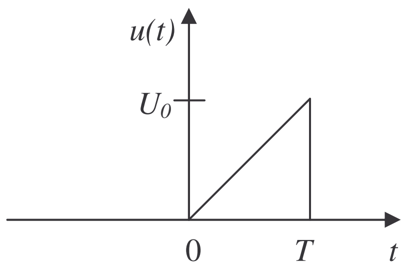
**1. Aufgabe:**
Beschreiben Sie die Eigenschaften eines geraden und ungeraden Signals an einem selbstgewählten Signalverlauf.
**Lösung:**

gerade: $x_g(t) = x_g(-t)$ $\quad$ $x_g(n) = x_g(-n)$

ungerade: $x_u(t) = -x_u(-t)$ $\quad$ $x_u(n) = -x_u(-n)$

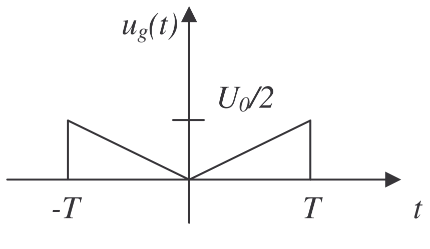
**2. Aufgabe:**
Zerlegen Sie folgende Funktion in ihren geraden und ungeraden Anteil. Überprüfen Sie die additive Zerlegung.




$$u(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{T} \cdot t \;\; \textit{für} \;\; 0 \le t \le T \\ 0 \;\; \textit{sonst} \end{cases}$$

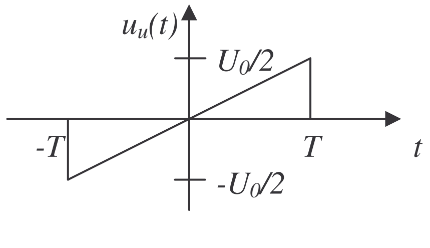
**Lösung:**
gerader Anteil:

$$u_g(t) = \begin{cases} -\frac{U_0}{2T} \cdot t & \textit{für} \;\; (-T \le t \le 0) \\ \frac{U_0}{2T} \cdot t & \textit{für} \;\; (0 \le t \le T) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

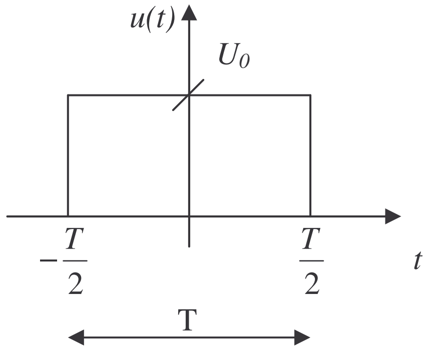



ungerader Anteil:

$$u_u(t) = \begin{cases} \frac{U_0}{2T} \cdot t & \textit{für} \;\; (-T \le t \le T) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

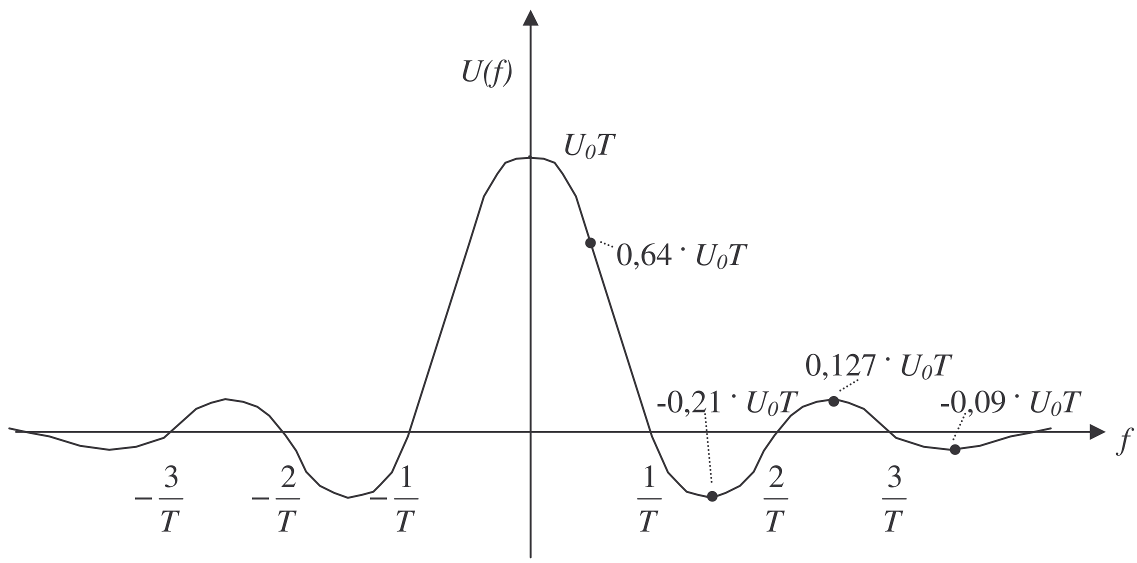


**3. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die Fouriertransformierte *U(f)* der angegebenen Rechteck-Zeitfunktion durch Lösen des Fourierintegrals.
Stellen Sie das Ergebnis sowohl linear als auch logarithmisch (in Dezibel dB) graphisch dar.
Normieren Sie den Maximalwert der logarithmischen Darstellung auf 0 dB.

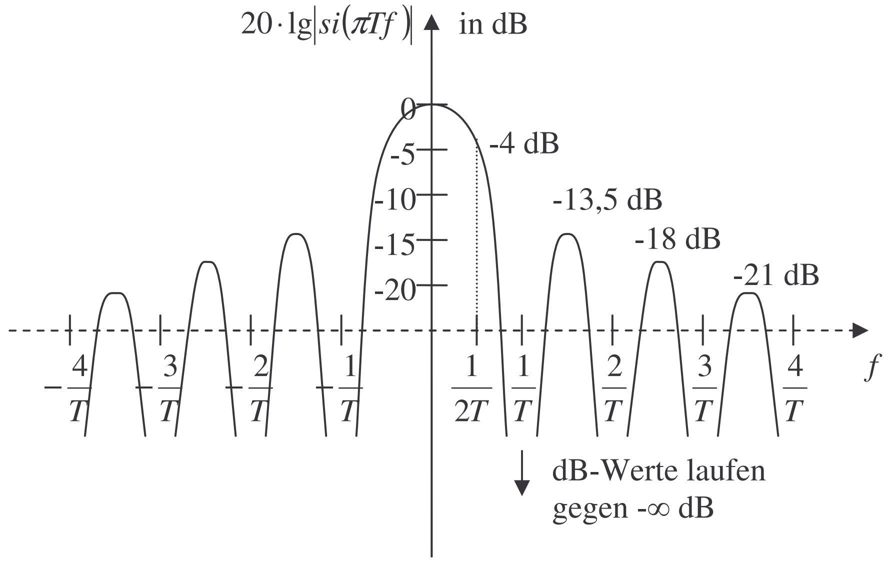



$$u(t) = \begin{cases} U_0 \ \ \mathit{für}\ |t| \le \dfrac{T}{2} \\ 0 \ \ \mathit{sonst} \end{cases}$$

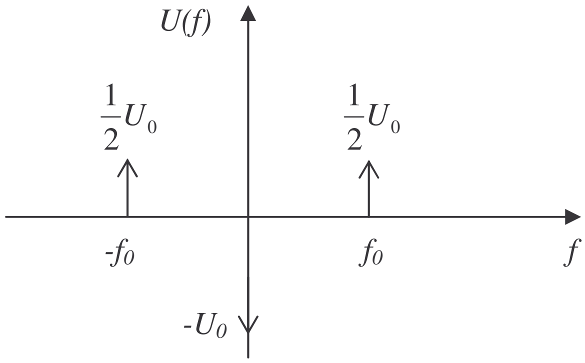
**Lösung:**
$U(f) = U_0 T \, si(\pi T f)$



$$20 \cdot \lg \left| \frac{U(f)}{U_0 \cdot T} \right| = 20 \cdot \lg \left| si(\pi T f) \right|$$

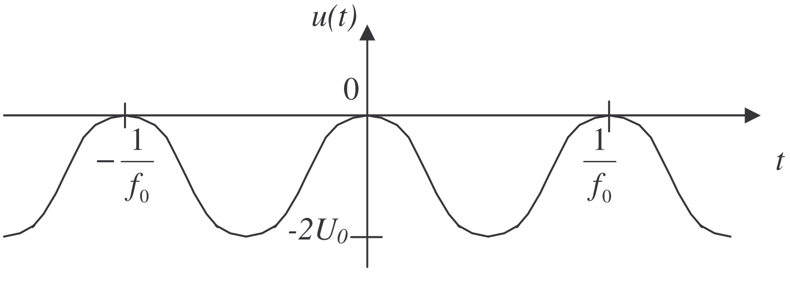



**4. Aufgabe:**
Bestimmen Sie die Zeitfunktion zu der gegebenen Fouriertransformierten unter Anwendung der Rücktransformationsvorschrift des Einheitsstoßes (Diracstoß), des Verschiebungssatzes und der Eigenschaft der Additivität.




$$U(f) = \frac{1}{2} U_0 \cdot \delta(f + f_0) - U_0 \cdot \delta(f) + \frac{1}{2} U_0 \cdot \delta(f - f_0)$$

**Lösung:**
$u(t) = U_0 \cdot [\cos(2\pi f_0 t) - 1]$



**5. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die Fouriertransformierte einer Sinusschwingung basierend auf dem vorliegenden Ergebnis der Transformation der Kosinusschwingung mit

$$u(t) = U_0 \cos(2\pi f_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(f) = U_0\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)\right]$$

durch
a) Anwendung des Differentiationssatzes und der Eigenschaft der Linearität,
b) Anwendung des Verschiebungssatzes.
Stellen Sie die Ergebnisse der Transformation als Realteil und Imaginärteil sowie Betrag und Phase dar. Beachten Sie auch die Auswirkungen der Polarität der Konstante $U_0$ (positiv bzw. negativ) auf die Phase des Signals.
**Lösung:**
a) Differentiationssatz

$$u(t) = \frac{d\left[U_0 \cos(2\pi f_0 t)\right]}{dt} = -2\pi f_0 U_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U(f) = (j2\pi f)U_0\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}(f-f_0)\right]$$

$$\underline{u(t) = U_0 \sin(2\pi f_0 t)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \underline{U(f) = U_0\left[\frac{j}{2}\delta(f+f_0) - \frac{j}{2}\delta(f-f_0)\right]}$$

b) Verschiebungssatz

$$u(t) = U_0 \cos\big(2\pi f_0 (t-t_0)\big) = U_0 \cos(2\pi f_0 t - 2\pi f_0 t_0) = U_0 \cos\left(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = U_0 \sin(2\pi f_0 t)$$

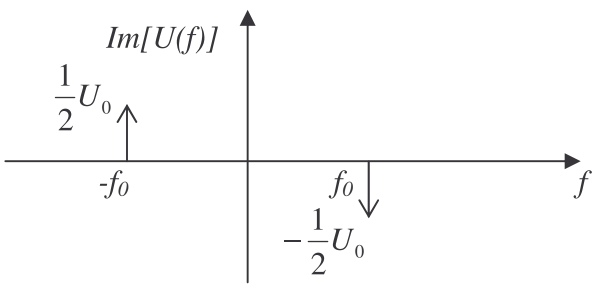
$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$U(f) = U_0\left[\frac{1}{2}\delta(f+f_0) + \frac{1}{2}\delta(f-f_0)\right] \cdot e^{-j2\pi \frac{1}{4 f_0} \cdot f}$$

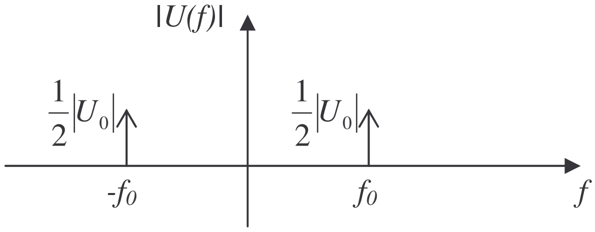
$$\underline{U(f) = U_0\left[\frac{j}{2}\delta(f+f_0) - \frac{j}{2}\delta(f-f_0)\right]}$$

Realteil *U(f) = 0*

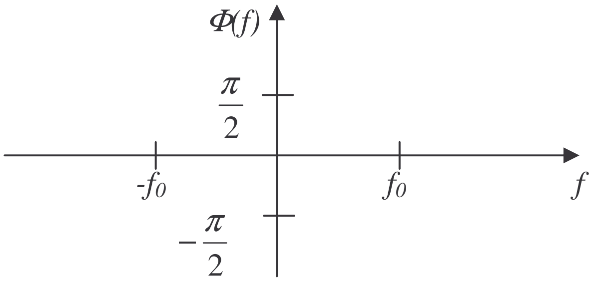
Imaginärteil



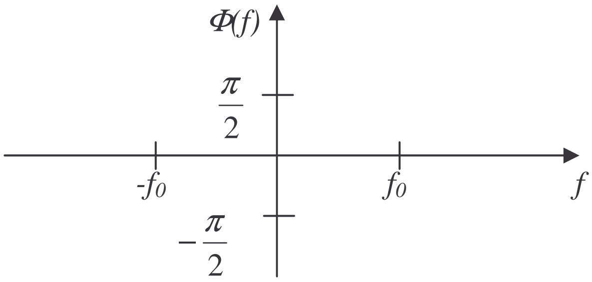
Betrag



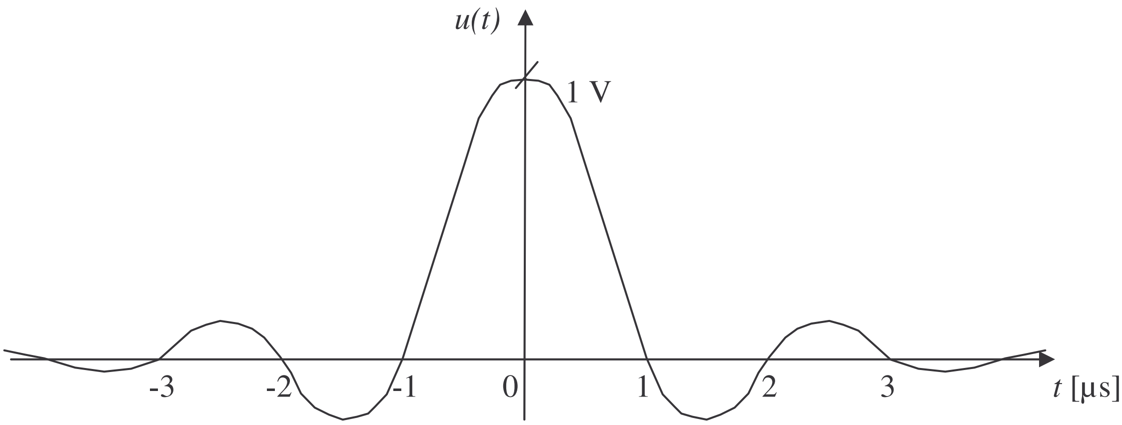

Phase für $U_0 > 0$




Phase für $U_0 < 0$

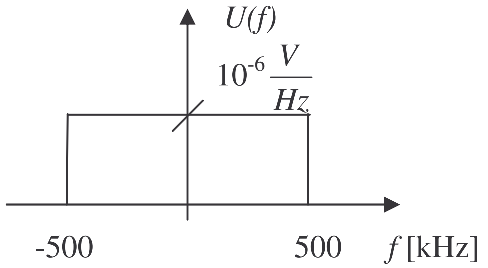



**6. Aufgabe:**
Ermitteln Sie das Amplitudendichtespektrum (Frequenzbereich) des folgenden Signals! Benutzen Sie als Basis die Ergebnisse aus Aufgabe 3 und wenden Sie den Vertauschungssatz von Zeit- und Frequenzbereich an.




$$u(t) = 1V \cdot si\left(\frac{\pi}{1\mu s} \cdot t\right)$$

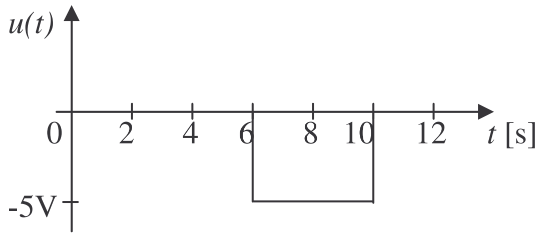
**Lösung:**




**7. Aufgabe:**
Charakterisieren Sie Energiesignale und Leistungssignale! Welche Bedingungen werden an die Signalenergie $E$ und die mittlere Signalleistung $P$ dieser beiden Signalklassen gestellt?
**Lösung:**
Energiesignal:
- zeitlich begrenztes Signal (Puls) oder Signal mit abklingender Amplitude
- deterministisch oder stochastisch (z. B. Burst-Signal oder Signalpaket mit Header)
- Bedingung: Energie $< \infty$ und Leistung geht gegen 0

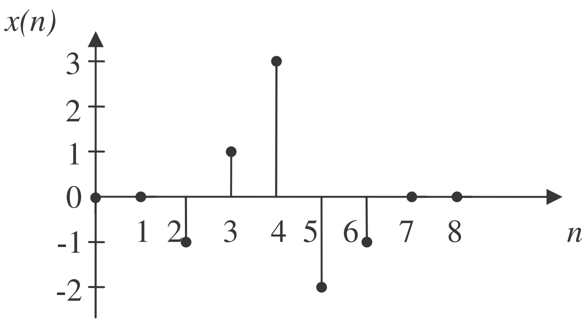
Leistungssignal:
- zeitlich unbegrenztes Signal
- deterministisch (konstant oder periodisch) oder stochastisch
- Bedingung: Leistung $< \infty$ und Energie $= \infty$

**8. Aufgabe:**
Berechnen Sie die normierte Signalenergie $E$ des folgenden Rechteckimpulses!



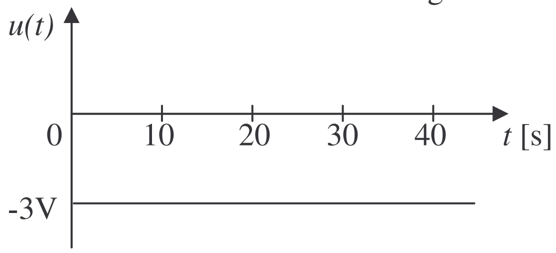

**Lösung:**
$E = \underline{\underline{100 V^2 s}}$

**9. Aufgabe:**
Berechnen Sie die normierte Signalenergie $E$ des folgenden zeitdiskreten Impulses!




**Lösung:**
$E = \underline{\underline{16}}$

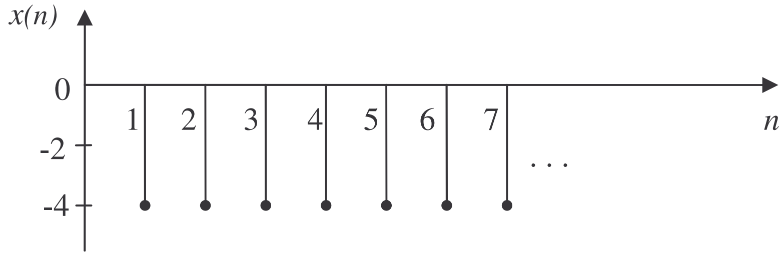
**10. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die normierte mittlere Signalleistung *P* folgender Gleichspannung!




**Lösung:**

$$P_p = \underline{\underline{9V^2}}$$

**11. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die normierte mittlere Signalleistung *P* folgender konstanten zeitdiskreten Wertefolge!




**Lösung:**

$$P_p = \underline{16}$$

**12. Aufgabe:**
Berechnen Sie die normierte mittlere Signalleistung des folgenden mit einer Gleichspannung überlagerten Sinustones der Frequenz von 1kHz!

$$u(t) = -2V + 3V \cdot \sin(2\pi \cdot 1kHz \cdot t)$$

**Lösung:**

$$\underline{P_p = U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$$

konkrete Werte: $U_0$ = -2 V,   $U_1$ = 3 V

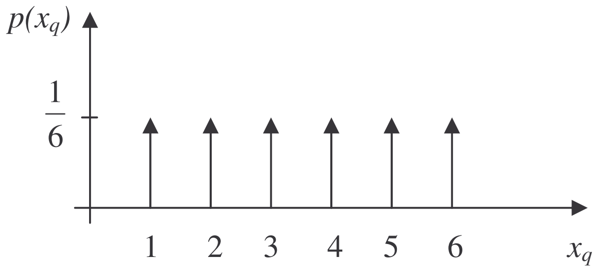
$$P_p = \underline{\underline{8{,}5V^2}}$$

**13. Aufgabe:**
Welche Aussagen über ein stochastisches Signal lassen sich mit der Wahrscheinlichkeitsdichte *p(x)* und der Wahrscheinlichkeitsfunktion *F(x)* gewinnen?
**Lösung:**
Wahrscheinlichkeitsdichte *p(x)*:
- ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Signal *x(n)* (zeitdiskret) oder *x(t)* (zeitkontinuierlich) den Wert *x* annimmt
- eine Wahrscheinlichkeit von *p(x)* = 1 heißt, dass das Signal immer den Wert *x* annimmt (konstantes Signal)

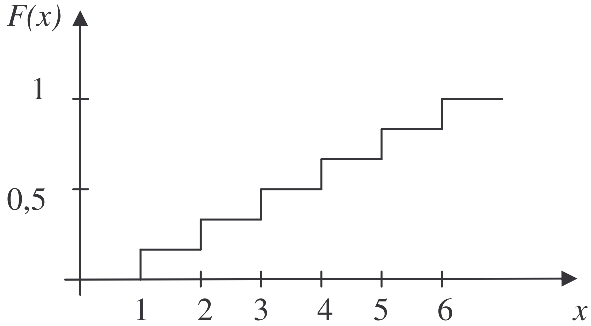
Wahrscheinlichkeitsfunktion F(x):
- ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Signal *x(n)* (zeitdiskret) oder *x(t)* (zeitkontinuierlich) einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich *x* ist

**14. Aufgabe:**
Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_q)$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$ der Augenzahlen eines Würfels an!
**Lösung:**

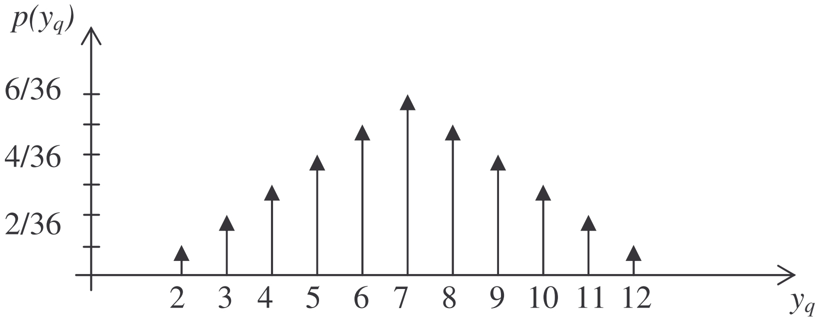
Wahrscheinlichkeitsdichte: $p(x_q) = \frac{1}{6}$ für $x_q$ ε 1; 2; 3; 4; 5; 6



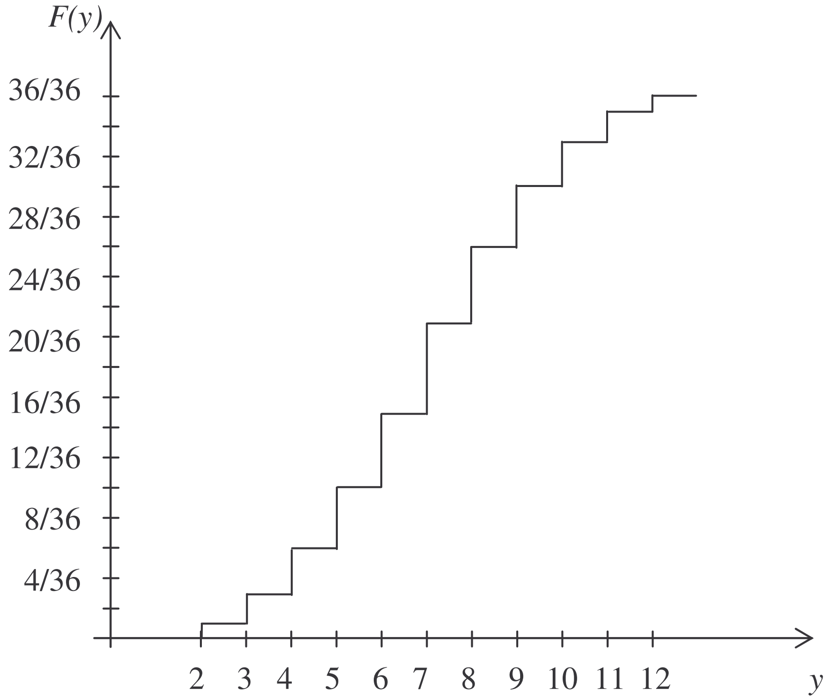

Wahrscheinlichkeitsfunktion:




**15. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y_q)$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(y)$ der Summe der Augenzahlen von zwei unabhängigen Würfeln!
**Lösung:**
Wahrscheinlichkeitsdichte

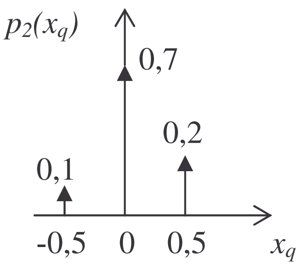


Wahrscheinlichkeitsfunktion



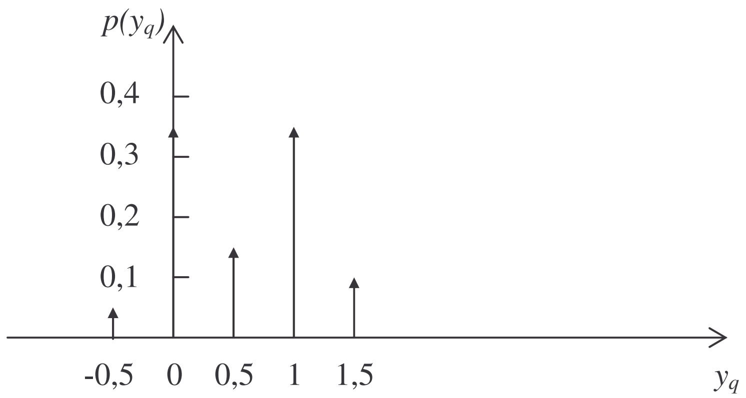

**16. Aufgabe:**
Berechnen Sie die resultierende Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y_q)$ nach der additiven Überlagerung einer gleichverteilten 0,1 Bitfolge (abgebildet auf die Zahlenwerte von 0 und 1) durch das angegebene Störsignal!

Störsignal



**Lösung:**

| mögliche Summenwerte $y_q$ | Wahrscheinlichkeitsdichte $p(y_q) = \sum_i p_i(y_q)$ |
|---|---|
| -0,5 | 0,05 |
| 0 | 0,35 |
| 0,5 | 0,1 + 0,05 = 0,15 |
| 1 | 0,35 |
| 1,5 | 0,1 |



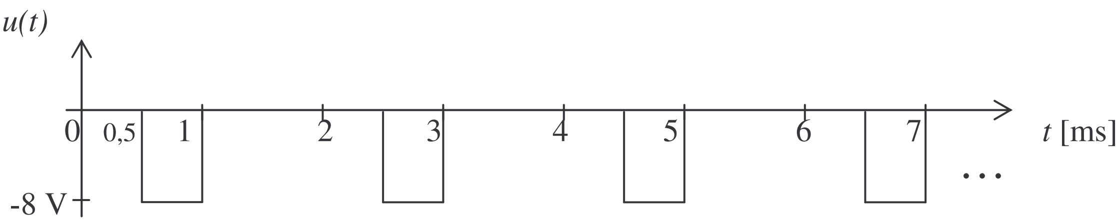

**17. Aufgabe:**

Ermitteln Sie die statistischen Parameter

a) Gleichanteil
b) Gleichleistung
c) mittlere Leistung
d) Varianz
e) Standardabweichung
f) Effektivwert
g) Aussteuerbereich
h) Spitzenwert des Signalbetrags
i) Crest-Faktor

des gegebenen periodischen Signals!

Stellen Sie weiterhin das Signal als mittelwertfreies (zentriertes) Signal grafisch dar!




**Lösung:**

a) Gleichanteil: $\bar{x} = \underline{\underline{-2V}}$

b) Gleichleistung: $P_{=} = \underline{\underline{4V^2}}$

c) mittlere Leistung: $P = \underline{\underline{16V^2}}$

d) Varianz: $\sigma^2 = \underline{\underline{12V^2}}$

e) Standardabweichung: $\sigma = \underline{\underline{3{,}464V}}$

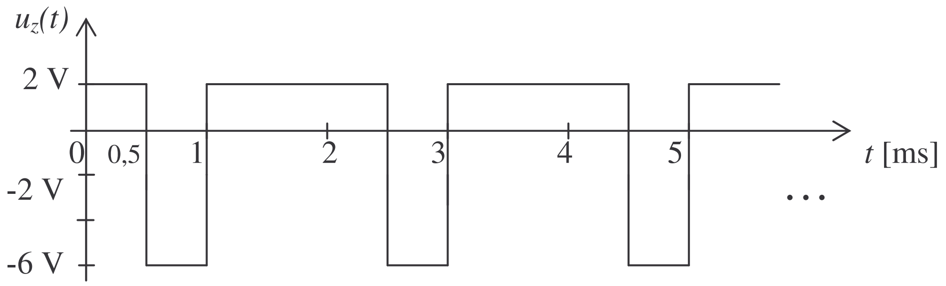
f) Effektivwert: $u_{eff} = \underline{\underline{4V}}$

g) Aussteuerbereich: $u_{ss} = \underline{\underline{8V}}$

h) Spitzenwert des Signalbetrags: $u_s = \underline{\underline{8V}}$

i) Crest-Faktor: $C_r = \underline{\underline{2}}$

grafische Darstellung des mittelwertfreien (gleichanteilsfreien, zentrierten) Signals $u_z(t)$
($z$ für zentriert)




$u_z(t) = u(t) + 2V$

**18. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die statistischen Parameter
- a) Gleichanteil
- b) Gleichleistung
- c) mittlere Leistung
- d) Wechselleistung
- e) Standardabweichung
- f) Effektivwert
- g) Aussteuerbereich
- h) Spitzenwert des Signalbetrags
- i) Crest-Faktor

einer gleichverteilten 0,1 Bitfolge (abgebildet auf die Zahlenwerte von 0 und 1).
**Lösung:**

a) Gleichanteil: $\bar{x} = \underline{\underline{0{,}5}}$

b) Gleichleistung: $P_{=} = \underline{\underline{0{,}25}}$

c) mittlere Leistung: $P = \underline{\underline{0{,}5}}$

d) Varianz: $P_{\sim} = \underline{\underline{0{,}25}}$

e) Standardabweichung: $\sigma = \underline{\underline{0{,}5}}$

f) Effektivwert: $x_{eff} = \underline{\underline{0{,}7071}}$

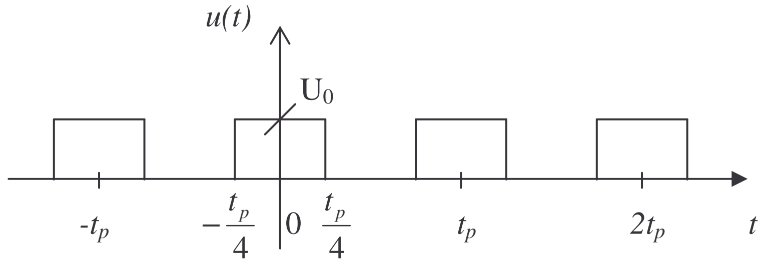
g) Aussteuerbereich: $x_{ss} = \underline{\underline{1}}$

h) Spitzenwert des Signalbetrags: $x_s = \underline{\underline{1}}$

i) Crest-Faktor: $C_r = \underline{\underline{1{,}414}}$

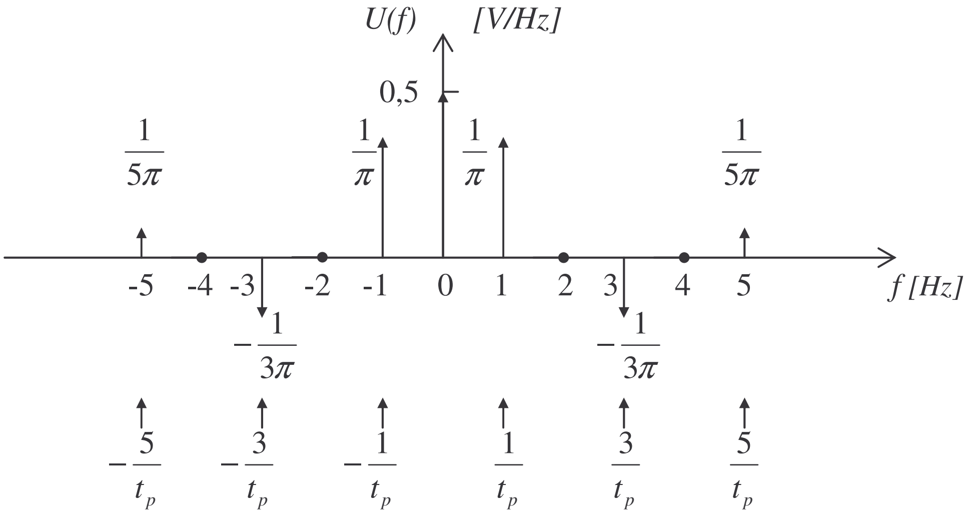
**19. Aufgabe:**

Ermitteln Sie das Fourier-Spektrum der angegebenen periodischen Rechteckfolge mit der Periode $t_p$ = 1s und dem Spannungswert $U_0$ = 1V! Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar! Aus welchen harmonischen Anteilen lässt sich die Rechteckfolge additiv zusammensetzen?



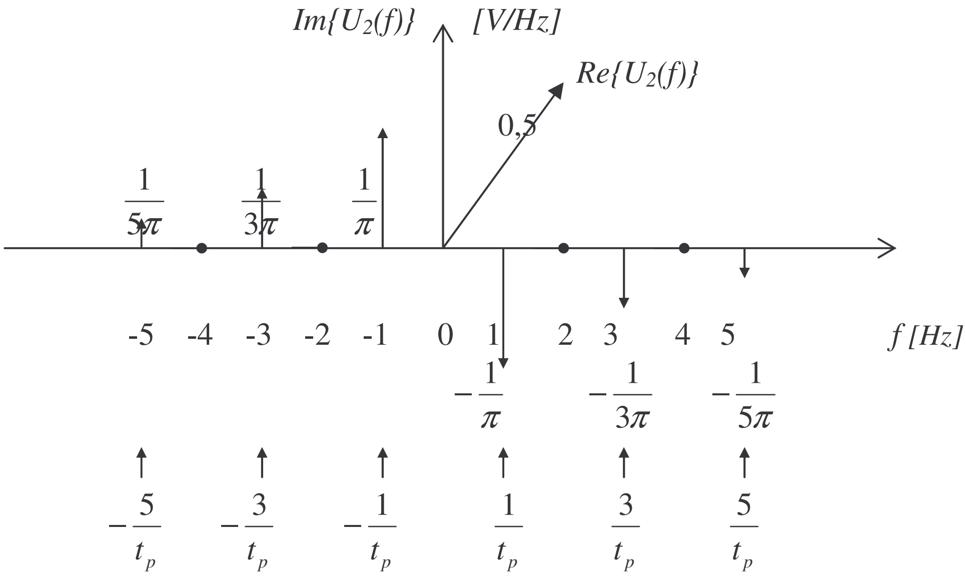

**Lösung:**

$$U(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} 0{,}5 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\mu\right)}{\frac{\pi}{2}\mu} \cdot \delta\left(f - \frac{\mu}{1s}\right) \quad \left[\frac{V}{Hz}\right]$$




Die als gerades Signal gegebene periodische Rechteckimpulsfolge setzt sich aus Kosinusschwingungen aller ungeradzahligen Vielfachen der Frequenz $\frac{1}{t_p}$ und einem Gleichanteil zusammen.

**20. Aufgabe:**
Ermitteln Sie das Fourier-Spektrum der gegenüber der vorhergehenden Aufgabe um $\frac{t_p}{4} = 0{,}25$ s verzögerten periodischen Rechteckfolge! Verwenden Sie die bereits vorliegenden Ergebnisse als Ausgangspunkt einer grafischen Lösung!
Aus welchen harmonischen Anteilen besteht die verzögerte Rechteckfolge?
**Lösung:**




Die um $\frac{t_p}{4}$ verzögerte Rechteckimpulsfolge setzt sich aus Sinusschwingungen aller ungeradzahligen Vielfachen der Frequenz $\frac{1}{t_p}$ und einem Gleichanteil zusammen.

**21. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die Transformationsmatrix $[F_N]$ der diskreten Fouriertransformation nach der Vorschrift $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi\mu n/N}$ für $N = 4$!

Hinweis: Die Transformationsmatrix stellt die verwendeten Punkte der Basisfunktion $e^{-j2\pi\mu n/N}$ entsprechend der Länge $N$ dar. Dabei wird zur Berechnung eines Frequenzpunktes $\mu$ genau eine Zeile der Transformationsmatrix verwendet.
**Lösung:**

$$[F_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$

**22. Aufgabe:**
Zeigen Sie die Gültigkeit der Orthogonalitätseigenschaft ("Aufspannen" eines $N$-dimensionalen Raumes) zwischen den Basisfunktionen für $N = 4$!

Hinweis: Dieses entspricht der Prüfung der Orthogonalitätsbedingung
$\sum_{n=0}^{N-1} F_{\mu_1,n} \cdot F^*_{\mu_2,n} = \sum_{n=0}^{N-1} F^*_{\mu_1,n} \cdot F_{\mu_2,n} = 0$ (mit $\mu_1 \neq \mu_2$ und *konjugiert-komplex)
zwischen den komplexen Werten von jeweils zwei Zeilen der in Aufgabe 1.1. berechneten Transformationsmatrix $[F_4]$.
**Lösung:**
Orthogonalitätsprüfung mit $\sum_{n=0}^{3} F_{\mu_1,n} \cdot F^*_{\mu_2,n} = 0 \quad (\mu_1 \neq \mu_2)$ ergibt

zwischen 1. Zeile und 2. Zeile: $\sum 1\cdot 1 + 1\cdot j + 1\cdot(-1) + 1\cdot(-j) = 0$

zwischen 1. Zeile und 3. Zeile: $\sum 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot(-1) = 0$

zwischen 1. Zeile und 4. Zeile: $\sum 1\cdot 1 + 1\cdot(-j) + 1\cdot(-1) + 1\cdot j = 0$

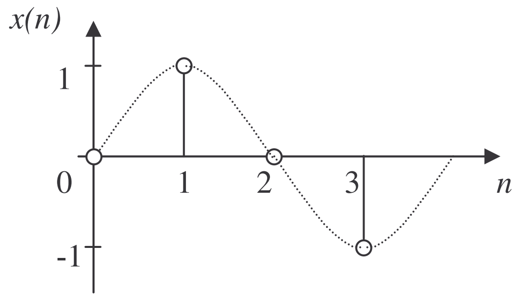
zwischen 2. Zeile und 3. Zeile: $\sum 1\cdot 1 - j\cdot(-1) - 1\cdot 1 + j\cdot(-1) = 0$

zwischen 2. Zeile und 4. Zeile: $\sum 1\cdot 1 - j\cdot(-j) - 1\cdot(-1) + j\cdot j = 0$

zwischen 3. Zeile und 4. Zeile: $\sum 1\cdot 1 - 1\cdot(-j) + 1\cdot(-1) - 1\cdot j = 0$

→ Orthogonalitätsbedingung ist erfüllt

**23. Aufgabe:**
Berechnen Sie das Spektrum des abgetasteten (zeitdiskreten) Sinus-Signals mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation. Die Frequenz des Sinus-Signals entspricht $\frac{1}{4}$ der Abtastfrequenz. Führen Sie die diskrete Fouriertransformation für $N = 4$ mit Hilfe der ermittelten Transformationsmatrix von Aufgabe 22 durch!
Geben Sie die ermittelten Frequenzpunkte in Bezug zur Abtastfrequenz $f_A$ an!




$$x(n) = \sin\left(2\pi \frac{1}{4} \cdot n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot n\right)$$

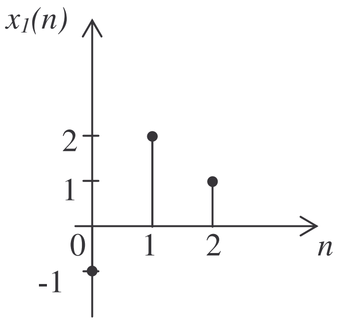
**Lösung:**
$X(0) = 0$ $X(1) = -2j$ $X(2) = 0$ $X(3) = 2j$

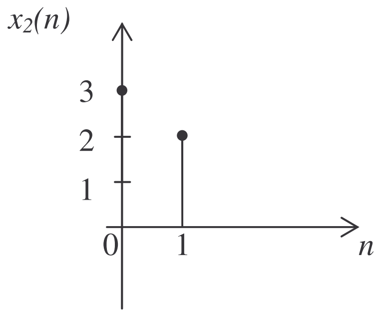
**24. Aufgabe:**
Ermitteln Sie die Transformationsmatrix $\left[F_N^{-1}\right]$ der inversen diskreten Fouriertransformation (IDFT) nach der Vorschrift $x(n) = \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} X(\mu)\cdot e^{j2\pi n\mu/N}$ für $N = 4$! Überprüfen Sie das Ergebnis anhand der Rücktransformation des Sinus-Signals von Aufgabe 26!
**Lösung:**

$$\left[F_4^{-1}\right] = \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

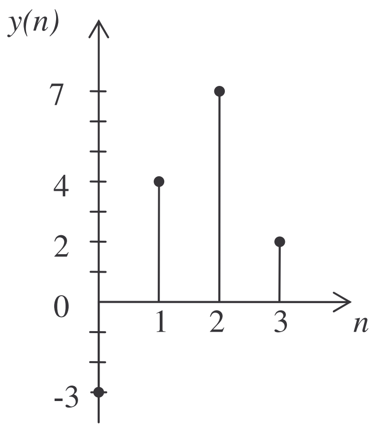
**25. Aufgabe:**
Führen Sie die diskrete Faltung der gegebenen beiden Folgen entsprechend der Beziehung $y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x_1(l)\cdot x_2(n-l)$ im Zeitbereich aus! Stellen Sie die einzelnen Schritte der Faltungsoperation grafisch dar! Geben Sie die allgemeine mathematische Beziehung für die Werteanzahl der Ausgangsfolge *y(n)* in Abhängigkeit der Werteanzahl der beiden Eingangsfolgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$ an!

$x_1(0) = -1$ $\quad$ $x_2(0) = 3$
$x_1(1) = 2$ $\quad$ $x_2(1) = 2$
$x_1(2) = 1$




**Lösung:**



**26. Aufgabe:**

Bilden Sie die $z$-Transformierte $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}$ der beiden kausalen diskreten Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$ von Aufgabe 1.1.! Führen Sie die Faltung der Folgen unter Anwendung des Faltungssatzes der z-Transformation

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) \quad \overset{\text{z-Transformation}}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} \quad Y(z) = X_1(z) \cdot X_2(z)$$

erneut durch und vergleichen Sie die Ergebnisse zu Aufgabe 26! Welche Aussage lässt sich über den Einfluss der Operandenreihenfolge bei der Faltung treffen?

**Lösung:**

$$Y(z) = -3 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + 2z^{-3}$$

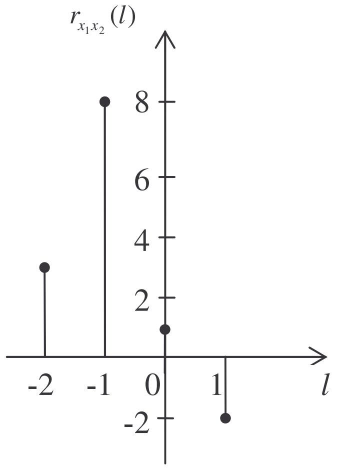
$\rightarrow$ Ausgangsfolge ist identisch mit den Koeffizienten von z mit absteigendem Exponenten

Reihenfolge der Operanden:
Operanden bei der Faltung sind vertauschbar, die Faltungsoperation ist kommutativ

**27. Aufgabe:**

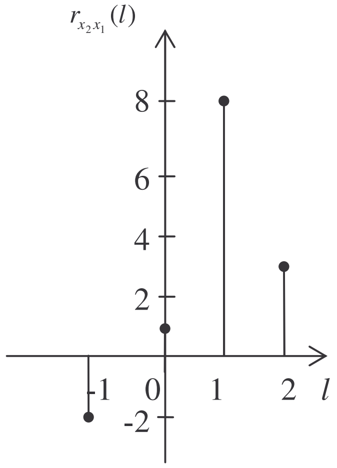
Führen Sie die diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_1 x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n+l)$ der beiden Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$ von Aufgabe 1.1. grafisch aus! Welche Eigenschaft zwischen den beiden Signalen wird durch das Korrelationsergebnis beschrieben? Untersuchen Sie den Einfluss der Operandenreihenfolge auf das Ergebnis! Drücken Sie die Kreuzkorrelation formelmäßig als äquivalente Faltungsoperation aus!

**Lösung:**




Aussage der Kreuzkorrelation:
Das Korrelationsergebnis liefert ein Maß zur Ähnlichkeit beider Signale. Das Maß der Übereinstimmung der zwei Signale zeigt sich in der Größe des Korrelationsergebnisses, welches von der Ähnlichkeit der Signalform und der zeitlichen Verschiebung zwischen beiden Signalen abhängt. Das im Beispiel erkennbare Maximum bei $l$ = -1 resultiert aus der Ähnlichkeit der Werte $x_1(1) = 2$ und $x_1(2) = 1$ der Folge $x_1$ mit den Werten $x_2(0) = 3$ und $x_2(1) = 2$ der Folge $x_2$ her.

Vertauschung der Operandenreihenfolge:




Einfluss der Operandenreihenfolge:

es gilt $r_{x_1x_2}(l) = r_{x_2x_1}(-l)$

bzw. $r_{x_1x_2}(-l) = r_{x_2x_1}(l)$

d. h. die Vertauschung der Operandenreihenfolge ergibt die Spiegelung des Korrelationsergebnisses an der Ordinate

Darstellung der Kreuzkorrelation als Faltungsoperation:

→ Negation beider Argumente $n$ in der Berechnungsvorschrift der Kreuzkorrelation verändert das Ergebnis nicht, damit gilt auch

$$r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)\cdot x_2(n+l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(-n)\cdot x_2(l-n)$$

mit der Definition der Faltungsoperation folgt

$$r_{x_1x_2}(l) = x_1(-n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(-n)$$

und damit für die Operandenvertauschung der Kreuzkorrelation

$$r_{x_2x_1}(l) = x_2(-n) * x_1(n) = x_1(n) * x_2(-n)$$

→ somit unterscheiden sich Faltung und Kreuzkorrelation lediglich durch die Spiegelung eines Operanden an der Ordinate

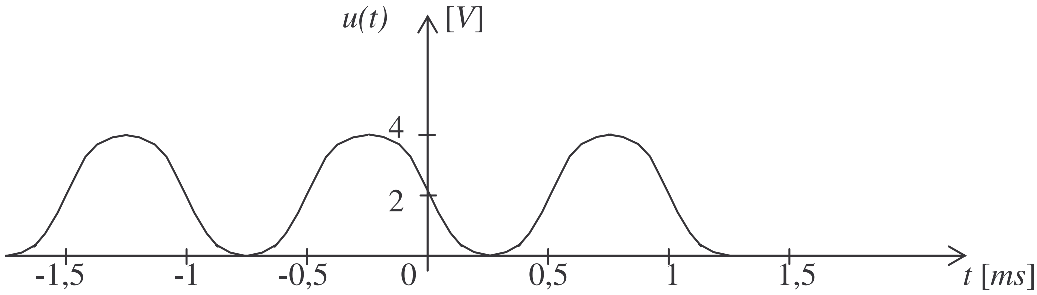
**28. Aufgabe:**
Bestimmen Sie von dem gegebenen komplexen Spektrum der Fourier-Transformation mit

$$U(f) = 2V \cdot \delta(f) - j1V \cdot \delta(f + 1kHz) + j1V \cdot \delta(f - 1kHz)$$

das Signal im Zeitbereich und stellen Sie dieses grafisch dar! ( $\delta(f - f_x)$ steht für Dirac-Stoß bzw. Delta-Impuls)

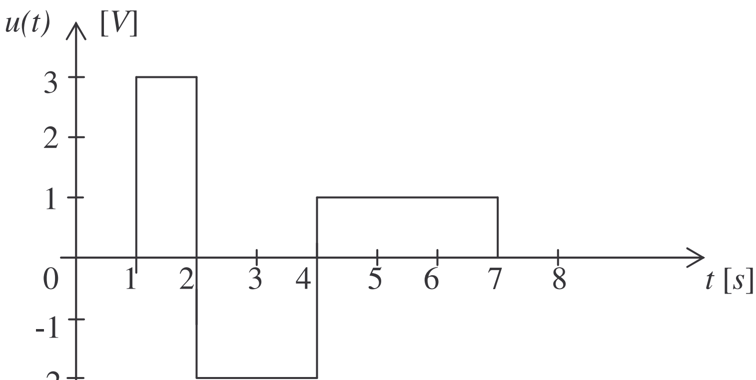
**Lösung:**

$$\underline{u(t) = 2V - 2V \cdot \sin(2\pi t \cdot 1kHz)}$$




$$1\text{Periode} = \frac{1}{1kHz} = 1ms$$

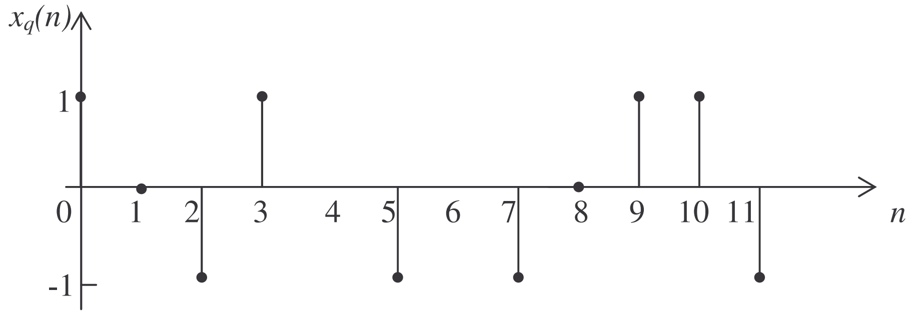
**29. Aufgabe:**
Berechnen Sie die Signalenergie E (als normierte Größe auf ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$ mit der Einheit $V^2s$) von folgendem impulsförmigen Signal!



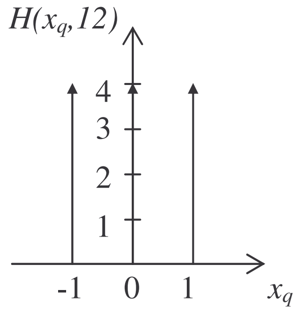

**Lösung:**

$$\underline{E = 20V^2 s}$$

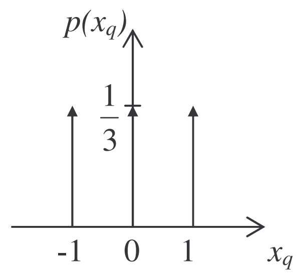
**30. Aufgabe:**
Ermitteln Sie von folgendem repräsentativen Signalabschnitt ($N$ = 12 Werte) des gegebenen stochastischen ternären Signals $x_q(n)$ (mögliche Werte $x_q \varepsilon$ -1, 0 und +1)
a) das Amplitudenhistogramm $H(x_q, 12)$ als grafische Darstellung,
b) die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_q)$ als grafische Darstellung und
c) die Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$ als grafische Darstellung!
d) Wie bezeichnet man die sich ergebende Verteilung?
Berechnen Sie weiterhin
e) den Gleichanteil $\overline{x}$,
f) die mittlere Leistung $P$ und
g) die Varianz $\sigma^2$
des Signals!



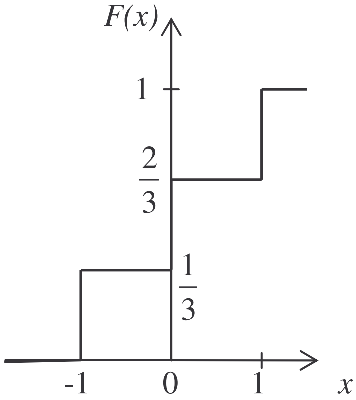

**Lösung:**
a) Amplitudenhistogramm




b) Wahrscheinlichkeitsdichte



c) Wahrscheinlichkeitsfunktion

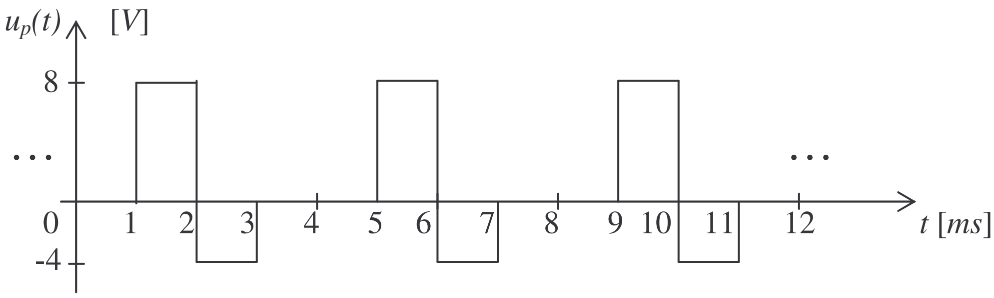



d) Resultat: Gleichverteilung
e) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = 0}$ (gleichanteilsfrei)
f) mittlere Leistung: $\underline{P = \frac{2}{3}}$
g) Varianz: $\underline{\sigma^2 = \frac{2}{3}}$

**31. Aufgabe:**
Berechnen Sie die statistischen Parameter (Leistungsparameter als normierte Größen auf ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$)

a) Gleichanteil $\bar{x}$,
b) mittlere Leistung $P$ und
c) Varianz $\sigma^2$

des gegebenen periodischen Signals $u_p(t)$!




**Lösung:**
a) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = 1V}$
b) mittlere Leistung. $\underline{P = 20V^2}$
c) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 19V^2}$

**32. Aufgabe:**
Gegeben sei ein gleichanteilsbehaftetes sinusförmiges Signal mit einer Frequenz von 15 *kHz* und beliebiger Phasenlage, welches mit 32 *kHz* abgetastet wird. Das resultierende zeitdiskrete Signal werde im weiteren einer diskreten Fourier-Transformation mit der Länge von $N = 1024$ Punkten gemäß der Vorschrift $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi\mu n/N}$ unterworfen. Das Signalintervall wird "hart ausgeschnitten", entspricht also einer Rechteckfensterung. Für die Signalanalyse erfolge weiterhin eine Betragsbildung im Frequenzbereich gemäß $|X(\mu)| = \sqrt{X(\mu) \cdot X^*(\mu)}$ . Somit ist die Signalanalyse auf Basis der diskreten Fourier-Transformation unabhängig von der Phasenlage des abgetasteten sinusförmigen Signals.
Geben Sie an

a) welche Frequenzpunkte $\mu$ ($\mu$ im Bereich von 0 bis 1023) des Betrags-Spektrums $|X(\mu)|$ einen von Null verschiedenen Wert aufweisen und
b) welche Amplitude $|X(\mu)|$ die von Null verschiedenen Frequenzpunkte haben (entsprechend der angegebenen Transformationsvorschrift und Punkteanzahl), wenn der Signalhub des zeitdiskreten sinusförmigen Signals (Signal Spitze-Spitze) den Wert 2 aufweist und der Gleichanteil 0,1 beträgt!

**Lösung:**

a) $\underline{\mu_1 = 480}$

$\underline{\mu_2 = 544}$

$\underline{\mu_3 = 0}$

b) Amplitude der Frequenzpunkte

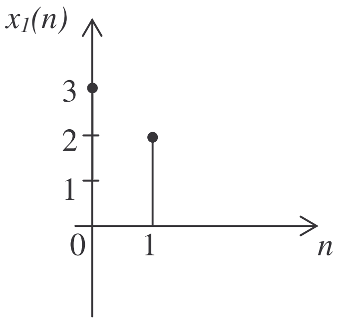
$$|X(480)| = |X(544)| = \frac{x_{ss}}{2} \cdot \frac{N}{2} = \underline{512}$$

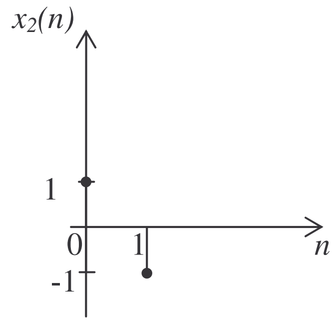
$$|X(0)| = \underline{102{,}4}$$

**33. Aufgabe:**
Gegeben sind die folgenden zwei diskreten Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$.

$x_1(0) = 3$ $\quad$ $x_2(0) = 1$

$x_1(1) = 2$ $\quad$ $x_2(1) = -1$

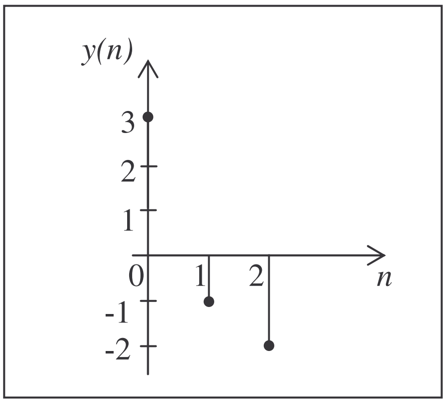


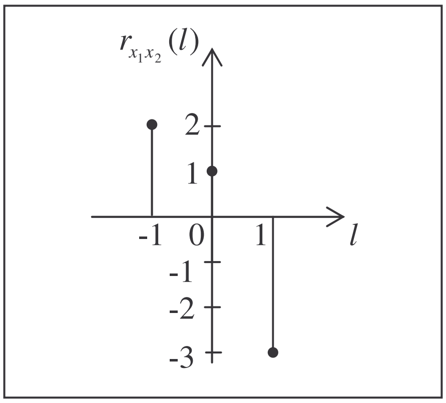

a) Führen Sie die diskrete Faltung $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ der beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen sie das Ergebnis grafisch dar!

b) Führen Sie die diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n+l)$ zwischen den beiden zeitdiskreten Folgen aus und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar!

**Lösung:**
a)



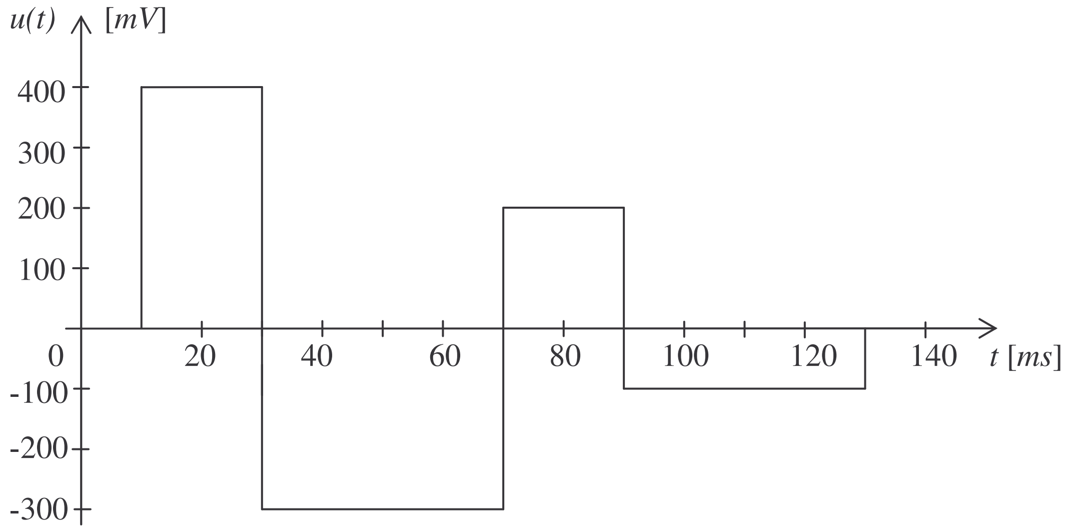

b)




**34. Aufgabe:**
Welche spektralen Eigenschaften ergeben sich als Resultat der Fourier-Transformation oder diskreten Fourier-Transformation eines beliebigen reellen Signals in den Frequenzbereich? Treffen Sie Aussagen zum
a) Verlauf des Realteils,
b) Verlauf des Imaginärteils,
c) Verlauf des Betrages und
d) Verlauf der Phase
im Frequenzbereich.
**Lösung:**
spektrale Eigenschaften eines beliebigen reellen Signals:
a) Realteil: gerader Verlauf
b) Imaginärteil: ungerader Verlauf
c) Betrag: gerader Verlauf
d) Phase: ungerader Verlauf (Ausnahme bei Frequenz = 0 im Falle eines negativen Wertes des Realteils)

**35. Aufgabe:**

Berechnen Sie die Signalenergie (als normierte Größe auf einen ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$) von folgendem impulsförmigen Signal!




**Lösung:**

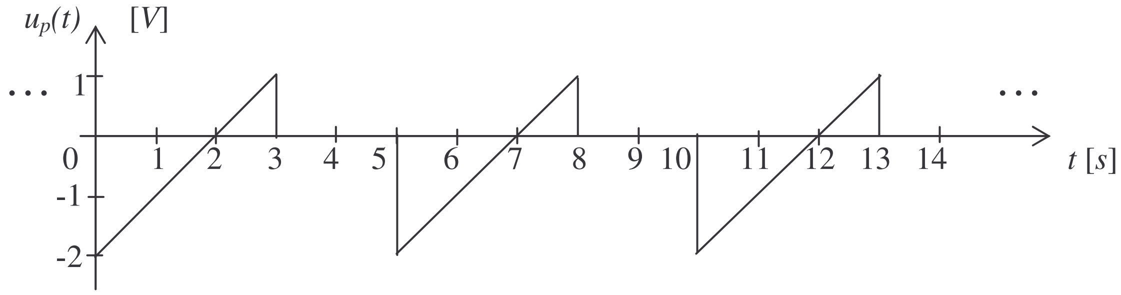
$E = 8000 m^2V^2s = 8mV^2s = 8 \cdot 10^{-3} V^2 s$

**36. Aufgabe:**

Berechnen Sie die statistischen Leistungsparameter (als normierte Größen auf einen ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$)

a) Gleichanteil $\overline{x}$,
b) mittlere Leistung $P$ und
c) Varianz $\sigma^2$

des gegebenen periodischen Signals $u_p(t)$!



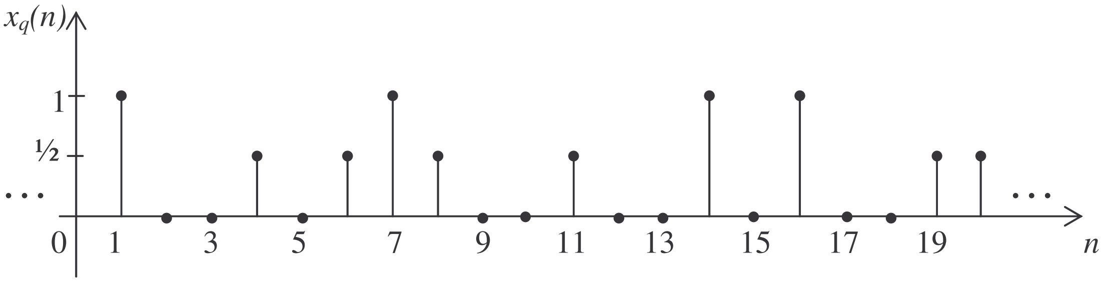

**Lösung:**

a) Gleichanteil: $\overline{x} = -0{,}3V$

b) mittlere Leistung: $P^2 = 0{,}6V^2$

c) Varianz: $\sigma^2 = \frac{51}{100} V^2 = 0{,}51 V^2$

**37. Aufgabe:**
Ein digitales stochastisches Signal $x_q(n)$ aus einer Messreihe (Zahlenwerte $x_q$ $\varepsilon$ 0, ½, 1) werde durch folgenden repräsentativen Signalausschnitt von $N = 20$ Werten (Zeitbereichs-index $n$ $\varepsilon$ 1...20) beschrieben.




Ermitteln Sie auf Basis des angegebenen Ausschnittes von dem Signal

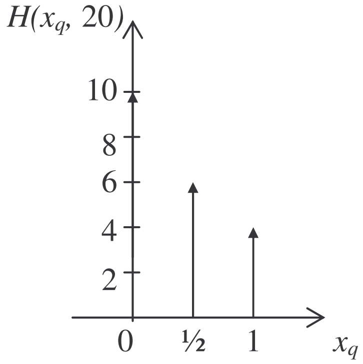
a) das Amplitudenhistogramm $H(x_q, 20)$ als grafische Darstellung,
b) die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x_q)$ als grafische Darstellung und
c) die Wahrscheinlichkeitsfunktion $F(x)$ als grafische Darstellung!

Berechnen Sie weiterhin

d) den Gleichanteil $\overline{x}$,
e) die mittlere Leistung $P$ und
f) die Varianz $\sigma^2$

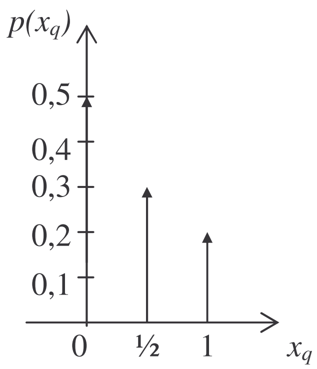
des stochastischen Signals!

**Lösung:**
a) Amplitudenhistogramm:



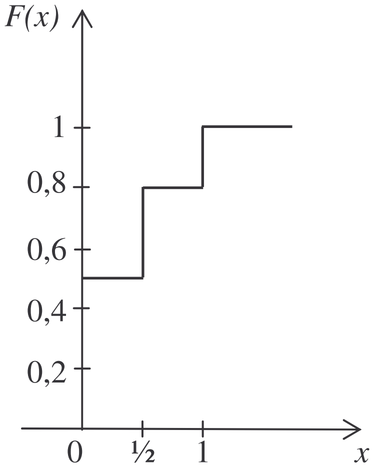

$H(x_q=0, 20) = 10$
$H(x_q=½, 20) = 6$
$H(x_q=1, 20) = 4$

b) Wahrscheinlichkeitsdichte:




$p(x_q=0) = 0,5$
$p(x_q=½) = 0,3$
$p(x_q=1) = 0,2$

c) Wahrscheinlichkeitsfunktion:




$$F(-\infty \leq x < 0) = 0$$
$$F(0 \leq x < ½) = 0{,}5$$
$$F(½ \leq x < 1) = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8$$
$$F(1 \leq x \leq \infty) = 0{,}8 + 0{,}2 = 1$$

d) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = 0{,}35}$

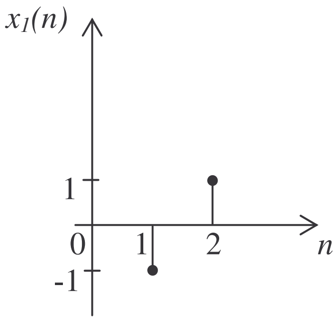
e) mittlere Leistung: $\underline{P = 0{,}275}$

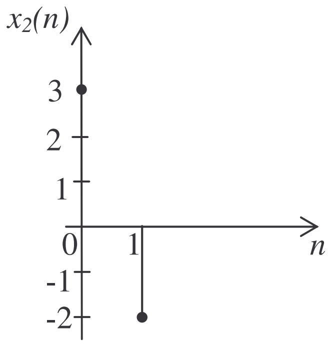
f) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 0{,}1525}$

**38. Aufgabe:**
Gegeben sind die zeitdiskreten Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$, welche jeweils zwei von Null verschiedene Werte aufweisen.

$x_1(1) = -1$
$x_1(2) = 1$

$x_2(0) = 3$
$x_2(1) = -2$



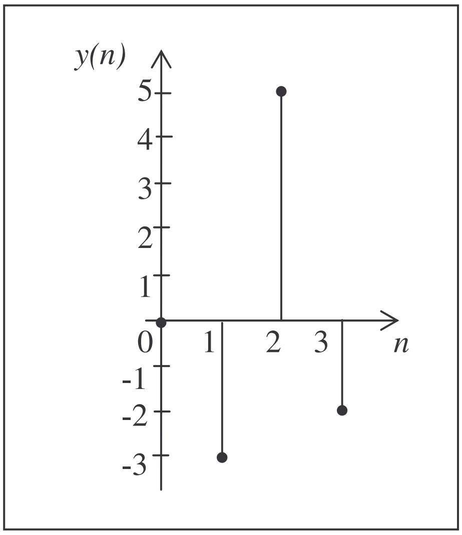

a) Führen Sie die diskrete Faltung $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ der beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen sie das Ergebnis grafisch dar!

b) Führen Sie die diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_2x_1}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) \cdot x_1(n+l)$ zwischen den beiden zeitdiskreten Folgen aus und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar!

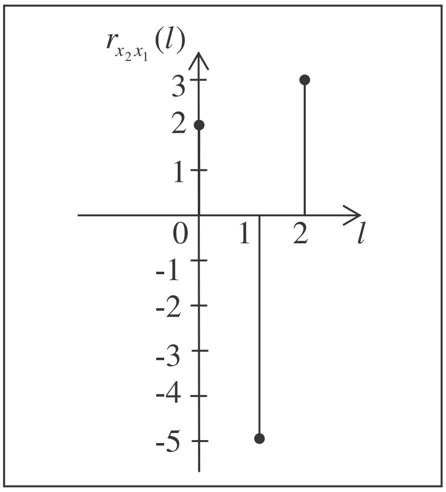
c) Stellen Sie das Ergebnis der diskreten Faltung und der diskreten Kreuzkorrelation unter der Maßgabe der Vertauschung der beiden Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$ grafisch dar!

**Lösung:**

a) Diskrete Faltung

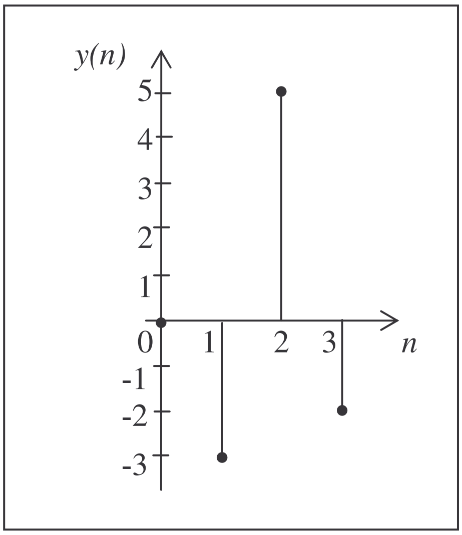



b) Diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_2 x_1}(l)$



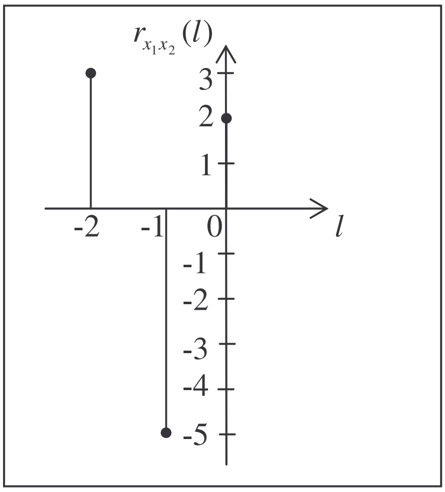

c) Vertauschung der Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$

- Ergebnis der diskreten Faltung: keine Veränderung

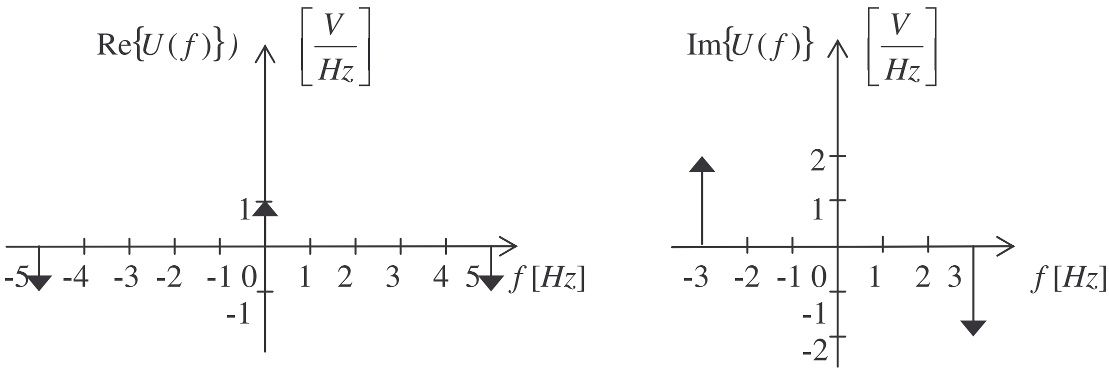


- Ergebnis der diskreten Kreuzkorrelation: Vertauschung der Folgen entspricht der Berechnung von $r_{x_1x_2}(l)$, somit gilt $r_{x_1x_2}(l) = r_{x_2x_1}(-l)$

→ Spiegelung des ursprünglichen Korrelationsergebnisses an der Ordinate




**39. Aufgabe:**
Bestimmen Sie von dem gegebenen komplexen Spektrum der Fourier-Transformation (Real- und Imaginärteildarstellung) die mathematische Funktion im Zeitbereich!




**Lösung:**

$$\underline{u(t) = 1V - 2V \cdot \cos(2\pi \cdot 5Hz \cdot t) + 4V \cdot \sin(2\pi \cdot 3Hz \cdot t)}$$

**40 Aufgabe:**
Unterziehen Sie die gegebene Eingangsfolge mit den Werten

$x(0) = 1$
$x(1) = -1$
$x(2) = 1$
$x(3) = 3$

einer diskreten Fourier-Transformation mit 4 Punkten ($N = 4$) gemäß der Transformations-vorschrift $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi\mu n/N}$. Geben Sie die Transformationsergebnisse $X(\mu)$ ($\mu$ ε 0;1;2;3) an!

**Lösung:**

$\underline{X(\mu = 0) = 4}$   $\underline{X(\mu = 1) = 4j}$   $\underline{X(\mu = 2) = 0}$   $\underline{X(\mu = 3) = -4j}$

**41. Aufgabe:**
Ermitteln Sie von dem gegebenen exponentiell abklingenden Spannungsimpuls

$$u(t) = \begin{cases} 0V & \text{für } t < 0s \\ 10V \cdot e^{-\frac{t}{0,5s}} & \text{für } t \geq 0s \end{cases}$$

die Gleichung für den Betragsverlauf des Amplitudendichtespektrums. Geben Sie den betragsmäßigen Wert der spektralen Amplitudendichte für die Frequenz $f = 0Hz$ an!

**Lösung:**

$$\underline{|U(f)| = \frac{10V}{\sqrt{\left(\frac{2}{s}\right)^2 + (2\pi f)^2}}}$$

$$\underline{|U(f = 0)| = 5\frac{V}{Hz}}$$

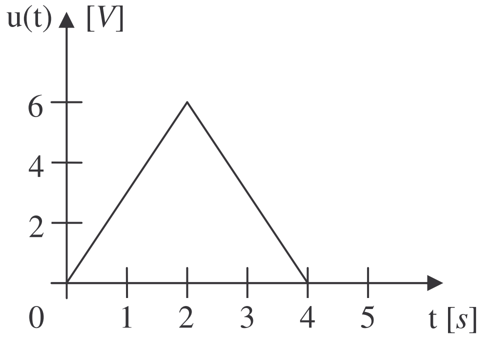
**42. Aufgabe:**
Gegeben sei ein gleichanteilsbehaftetes sinusförmiges Signal mit einer Periodendauer von 400µs und beliebiger Phasenlage. Nach der Abtastung mit einer Abtastperiode von 50 µs werden die gewonnenen Abtastwerte einer diskreten Fouriertransformation mit 4096 Punkten unterzogen. Eine Bewertung der Abtastwerte durch eine Fensterfunktion erfolgt nicht.
Geben Sie an

a) welche Frequenzpunkte der diskreten Fouriertransformation (Bereich 0 bis 4095) von Null verschieden sind und
b) welche betragsmäßigen Werte die von Null verschiedenen Frequenzpunkte annehmen, wenn die Amplitude des zeitdiskreten sinusförmigen Signals 0,75 beträgt und ein Gleichanteil von -0,05 vorhanden ist. Die diskrete Fouriertransformation sei dabei mit der Bildungsvorschrift $X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi\mu n/N}$ ausgeführt worden.

**Lösung:**
a)
1. Frequenzpunkt: Gleichanteil $\underline{\mu_1 = 0}$
2. Frequenzpunkt: $\underline{\mu_2 = 512}$
3. Frequenzpunkt: $\underline{\mu_3 = 3584}$

b)
$\underline{|X(\mu = 0)| = 204,8}$
$\underline{|X(\mu = 512)| = |X(\mu = 3584)| = 1536}$

**43. Aufgabe:**
Berechnen Sie die Signalenergie (als normierte Größe auf einen ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$) des gegebenen symmetrischen Dreieckimpulses!




**Lösung:**
$\underline{E = 48V^2 s}$

**44. Aufgabe:**
Berechnen Sie aus der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte des Signals mit

$p(-2) = 0{,}1$
$p(-1{,}5) = 0{,}1$
$p(-0{,}5) = 0{,}4$
$p(0{,}5) = 0{,}3$
$p(1) = 0{,}1$

die statistischen Größen
a) Gleichanteil,
b) mittlere Leistung und
c) Varianz!

**Lösung:**
a) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = -0{,}3}$
b) mittlere Leistung: $\underline{P = 0{,}9}$
c) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 0{,}81}$

**45. Aufgabe:**
Berechnen Sie von dem gegebenen zeitdiskreten Signal

$$x(n) = \left[2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot n\right)\right]^2 \qquad \text{n: ganzzahlig}$$

die statistischen Parameter
a) Gleichanteil,
b) mittlere Leistung und
c) Varianz!

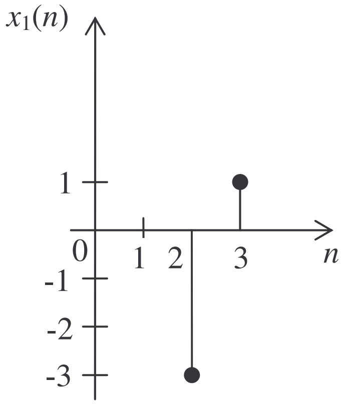
**Lösung:**
a) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = 2}$
b) mittlere Leistung: $\underline{P = 6}$
c) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 2}$

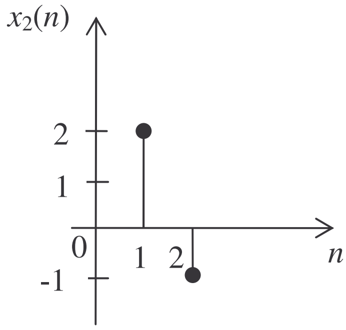
**46. Aufgabe:**
Ein reelles und hinsichtlich seines Verlaufes ungerades Signal werde mit der Fouriertransformation oder diskreten Fouriertransformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert.
Treffen Sie Aussagen
a) zur Existenz eines Realteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Realteilverlaufes im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Realteils und
b) zur Existenz eines Imaginärteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Imaginärteilverlaufes im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Imaginärteils!
**Lösung:**
a) Realteil im Frequenzbereich ist Null
b) Imaginärteil im Frequenzbereich ist vorhanden und hat einen ungeraden Verlauf

**47. Aufgabe:**
Gegeben sind die zeitdiskreten Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$, welche jeweils zwei von Null verschiedene benachbarte Werte aufweisen.

$x_1(2) = -3$
$x_1(3) = 1$

$x_2(1) = 2$
$x_2(2) = -1$

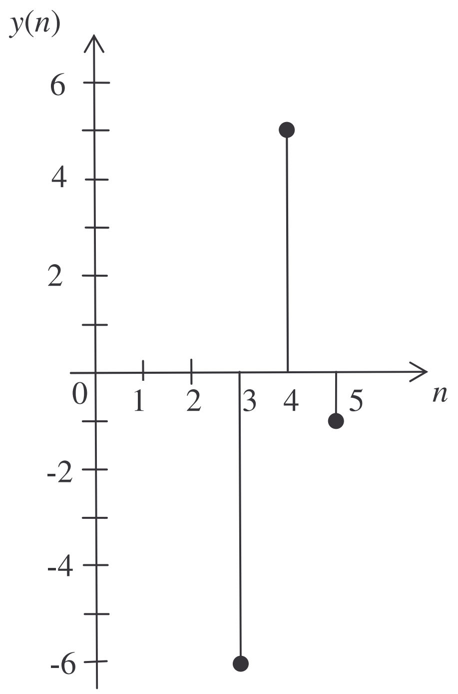


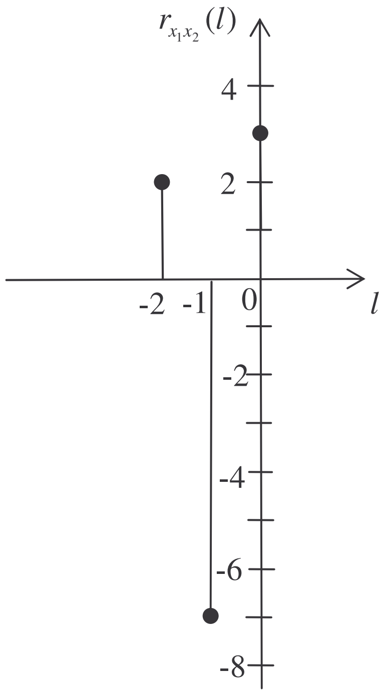

a) Führen Sie die diskrete Faltung $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ der beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen Sie die Ergebnisfolge grafisch dar!

b) Führen Sie die diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n+l)$ zwischen den beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen Sie das Korrelationsergebnis grafisch dar!

**Lösung:**
a) diskrete Faltung




b) diskrete Kreuzkorrelation

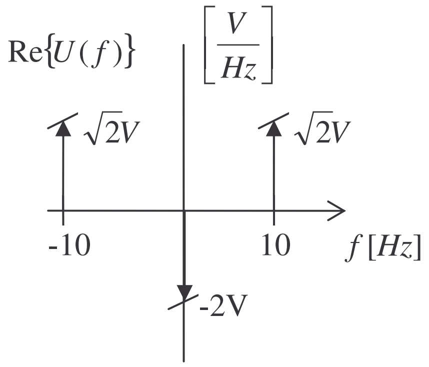


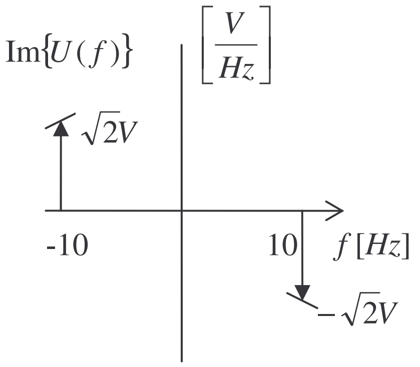

**48. Aufgabe:**
Welche allgemeine Aussage zu den Signalen kann man mit Hilfe der Kreuzkorrelation erhalten?
**Lösung:**
Kreuzkorrelation liefert ein Bewertungskriterium für die Ähnlichkeit der zwei korrelierten Signale.

**49. Aufgabe:**
Ermitteln Sie von dem gegebenen reellen Signal im Zeitbereich

$$u(t) = -2V + 4V \cdot \sin\left(2\pi \cdot 10Hz \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

die Fourier-Transformierte als grafische Darstellung von Realteil und Imaginärteil.
**Lösung:**




**50. Aufgabe:**
Ein Signal, welches mit einer Abtastperiode von 25 $\mu s$ unter Einhaltung des Abtasttheorems abgetastet wurde, ergab nach der Durchführung einer diskreten Fouriertransformation mit 2048 Punkten folgende von Null verschiedene Frequenzpunkte mit den betragsmäßigen spektralen Werten:

$$|X(\mu = 640)| = 2560$$
$$|X(\mu = 768)| = 1536$$
$$|X(\mu = 1280)| = 1536$$
$$|X(\mu = 1408)| = 2560$$

Geben Sie an
a) welche Frequenzen in dem analysierten Signal enthalten sind und
b) welche Amplituden die in dem zeitdiskreten Signal enthaltenen Frequenzen besitzen. Die diskrete Fouriertransformation sei mit der Bildungsvorschrift

$$X(\mu) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi\mu n/N}$$ ausgeführt worden.

**Lösung:**
a) Frequenz 1: $\underline{f_{\sin 1} = 12{,}5kHz}$

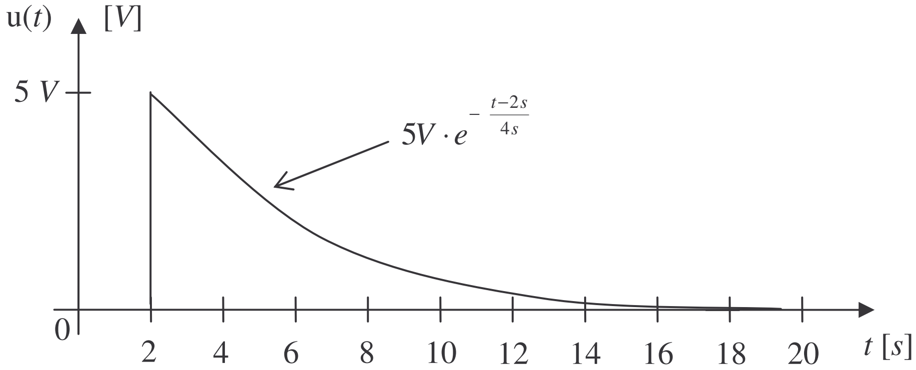
Frequenz 2: $\underline{f_{\sin 2} = 15kHz}$

b) Amplitude der Frequenz 1: $\underline{\hat{x}_1 = 2{,}5}$

Amplitude der Frequenz 2: $\underline{\hat{x}_2 = 1{,}5}$

**51. Aufgabe:**

Berechnen Sie die Signalenergie (als normierte Größe auf einen ohmschen Verbraucher von $R = 1\Omega$) des gegebenen exponentiell abklingenden Spannungsimpulses!

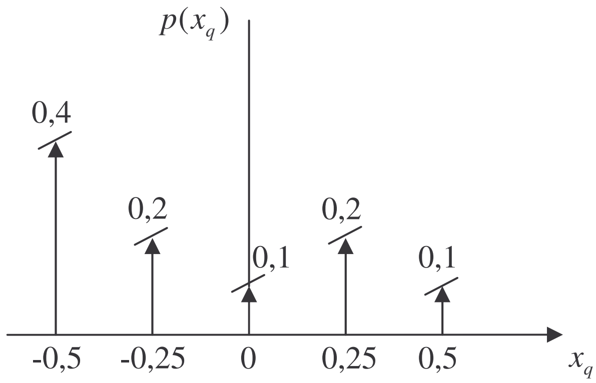



**Lösung:**

$\underline{E = 50V^2 s}$

**52. Aufgabe:**

Ein Signal sei durch die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte charakterisiert:




Ermitteln Sie die statistischen Größen

a) Gleichanteil,
b) mittlere Leistung und
c) Varianz

aus der gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte!

**Lösung:**

a) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = -0{,}15}$

b) mittlere Leistung: $\underline{P = 0{,}15}$

c) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 0{,}1275}$

**53. Aufgabe:**
Berechnen Sie von dem gegebenen zeitdiskreten Signal

$$x(n) = \left[\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\right]^2 \qquad \text{n: ganzzahlig}$$

die statistischen Parameter
a) Gleichanteil,
b) mittlere Leistung und
**c)** Varianz!

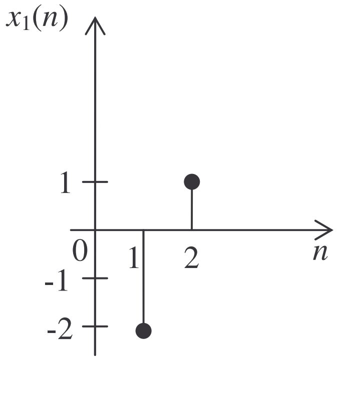
**Lösung:**
a) Gleichanteil: $\underline{\bar{x} = 1}$
b) mittlere Leistung: $\underline{P = \frac{3}{2} = 1{,}5}$
c) Varianz: $\underline{\sigma^2 = 0{,}5}$

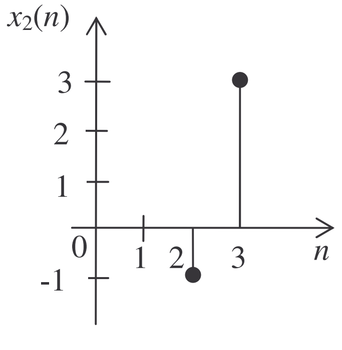
**54. Aufgabe:**
Ein reelles und hinsichtlich seines Verlaufes gerades Signal werde mit der Fouriertransformation oder diskreten Fouriertransformation vom Zeitbereich in den Frequenzbereich transformiert.
Treffen Sie Aussagen
a) zur Existenz eines Realteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Realteilverlaufes im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Realteils und
b) zur Existenz eines Imaginärteils im Frequenzbereich (vorhanden/nicht vorhanden) und zur Charakteristik des Imaginärteilverlaufes im Frequenzbereich (gerader Verlauf/ungerader Verlauf) im Falle eines von Null verschiedenen Imaginärteils!

**Lösung:**
a) Realteil im Frequenzbereich ist vorhanden und hat einen geraden Verlauf
b) Imaginärteil im Frequenzbereich ist Null

**55. Aufgabe:**
Gegeben sind die zeitdiskreten Folgen $x_1(n)$ und $x_2(n)$, welche jeweils zwei von Null verschiedene benachbarte Werte aufweisen.

$x_1(1) = -2$ $\qquad$ $x_2(2) = -1$
$x_1(2) = 1$ $\qquad$ $x_2(3) = 3$



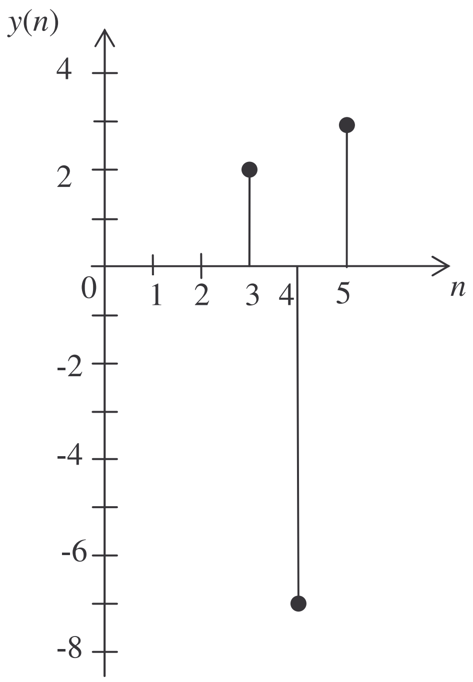



a) Führen Sie die diskrete Faltung $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$ der beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen Sie die Ergebnisfolge grafisch dar!

b) Führen Sie die diskrete Kreuzkorrelation $r_{x_1x_2}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) \cdot x_2(n+l)$ zwischen den beiden zeitdiskreten Folgen mit einer beliebigen Lösungsmethode aus und stellen Sie das Korrelationsergebnis grafisch dar!

**Lösung:**

a) diskrete Faltung




b) diskrete Kreuzkorrelation