impulsantwort bei vorliegen der Stabilität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \, dt < \infty$$

für zeitdiskret mit $x(k)$ und $y(k)$ gleichermaßen

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |g(k)|$$

- Nach breitbandiger Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal nach einer endlichen Zeit t_2 wieder auf den Wert 0 abklingen und auf den Wert 0 verbleiben.
- Verbleibende Ausgangsleistung nach Verschwinden die Anregung wird 0.



1. $x(t < t_1)$ = breitbandiges Anregungssignal
2. $x(t > t_1) = 0 \rightarrow y(t_2 < t < \infty) = 0$

Leistung: $P_y(t_2 < t < \infty) = 0$

Besonderheit

- reale physikalische Systeme, welche ausschließlich aus passiven Bauelementen aufgebaut sind, sind stets stabil

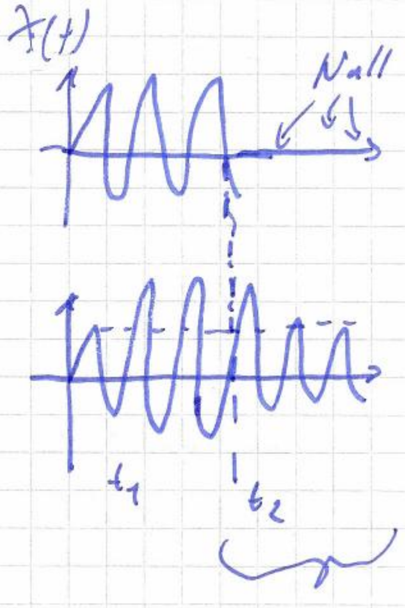
Grenzstabilität oder Quasistabilität

- Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt
- Ausgangssignal kann beim Anliegen bestimmter Eingangssignale unbegrenzt anwachsen. (bis zur physikalisch maximalen Ausgangsleistung der Systeme)

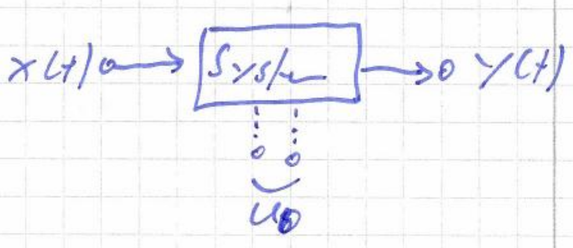
Nachweismöglichkeit:

nach einer breitbandigen Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal nach einer endlichen Zeit t_2 eine konstante Ausgangssignalleistung größer Null abgeben.

→ dabei muss Anregung so angelegt werden, dass das reale System nicht in die Begrenzung laufen kann.



P_y = konstant



- geht nur mit aktiven System
- beispielsweise ein Integrator
- links der $j\omega$-Achse stabiles Verhalten
- rechts der $j\omega$-Achse instabiles System

1. $x(t<t_1)$ = breitbandiges Anregungssignal (dabei darf keine Ausgangssignal-begrenzung auftreten)

2. $x(t>t_1) = 0 \rightarrow P_y = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_2}^{t_2+T} y^2(t)\,dt$ = konstant

Kriterium Grenzstabilität oder Quasistabilität

Anwendungsbeispiele: – idealer Integrator (ohne Abklingen bzw. verringern des Integrationswertes bei Einspeisung von Nullwerten)

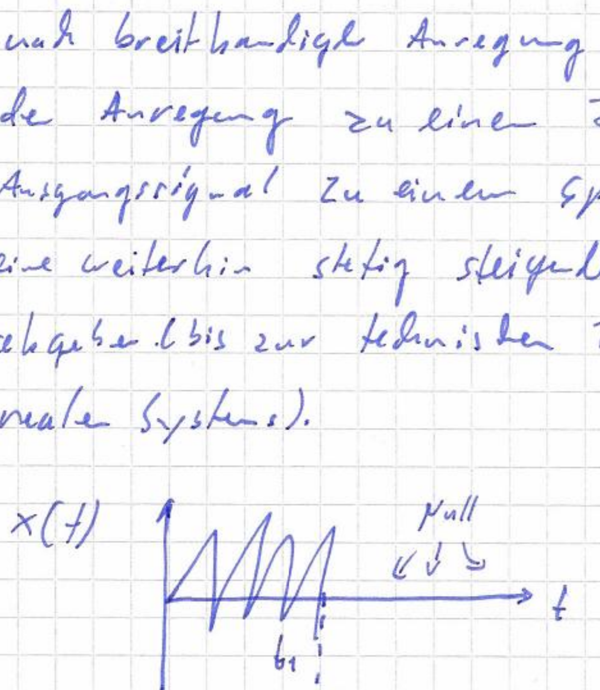
- analoge Sinusgeneratoren mit Amplitudenregelung im eingeschwungenen Zustand.

Instabilität

- Bedingungen der Stabilität werden nicht erfüllt
- Ausgangssignal kann selbst beim Verschwinden bestimmter Eingangssignale weiterhin unbegrenzt anwachsen (bis zur technischen Begrenzung des realen Systems)

Nachweismöglichkeit:

- nach breitbandiger Anregung muss nach Verschwinden der Anregung zu einem Zeitpunkt t_1 das Ausgangssignal zu einem späteren Zeitpunkt t_2 eine weiterhin stetig steigende Ausgangsleistung abgeben (bis zur technischen Begrenzung des realen Systems).



P_y ansteigend P_y konstant (wegen techn. Begrenzung)

Kriterium der Instabilität:

1. $x(t < t_1)$ = breitbandige Anregung (dabei keine Ausgangssignalbegrenzung durch die Amplitudenwahl $x(t)$)

2. $x(t > t_1) = 0$

$\rightarrow P_y(t, \Delta t) < P_y(t_2 > t_1, \Delta t)$

bis zur technische Begrenzung

dann $P_y(t > t_{begr.}) =$ konst.

Kurzzeitleistung:

mit $P_y(t_x, \Delta t)$

$$= \frac{1}{\Delta t} \int_{t_x}^{t_x + \Delta t} y^2(t)\, dt$$

Δt: einige Perioden des Signals

Anwendungsbeispiel:

- Ausschwingen eines analogen Oszillators beim Einschalten des Gerätes.
-