

# Lösungen zur Aufgabensammlung

## 1. Grundbegriffe, Mathematische Grundlagen

### 1.1. Struktur, Wirkungsplan, technologisches Schema

#### 1.1.1. Ableiten der mathematischen Gleichungen aus dem Wirkungsplan

$$\begin{aligned} \text{A1.} \quad x_a &= x_e [K_1 x_e - K_4 (K_2 x_e + K_3 x_e)] \\ x_a &= x_e^2 (K_1 - K_2 K_4 - K_3 K_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{A2.} \quad x_{a1} &= \frac{K_1 K_2 x_e}{1 + K_2 K_3 K_5 K_7 + K_2 K_3 K_6 K_7} \\ x_{a2} &= x_{a1} \cdot K_3 K_4 = \frac{K_1 K_2 K_3 K_4 x_e}{1 + K_2 K_3 K_5 K_7 + K_2 K_3 K_6 K_7} \\ x_{a3} &= x_{a1} \cdot K_3 K_6 = \frac{K_1 K_2 K_3 K_6 x_e}{1 + K_2 K_3 K_5 K_7 + K_2 K_3 K_6 K_7} \end{aligned}$$

$$\text{A3.} \quad x_a = K_6 \cdot z \left[ K_1 x_{e1} + \frac{K_2 x_{e1} + K_3 (x_{e1} + x_{e2})}{K_4 x_{e2} - K_5 (x_{e2} + z)} \right]$$

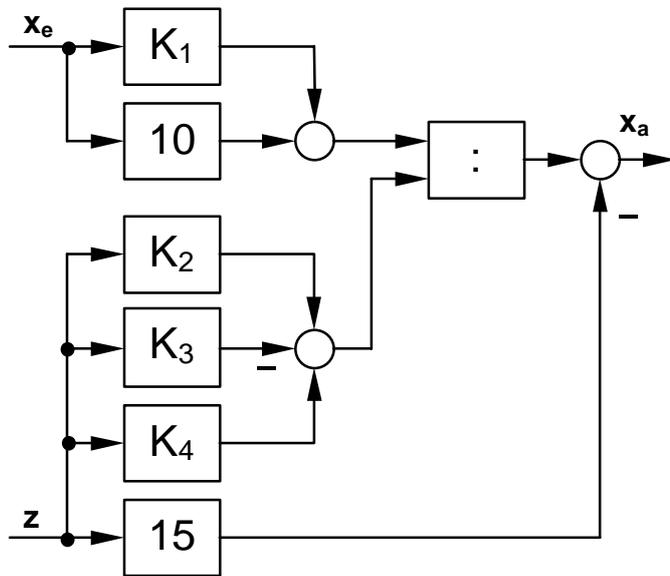
$$\text{A4.} \quad x_a = \frac{K_2 K_3 + x_e (K_1 - K_2)}{K_2 + K_3}$$

$$\text{A5.} \quad G(p) = \frac{v(p)}{u(p)} = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + G_2(p)G_3(p)G_4(p) + G_1(p)G_2(p)G_5(p)}$$

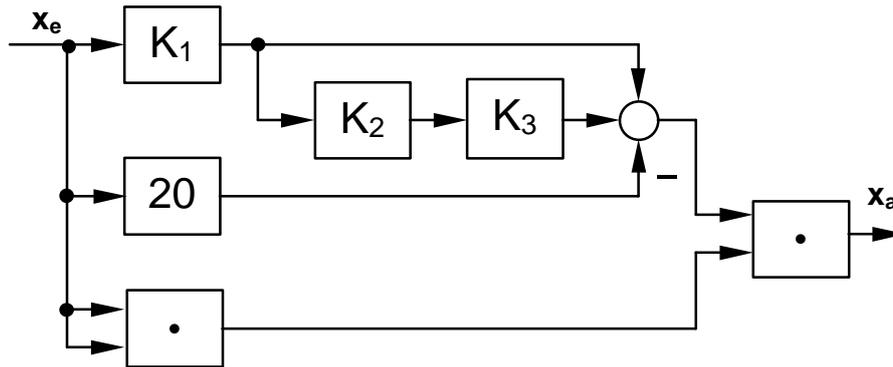
$$\begin{aligned} \text{A6.} \quad \frac{v}{u_1} &= \frac{G_3 G_A}{1 + G_3 G_A G_B}; \quad \frac{v}{u_2} = \frac{G_3}{1 + G_3 G_A G_B} \\ G_A &= \frac{G_1 G_2}{1 + G_2 G_6}; \quad G_B = G_5 - \frac{G_4}{G_1 G_2} \end{aligned}$$

### 1.1.2. Darstellung des Wirkungsplanes nach den Gleichungen

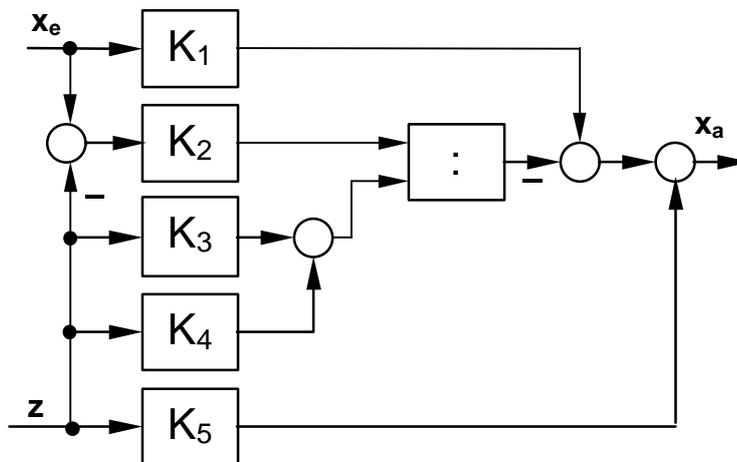
A1.



A2.

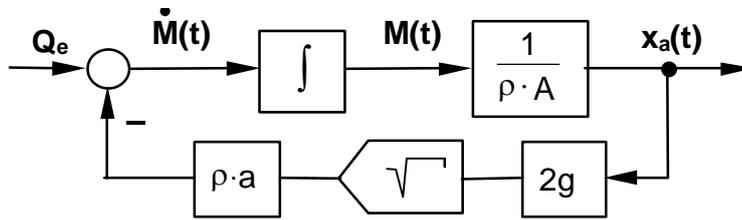


A3.



### 1.1.3. Modellgleichungen und technologisches Schema

#### A1. Behälter mit freiem Auslauf



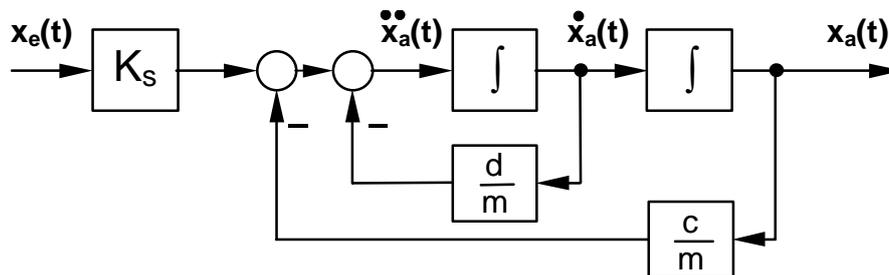
#### A2. Feder-Masse-Dämpfungs-system

Umstellen nach der höchsten Ableitung und Division durch  $m$  :

$$\ddot{s}(t) = \frac{1}{m} F + g - \frac{d}{m} \dot{s}(t) - \frac{c}{m} s(t),$$

für  $\frac{1}{m} F + g = K_s \cdot x_e(t)$  und  $s(t) = x_a(t)$  folgt

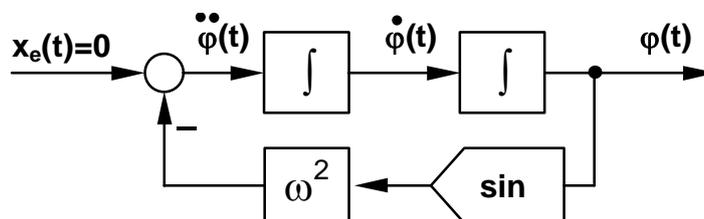
$$\ddot{x}_a(t) = K_s \cdot x_e(t) - \frac{d}{m} \dot{x}_a(t) - \frac{c}{m} x_a(t).$$



#### A3. Reibungsfreies Pendel

Umstellen nach der höchsten Ableitung:

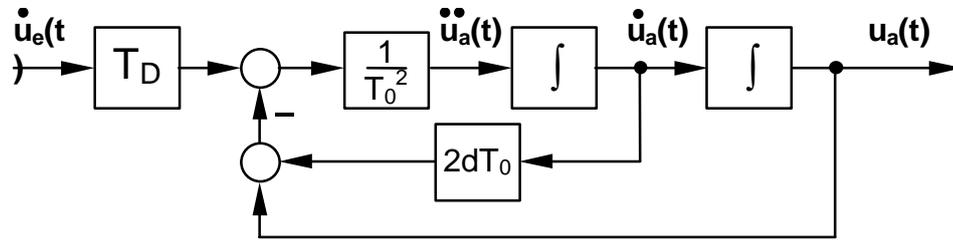
$$\ddot{\varphi}(t) = -\omega^2 \cdot \sin \varphi(t) = 0$$



#### A4. Elektrische Schaltung

Umstellen nach der höchsten Ableitung und Division durch  $T_0^2$  :

$$\ddot{u}_a(t) = \frac{1}{T_0^2} [T_D \cdot \dot{u}_e(t) - 2dT_0 \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t)]$$

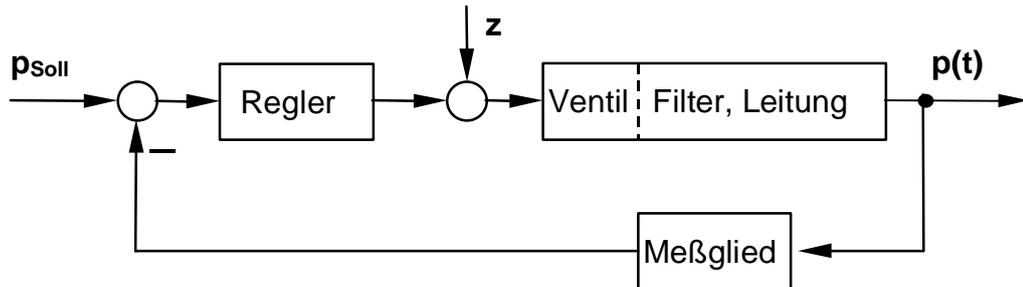


## 1.2. Regelungstechnische Aufgabe, Analyse technischer Systeme

### 1.2.1. Regelung technischer Anordnungen

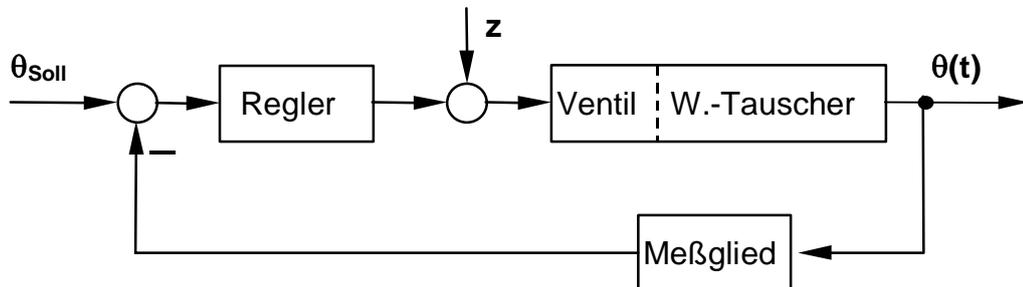
#### A1. Wasseraufbereitungsanlage (Druckregelung).

Regelgröße: Druck  $p$  ,  
 Meßgröße und Meßort: Druck  $p$  vor dem Schüttstofffilter,  
 Stellgröße und Stellort: Durchsatz im Stellventil der Rohrleitung,  
 Führungsgröße: Drucksollwert,  
 Störgrößen: schwankende Entnahme, schwankender Vordruck, Leckstellen, Filterverschmutzung/Filterverschleiß.



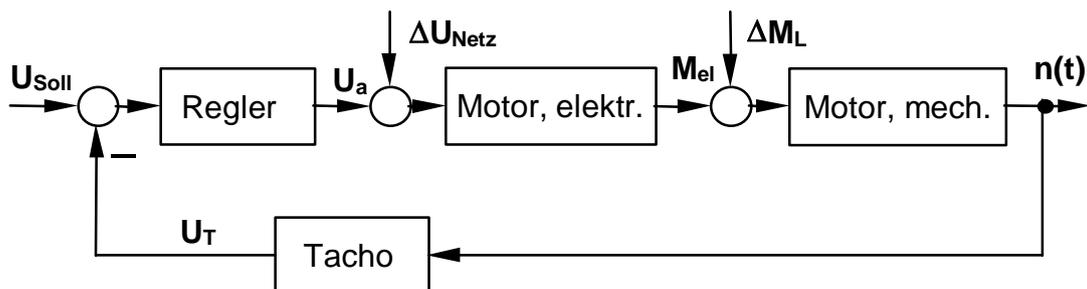
#### A2. Wärmetauscher (Temperaturregelung)

Regelgröße: Temperatur,  
 Meßgröße und Meßort: Temperatur im Wärmetauscher,  
 Stellgröße und Stellort: Dampfdurchsatz im Stellventil der Leitung,  
 Führungsgröße: Temperatursollwert,  
 Störgrößen: Heißdampfdruck- bzw. Temperaturschwankung, schwankende Entnahme/Zufluß, Korrosion, Verschleiß, schwankende Umgebungstemperatur.



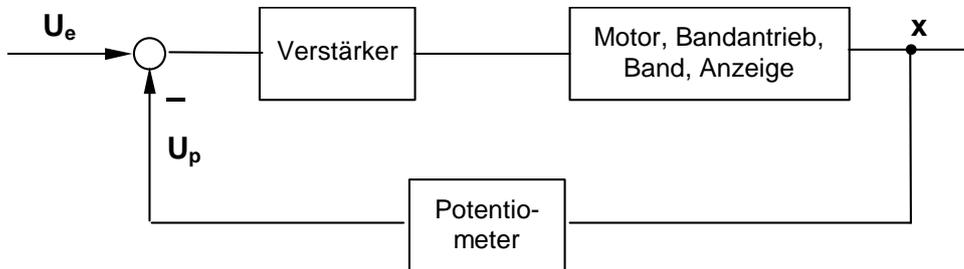
#### A3. Gleichstromantrieb (Drehzahlregelung)

Regelgröße: Drehzahl  $n(t)$  ,  
 Meßgröße und Meßort: Drehzahl an der Welle (Spannung  $U_T$  am Tachogenerator),  
 Stellgröße und Stellort: Ankerspannung im Erregerkreis  $U_a$  (Thyristorsteller),  
 Führungsgröße: Drehzahlsollwert ( $U_{soll}$ ),  
 Störgrößen: Laständerungen, Netzschwankungen, Verschleiß (Reibmomente).



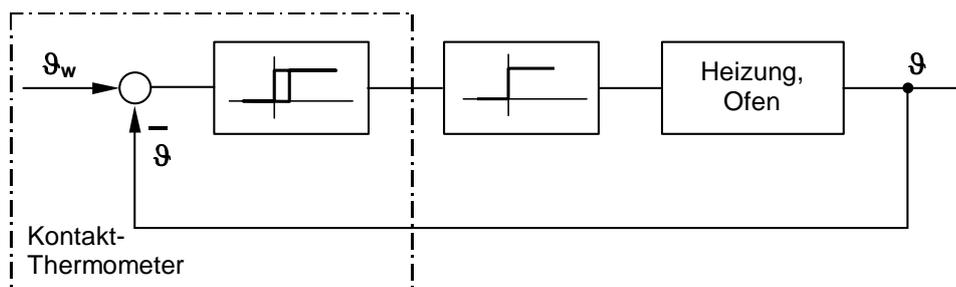
## 1.2.2. Regelungstechnische Analyse technischer Anordnungen

- A1.** Regelstrecke: (Motor), Antriebsrolle, Band, Anzeigestift x, Schleifer vom Potentiometer,  
 Meßglied: Potentiometer,  
 Regler: Verstärker, (Motor),  
 Regelgröße: Regelgröße ist die Anzeige x in cm,  
 Sollwert: Als Sollwert für die Anzeige wirkt die Eingangsspannung  $U_e$ .

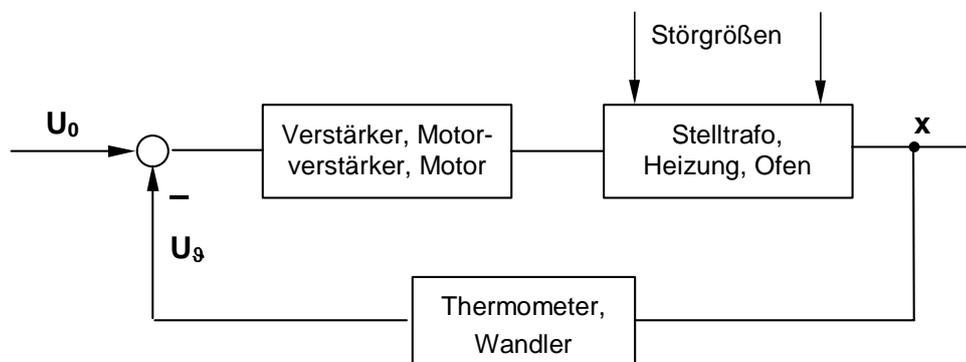


- A2.** Stabilisierung der Ofentemperatur.

- Regelgröße: Ofentemperatur,  
 Führungsgröße: Einstellung des Schaltpunktes am Kontaktthermometer,  
 Stellgröße: Relaiskontakte zum Ein-/Ausschalten der Heizung,  
 Störgrößen: Öffnen des Ofens zum Beschicken, Änderungen der Außentemperatur, Menge und Temperatur des Füllmaterials.



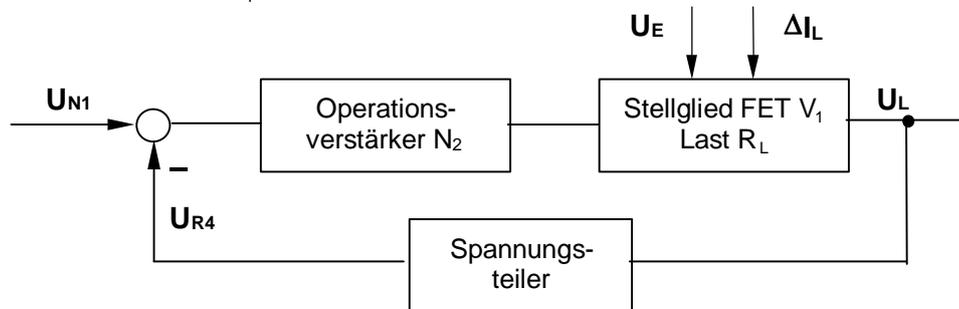
- A3.** Regelgröße: Temperatur  $\vartheta$ ,  
 Rückführgröße: Spannung  $U_\vartheta$ ,  
 Stellgröße: Einstellung Stelltrafo,  
 Störgrößen: Beschicken, Änderung der Außentemperatur,  
 Regelstrecke: Stelltrafo, Heizung, Ofen,  
 Meßglied: Thermometer mit Wandler,  
 Regler: Verstärker, Motorverstärker und Motor,  
 Stellglied: Stelltrafo.



**A4. Regelungstechnische Aufgabe:**

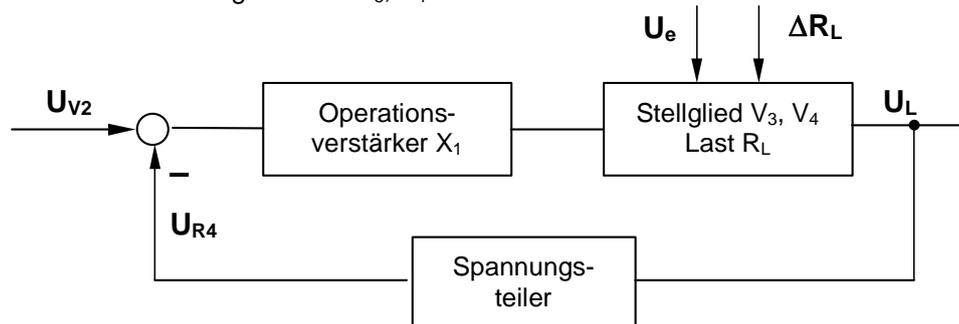
Spannungsstabilisierung  $U_L$  bei schwankender Last und schwankender Eingangsspannung.

- Regelgröße: Ausgangsspannung  $U_L$  ,  
 Führungsgröße: Spannung  $U_{N1}$  ,  
 Störgrößen: Lastschwankungen, Schwankungen der Eingangsspannung,  
 Meßglied: Spannungsteiler  $R_6/(R_5+C_4)$  und  $R_4$  ,  
 Regler: OPV  $N_2$  ,  
 Stellglied: FET  $V_1$  .



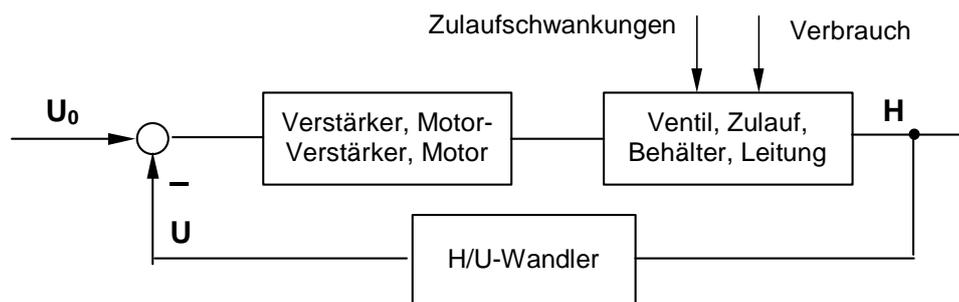
**A5. Regelgröße:**

- Ausgangsspannung  $U_a$  ,  
 Führungsgröße: Spannung  $U_{V2}$  ,  
 Stellgröße: Basisspannung an  $V_3$   
 Störgrößen: Lastschwankungen  $R_L$  , Schwankungen der Eingangsspannung  $U_e$  .  
 Regelstrecke: Darlingtonstufe  $V_3, V_4$  , Last  $R_L$  ,  
 Meßglied: Spannungsteiler  $R_4/(R_3+R_4)$  ,  
 Regler: OPV  $X_1$  ,  
 Stellglied: Darlingtonstufe  $V_3, V_4$  .



**A6. Regelstrecke:**

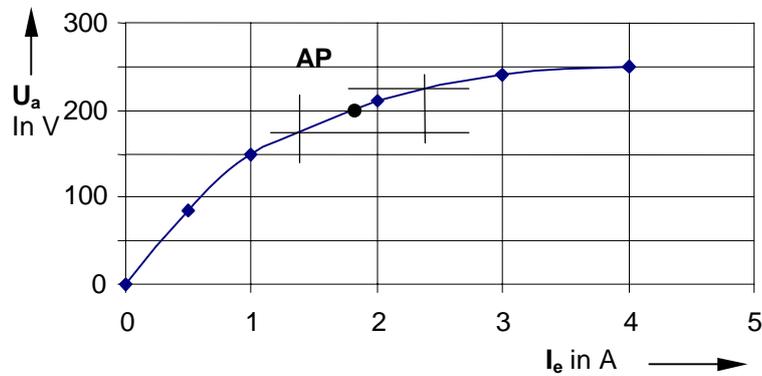
- Ventil, Hochbehälter, Leitungssystem  
 Regler: Differenzverstärker, Motorverstärker, Motor,  
 Reglertyp: I-Regler  
 Stellglied: Ventil im Zulauf.  
 Regelgröße: Druck am Boden des Hochbehälters, Füllhöhe,  
 Führungsgröße: Spannung  $U_0$  ,  
 Meßgröße: Spannung  $U$  nach dem Meßwandler  
 Störgrößen: Verbrauch im Leitungssystem, Schwankungen des Zulaufs.



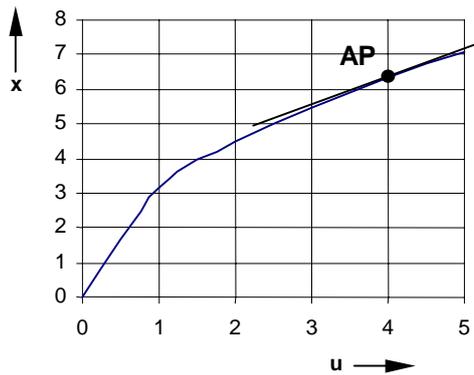
### 1.3. Linearisierung, Arbeitspunkt

A1.  $u = -450 + 22,5\Psi + 18\Omega$

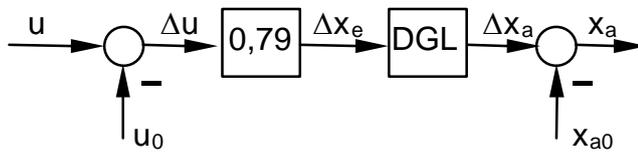
A2. Grafische Lösung:  $K_P = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_e} = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_e \cdot R} = \frac{50 \text{ V}}{10 \text{ V}} = 5$



A3.  $u_0 = 4; \quad x_{e0} = 6,32; \quad x_{a0} = 2,53, \quad \left. \frac{dx_e}{du} \right|_{u=4} = \frac{5}{\sqrt{10 \cdot u}} = 0,79$



Wirkungsplan:



## 1.4. Übertragungsverhalten von Systemen

### 1.4.1. Differentialgleichung

$$\mathbf{A1.} \quad \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \dot{u}_e(t) + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot u_e(t)$$

$$\mathbf{A2.} \quad (R_1 + R_2) \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = R_2 \cdot C \cdot \dot{u}_e(t)$$

$$\mathbf{A3.} \quad L \cdot C \cdot \ddot{u}_a(t) + R \cdot C \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = u_e(t)$$

$$\mathbf{A4.} \quad R_1 R_2 C_1 C_2 \cdot \ddot{u}_a(t) + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2) \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = R_2 C_2 \cdot \dot{u}_e(t),$$

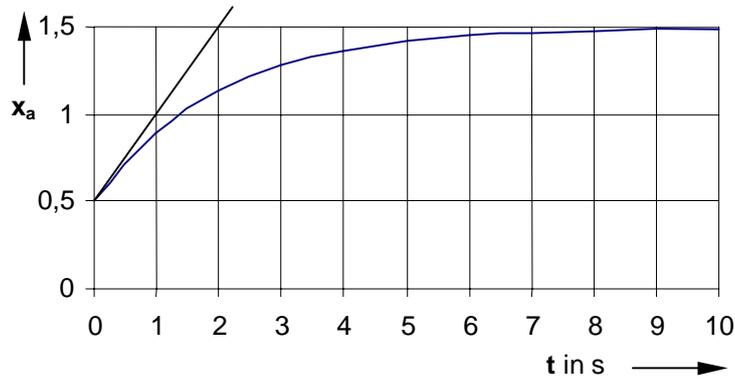
bzw. mit  $T_1 = R_1 C_1$ ;  $T_2 = R_2 C_2$ ;  $T_{12} = R_1 C_2$ ;

$$T_1 \cdot T_2 \cdot \ddot{u}_a(t) + (T_1 + T_{12} + T_2) \cdot \dot{u}_a(t) + u_a(t) = T_2 \cdot \dot{u}_e(t)$$

### 1.4.2. Sprungantwort, Übergangsfunktion

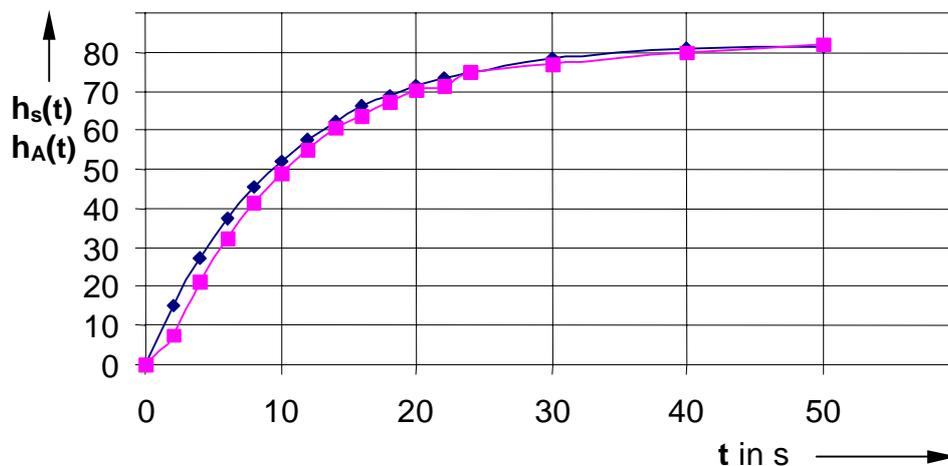
A1. Die Regelstrecke hat P-T<sub>1</sub>-Verhalten mit  $h(t) = K_S \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$

Für die Sprungantwort gilt:  $x_a(t) = x_{a0} + (x_e - x_{e0}) \cdot K_S \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$



A2.  $h_s(t) = \frac{x_{as}}{x_{e0}}$ ;  $h_A(t) = \frac{\dot{x}_{aA}}{x_{A0}}$ ; wobei  $\dot{x}_{aA} = \frac{\Delta x_{aA}}{\Delta t}$ ;

t in s	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	30	40	50	→∞
$x_{as}$ in mA	0	29,9	54,4	74,4	90,8	104	115	124	132	138	143	147	150	157	162	163	165
$x_{aA}$ in mA	0	1,54	5,80	12,3	20,6	30,4	41,4	53,5	66,2	79,6	93,7	108	123	169	249	331	-
$h_s(t)$	0	15,0	27,2	37,2	45,4	52,0	57,5	62,0	66,0	69,0	71,5	73,5	75,0	78,5	81,0	81,5	82,5
$\dot{x}_{aA}$	0	0,77	2,13	3,25	4,15	4,90	5,50	6,05	6,35	6,70	7,05	7,15	7,50	7,67	8,00	8,20	
$h_A(t)$	0	7,7	21,3	32,5	41,5	49,0	55,0	60,5	63,5	67,0	70,5	71,5	75,0	76,7	80,0	82,0	

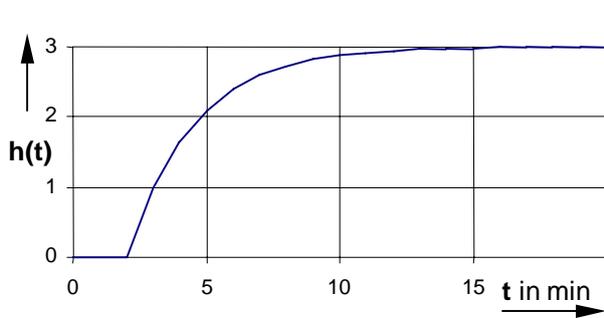


Ergebnisvergleich: Durch die Näherungslösung (Differenzenbildung) ist die aus der Anstiegsantwort berechnete Übergangsfunktion im Zeitbereich  $0 < t < 30$  s ungenauer (Vergleich der Zeitkonstanten).

**A3.** P-T<sub>1</sub>-T<sub>f</sub>-Verhalten

$$G(p) = \frac{3 \cdot e^{-2p}}{1 + 2,5p}$$

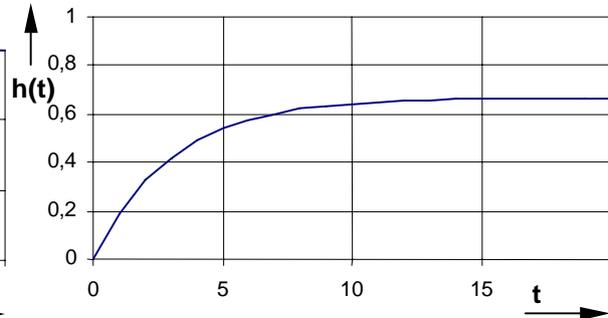
$$h(t) = 3 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t - 2 \text{ min}}{2,5 \text{ min}}\right) \right]$$



P-T<sub>1</sub>-Verhalten

$$G(p) = \frac{0,66}{1 + 3p}$$

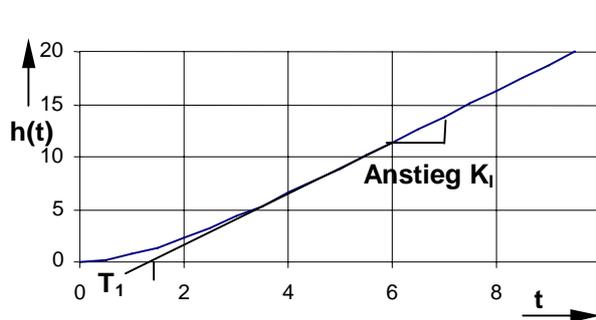
$$h(t) = \frac{2}{3} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{3}\right) \right]$$



I-T<sub>1</sub>-Verhalten

$$G(p) = \frac{2,5}{p(1 + 1,5p)}$$

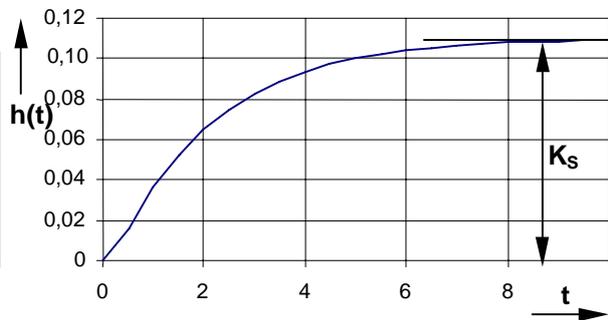
$$h(t) = 2,5 \cdot \left[ 1,5 \cdot \exp\left(-\frac{t}{1,5}\right) + t - 1,5 \right]$$



P-T<sub>2</sub>-Verhalten

$$G(p) = \frac{0,11}{(1 + 2p)(1 + 0,2p)}$$

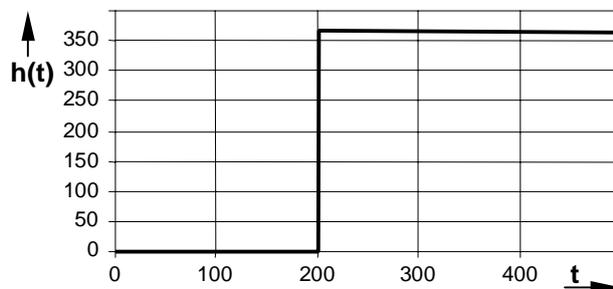
$$h(t) = 0,11 \cdot \left( 1 - \frac{2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{2}\right) - 0,2 \cdot \exp\left(-\frac{t}{0,2}\right)}{1,8} \right)$$



**A4.**  $K_S = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{36 \text{ m}^3/\text{h}}{0,1} = 360 \text{ m}^3/\text{h}$

$$T_t = \frac{l}{v} = \frac{40 \text{ m}}{0,2 \text{ m/s}} = 200 \text{ s}$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 200 \text{ s} \\ 360 \text{ m}^3/\text{h} & \text{sonst} \end{cases}$$



**A5.**  $h(t) = K \cdot (1 - 1,25 \cdot e^{-t} + 0,25 \cdot e^{-5t})$

### 1.4.3. Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion

<b>A1.</b>	$G(p) = \frac{K_S}{1 + pT_1}$	P-T <sub>1</sub>
	$G(p) = K_P \cdot \left(1 + \frac{1}{pT_n}\right)$	PI
	$G(p) = K_P \cdot (1 + pT_v)$	PD
	$G(p) = \frac{K_I}{p(1 + pT_1)}$	I-T <sub>1</sub>
	$G(p) = \frac{K_D \cdot p}{1 + pT_1}$	D-T <sub>1</sub>
	$G(p) = \frac{K_S \cdot e^{-pT_t}}{(1 + pT_1)}$	P-T <sub>1</sub> -T <sub>t</sub>
	$G(p) = \frac{10}{1 + p \cdot 1,6s + p^2 \cdot 6,25s^2}$	P-T <sub>2</sub> -Schwingungsverhalten (d<1)
	$G(p) = \frac{1}{1 + 2p + 3p^2}$	P-T <sub>2</sub> -Schwingungsverhalten (d<1)
	$G(p) = \frac{0,25}{p(1 + 0,5p)}$	I-T <sub>1</sub>
	$G(p) = \frac{2p}{1 + 2p + 4p^2 + 3p^3}$	D-T <sub>3</sub>
	$G(p) = \frac{2,5 \cdot e^{-p \cdot 4s}}{1 + p \cdot 1,5s}$	P-T <sub>1</sub> -T <sub>t</sub>
<b>A2.</b>	$\ddot{x}_a(t) + \ddot{x}_a(t) + 16,25 \cdot \dot{x}_a(t) = 8 \cdot x_e(t)$	I-T <sub>2</sub>
oder	$\ddot{x}_a(t) + \dot{x}_a(t) + 16,25 \cdot x_a(t) = 8 \cdot \int x_e(t) dt$	
	$\ddot{x}_a(t) + 3 \cdot \ddot{x}_a(t) + 4 \cdot \dot{x}_a(t) + 2 \cdot x_a(t) = 6 \cdot \left(x_e(t) + 3 \cdot \int x_e(t) dt\right)$	PI-T <sub>3</sub>
	$5 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 2 \cdot \int x_e(t) dt$	I-T <sub>1</sub>
	$4 \cdot \ddot{x}_a(t) + 5 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 8 \cdot x_e(t)$	P-T <sub>2</sub>
	$3 \cdot \ddot{x}_a(t) + 2 \cdot \ddot{x}_a(t) + 4 \cdot \dot{x}_a(t) + 2 \cdot x_a(t) = 4 \cdot x_e(t)$	P-T <sub>3</sub>
	$2 \cdot \ddot{x}_a(t) + 3 \cdot \dot{x}_a(t) + 2 \cdot x_a(t) = 3 \cdot \dot{x}_e(t)$	D-T <sub>2</sub>
	$3 \cdot \dot{x}_a(t) + x_a(t) = 5 \cdot x_e(t - 2)$	P-T <sub>1</sub> -T <sub>t</sub>

**A3.**  $G(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{1+p}{1+\frac{17}{16}p}$  PD- $T_1$ .

**A4.**  $G(p) = \frac{x_a(p)}{x_e(p)} = \frac{0,25}{1+2p}$  P- $T_1$ .

**A5.**  $G(p) = \frac{G_1(p)}{1+G_1(p)G_2(p)} \cdot \frac{G_3(p)}{1+G_3(p)G_4(p)} = \frac{1}{\frac{1}{G_1(p)}+G_2(p)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{G_3(p)}+G_4(p)}$ ,

$G_1(p) = \frac{K_{II}}{p}$ ;  $G_2(p) = K_2$ ;  $G_3(p) = \frac{K_{I3}}{p}$ ;  $G_4(p) = K_4$ ,

$G(p) = \frac{1}{K_2 K_4} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{p}{K_{II} K_2}\right) \left(1 + \frac{p}{K_{I3} K_4}\right)}$ ;  $G(p) = \frac{K}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$ , P- $T_2$ .

**A6.**  $G(p) = \frac{u_a(p)}{u_e(p)} = \frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1+R_1C \cdot p}{1+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C \cdot p} = \frac{K_P(1+pT_D)}{1+pT_1}$ ,

$G(p) = \frac{u_a(p)}{u_e(p)} = \frac{R_2C \cdot p}{1+(R_1+R_2)C \cdot p} = \frac{K_D \cdot p}{1+pT_1}$ ,

$G(p) = \frac{u_a(p)}{u_e(p)} = \frac{1}{1+RC \cdot p+LC \cdot p^2} = \frac{K}{1+2dT_0 \cdot p+T_0^2 \cdot p^2}$ .

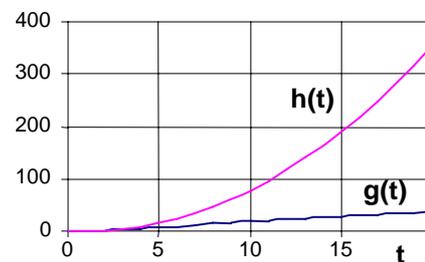
**A7.**  $G(p) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot (1+R_1C \cdot p) = -K_P(1+T_D p)$  PD.

**A8.** Partialbruchzerlegung ergibt:

$G(p) = \frac{2}{p} \left( \frac{1}{p} - \frac{4}{3(1+p)} + \frac{1}{12(1+0,25p)} \right)$ ,

$g(t) = -2,5 + 2t + 2,67e^{-t} - 0,167e^{-4t}$ ,

$h(t) = 2,65 - 2,5t + t^2 - 2,67e^{-t} + 0,042e^{-4t}$ .



#### 1.4.4. Diskretes Übertragungsverhalten

**A1.** 
$$y_R(k) = K_P \left[ x_w(k) + \frac{T_V}{T_A} \cdot (x_w(k) - x_w(k-1)) \right].$$

**A2.** DGL:  $0,5\ddot{x}(t) + 1,5\dot{x}(t) + x(t) = 2y(t),$

$$x(k) \left[ \frac{1}{4 \cdot T_A^2} + \frac{3}{4 \cdot T_A} + \frac{1}{2} \right] - x(k-1) \left[ \frac{1}{2 \cdot T_A^2} + \frac{3}{4 \cdot T_A} \right] + x(k-2) \cdot \frac{1}{4 \cdot T_A^2} = y(k).$$

**A3.** Polstellen:  $z_1 = 0; \quad z_{2,3,4} = 0,5$  (Dreifachpol),

System ist stabil, weil die Pole im Einheitskreis  $|z| < 1$  liegen.

**A4.**

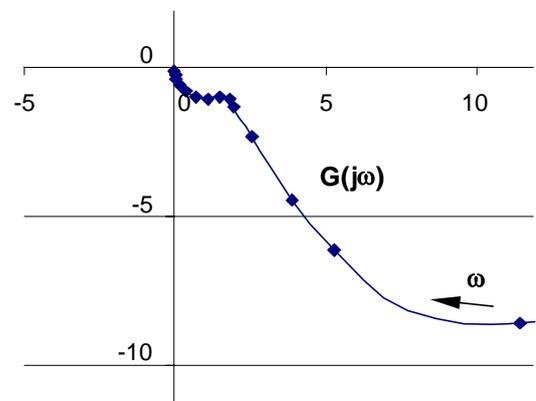
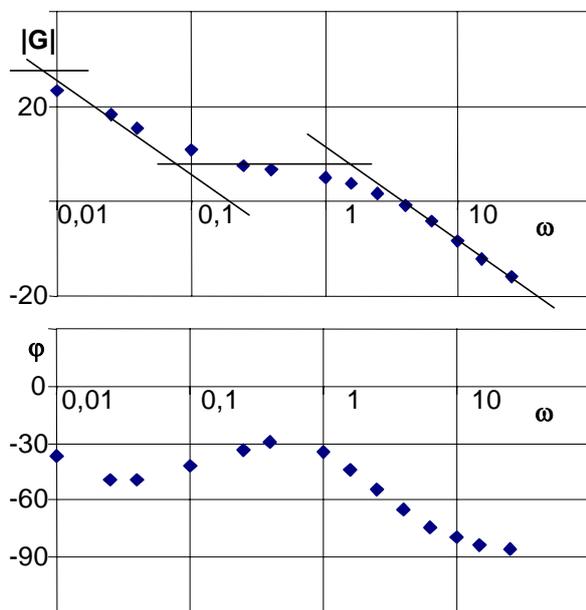
$$x(0) = 1; \quad x(1) = -1; \quad x(k) = 0 \text{ für } k \geq 2.$$

**A5.** 
$$X_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x(k)}{z^k} = 1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}.$$

### 1.4.5. Frequenzganganalyse

#### A1. Berechnung Betrag und Phase für das Bodediagramm

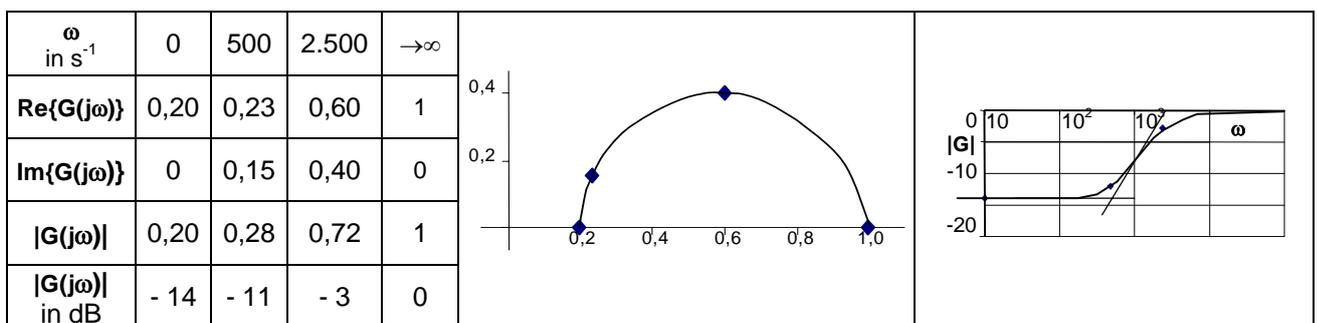
$\omega$ in $\text{min}^{-1}$	0,01	0,025	0,04	0,1	0,25	0,4	1,0	1,6	2,5	4,0	6,3	10	15	25
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	11,5	5,3	3,9	2,6	2,0	1,86	1,49	1,14	0,72	0,375	0,17	0,072	0,03	0,012
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	-8,6	-6,1	-4,45	-2,35	-1,3	-1,05	-1,02	-1,08	-1,01	-0,81	-0,58	-0,38	-0,25	-0,16
$ G(j\omega) $	14,4	8,1	5,9	3,5	2,4	2,1	1,8	1,6	1,2	0,9	0,6	0,4	0,3	0,2
$ G(j\omega) $ in dB	23,1	18,1	15,4	10,9	7,6	6,6	5,1	3,9	1,9	-1,0	-4,4	-8,3	-12,0	-15,9
$\varphi(\omega)$	-36,8	-49,0	-48,8	-42,1	-33,0	-29,4	-34,4	-43,5	-54,5	-65,2	-73,7	-79,3	-83,2	-85,7



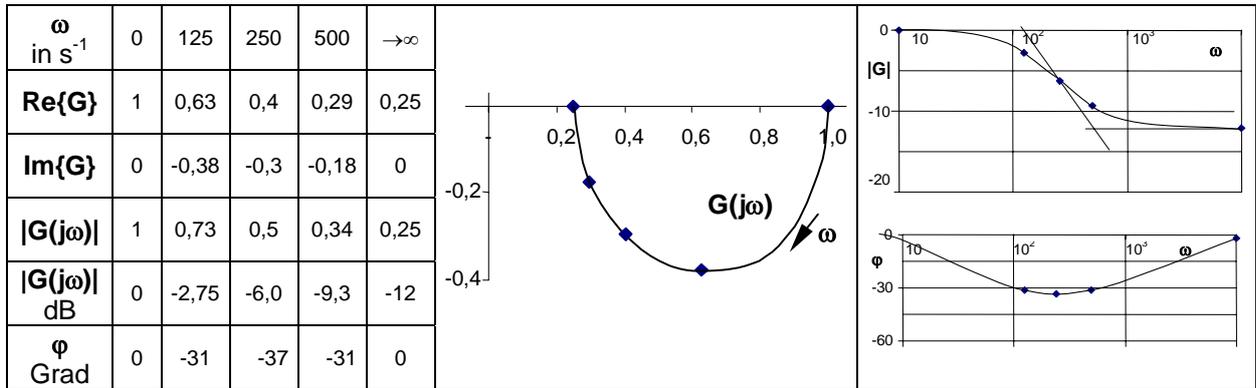
$$G(p) = 25 \cdot \frac{1 + 12,5p}{(1 + 120p)(1 + 0,5p)}$$

PD- $T_2$ -Verhalten mit  $K_P = 25$ ;  $T_1 = 120 \text{ min}$ ;  $T_2 = 0,5 \text{ min}$ ;  $T_D = 12,5 \text{ min}$  ;

A2.  $G(j\omega) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1 + j\omega \cdot 2 \text{ ms}}{1 + j\omega \cdot 0,4 \text{ ms}}$ ;  $\omega_{e1} = \frac{1}{T_D} = 500 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_{e2} = \frac{1}{T_1} = 2500 \text{ s}^{-1}$

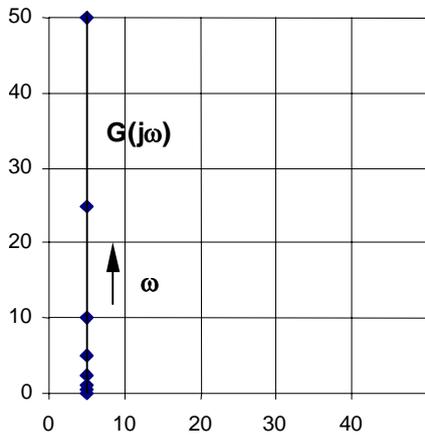


A3.  $G(j\omega) = \frac{1 + j\omega \cdot 2 \text{ ms}}{1 + j\omega \cdot 8 \text{ ms}}$ ;  $\omega_{e1} = \frac{1}{T_1} = 125 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_{e2} = \frac{1}{T_D} = 500 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_D}} = 250 \text{ s}^{-1}$

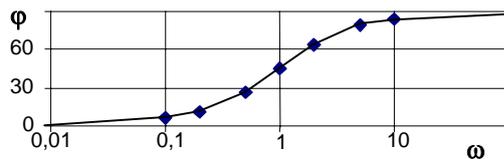
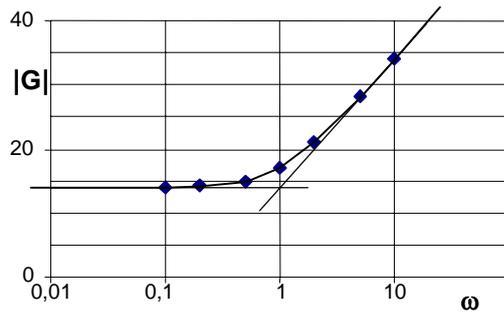


A4. System 1:

$\omega$ in $\text{min}^{-1}$	0,0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	$\omega \rightarrow \infty$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0	5,0
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	0,0	0,5	1,0	2,5	5,0	10,0	25,0	50,0	$\rightarrow \infty$
$ G(j\omega) $	5,0	5,0	5,1	5,6	7,1	11,2	25,5	50,2	$\rightarrow \infty$
$ G(j\omega) $ in dB	14,0	14,0	14,1	14,9	17,0	21,0	28,1	34,0	$\rightarrow \infty$
$\varphi$ Grad	0,0	5,7	11,3	26,6	45,0	63,4	78,7	84,3	90

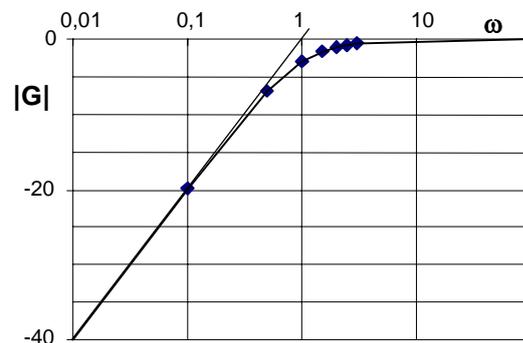
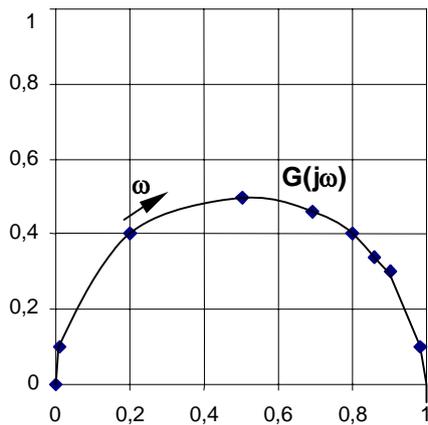


$G(j\omega) = K_P(1 + j\omega T_D)$   
 $G(j\omega) = 5(1 + j\omega \cdot 1 \text{ min})$

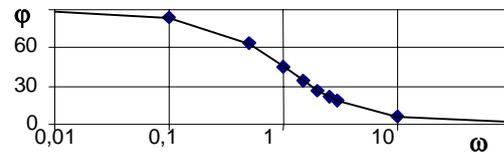


System 2:

$\omega$ in $\text{min}^{-1}$	0,0	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	10,0	$\omega \rightarrow \infty$
$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	0,0	0,01	0,2	0,5	0,69	0,8	0,86	0,9	0,99	1,0
$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	0,0	0,1	0,4	0,5	0,46	0,4	0,34	0,3	0,099	0,0
$ G(j\omega) $	0,0	0,1	0,4	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9	1,0	1,0
$ G(j\omega) $ in dB	$\rightarrow -\infty$	-20,0	-7,0	-3,0	-1,6	-1,0	-0,7	-0,5	0,0	0,0
$\varphi$ Grad	90	84,3	63,4	45,0	33,7	26,6	21,6	18,4	5,7	0,0

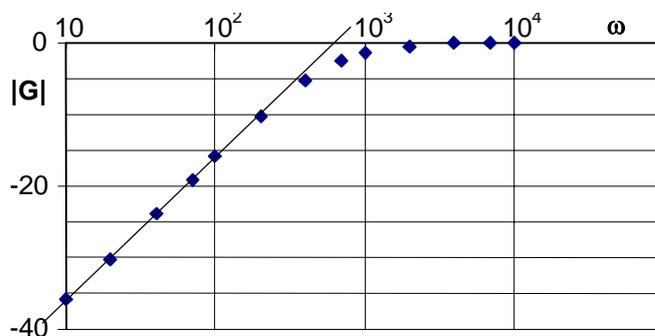


$$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{1 + j\omega T_1} = \frac{1 \text{ min} \cdot j\omega}{1 + j\omega \cdot 1 \text{ min}}$$



A5. Die Messung eines linearen technischen Systems ergab den folgenden Amplitudengang:

$\omega$ in $\text{s}^{-1}$	10	20	40	70	100	200	400	700	1000	2000	4000	7000	10000
$ G(j\omega) $	0,016	0,031	0,064	0,11	0,16	0,31	0,54	0,75	0,85	0,95	0,99	1,0	1,0
$ G(j\omega) $ in dB	-35,9	-30,2	-23,9	-19,2	-15,9	-10,2	-5,4	-2,5	-1,4	-0,4	-0,1	0,0	0,0



$$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{1 + j\omega T_1};$$

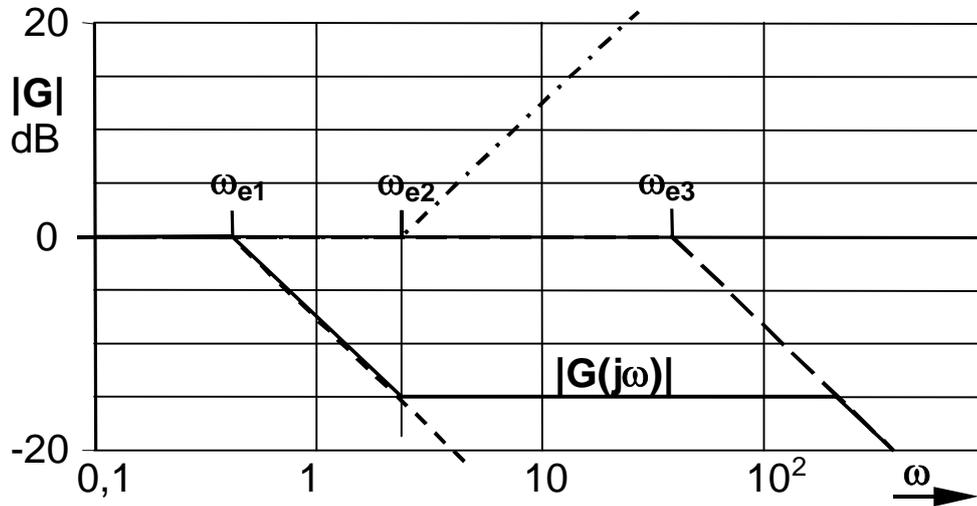
$$K_D = T_1 = \frac{1}{600} \text{ s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1,6 \text{ ms} \cdot j\omega}{1 + j\omega \cdot 1,6 \text{ ms}}$$

A6.

$$G(p) = \frac{1 + pT_D}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)} = (1 + pT_D) \cdot \frac{1}{1 + pT_1} \cdot \frac{1}{1 + pT_2},$$

mit  $\omega_{e1} = \frac{1}{T_1} = 0,4$ ;  $\omega_{e2} = \frac{1}{T_D} = 2$ ;  $\omega_{e3} = \frac{1}{T_2} = 40$ .



### 1.4.6. Übertragungsverhalten von Systemen, Komplexaufgaben

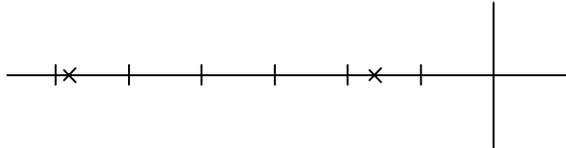
A1. a) 
$$G(p) = \frac{u_a}{u_e} = \frac{1}{1 + p \cdot (C_1 R_1 + C_2 R_1 + C_2 R_2) + p^2 \cdot C_1 R_1 \cdot C_2 R_2},$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)},$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,774 \cdot j\omega + 0,10296 \cdot (j\omega)^2} = \frac{1}{(1 + 0,6j\omega)(1 + 0,17j\omega)},$$

PN-Verteilung:

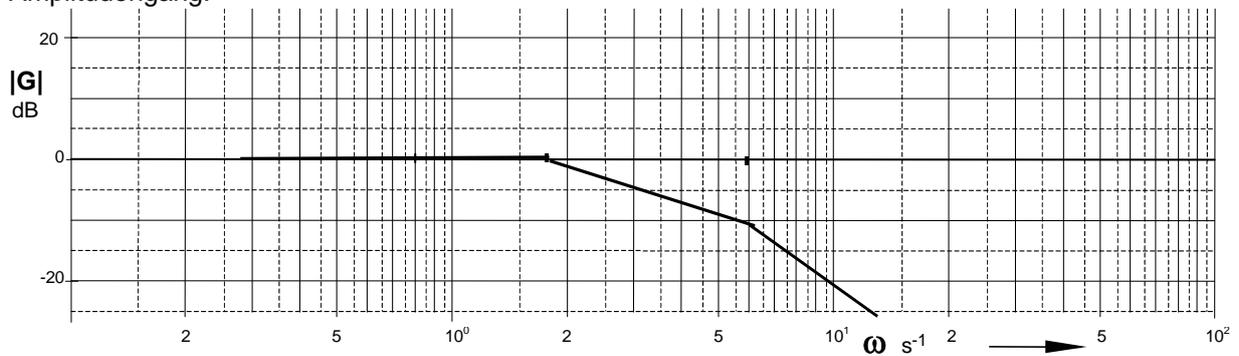
$$p_{P1} = -1,7; \quad p_{P2} = -5,9$$



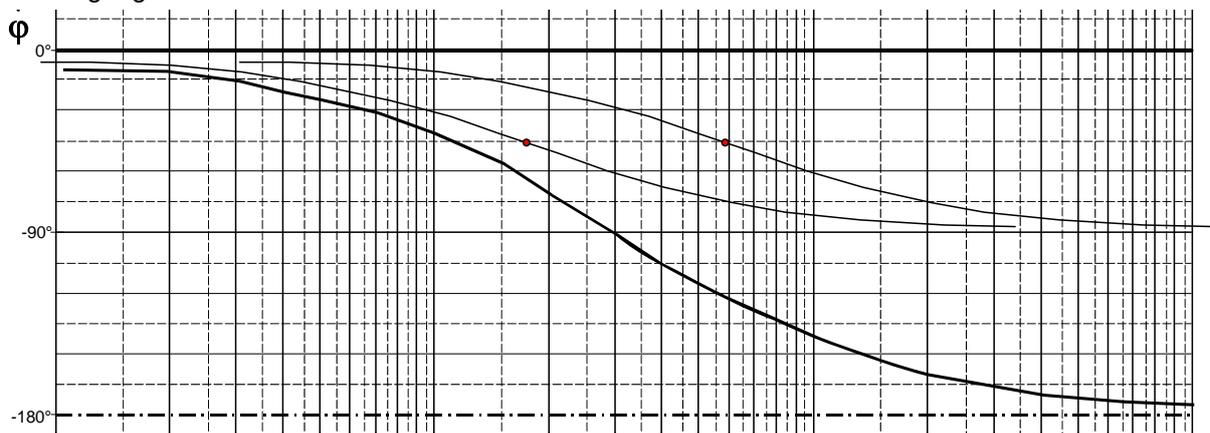
Frequenzgangdarstellung:

$$\omega_{e1} = 1,7; \quad \omega_{e2} = 5,9.$$

Amplitudengang:



Phasengang:



$$b) \quad G(j\omega) = \frac{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}}{R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}}; \quad G(p) = \frac{(1 + pC_1 R_1)(1 + pC_2 R_2)}{(1 + pC_1 R_1)(1 + pC_2 R_2) + pC_2 R_1},$$

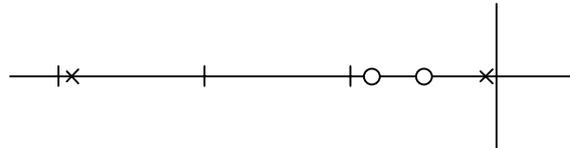
$$G(j\omega) = \frac{(1 + j\omega T_{D1})(1 + j\omega T_{D2})}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)},$$

$$G(j\omega) = \frac{(1 + 0,39j\omega)(1 + 0,26j\omega)}{(1 + 0,39j\omega)(1 + 0,26j\omega) + 0,86j\omega} = \frac{(1 + 0,39j\omega)(1 + 0,26j\omega)}{(1 + 1,44j\omega)(1 + 0,07j\omega)},$$

PN-Verteilung:

$$p_{N1} = -2,56; \quad p_{N2} = -3,85,$$

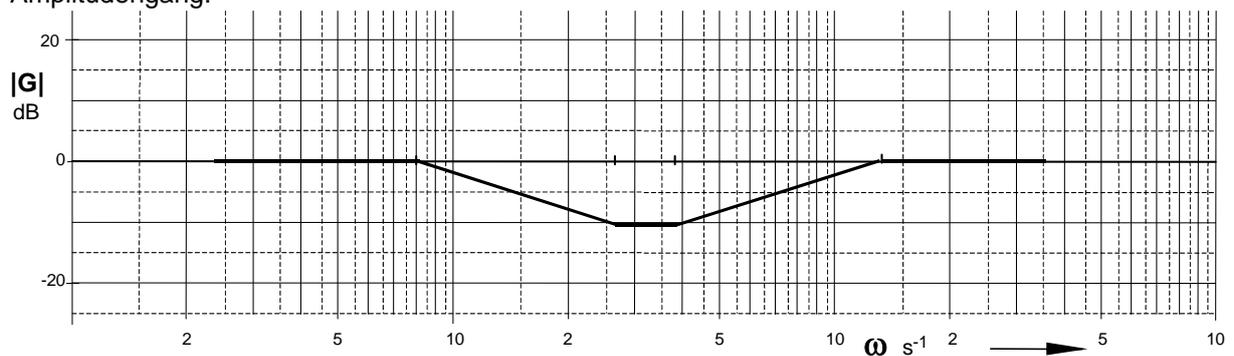
$$p_{P1} = -0,69; \quad p_{P2} = -14,28.$$



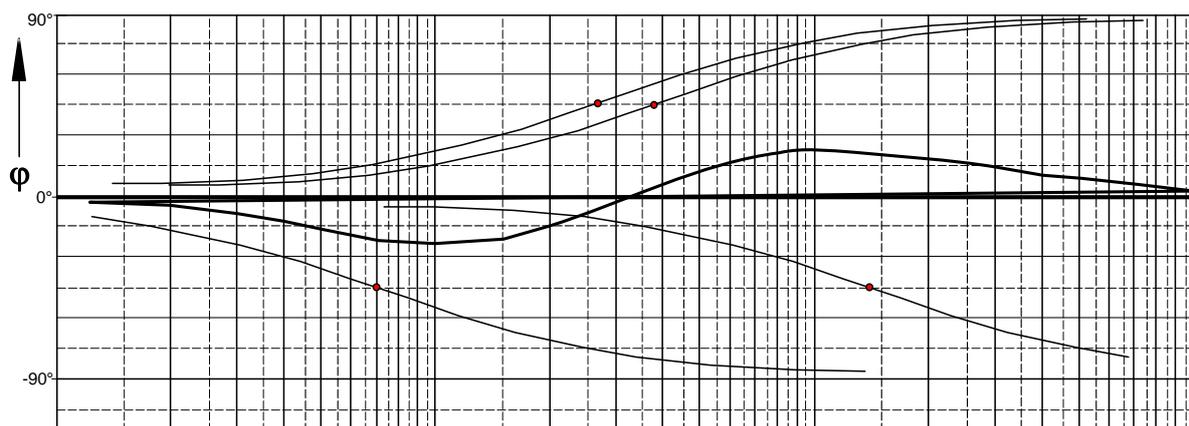
Frequenzgangdarstellung:

$$\omega_{e1} = 0,7 -; \quad \omega_{e2} = 2,6 +; \quad \omega_{e3} = 3,85 +; \quad \omega_{e4} = 14,3 -$$

Amplitudengang:



Phasengang:



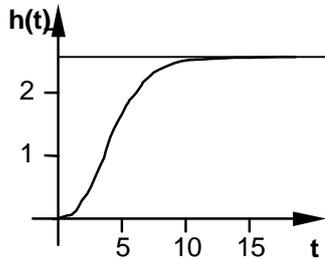
A2.

a)

Systemtyp: P-T<sub>2</sub>

Übergangsfunktion:

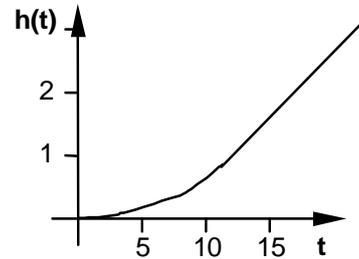
$$h(t) = 2,5 \left( 1 - \frac{1,5}{1,5 - 0,8} e^{-\frac{t}{1,5}} + \frac{0,8}{1,5 - 0,8} e^{-\frac{t}{0,8}} \right)$$



b)

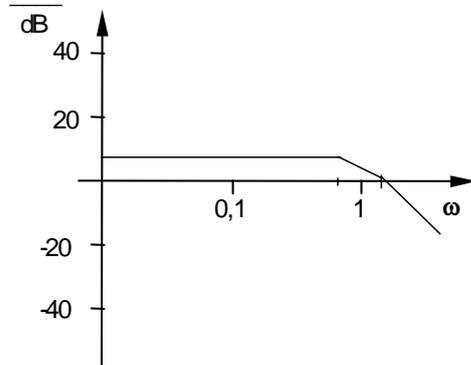
I-T<sub>1</sub>

$$h(t) = 0,2 \left[ t - 2,2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{2,2}} \right) \right]$$

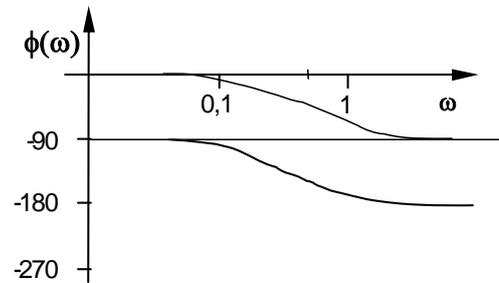
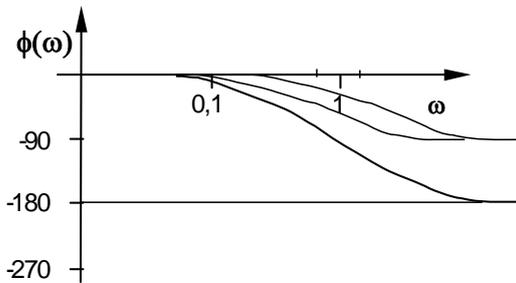
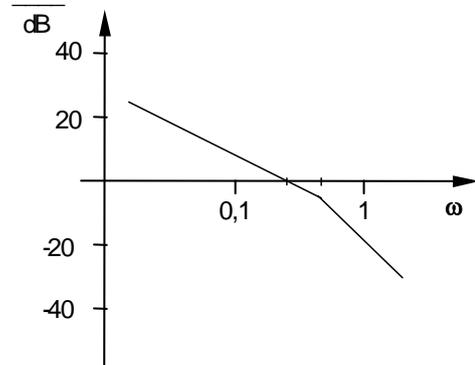


Bodediagramm:

$|G(j\omega)|$



$|G(j\omega)|$



A3.

a)

Übertragungsfunktion:

$$G(p) = \frac{2}{p(1+p \cdot 2,5)}$$

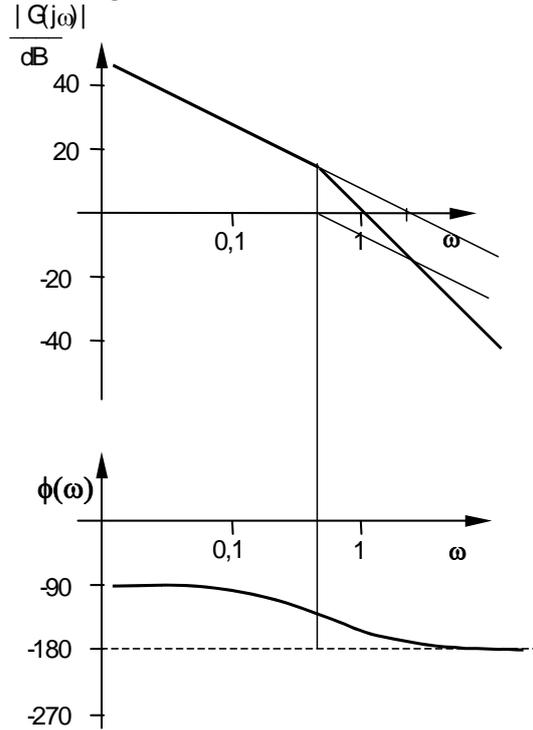
Systemtyp:

I-T<sub>1</sub>

DGL:

$$2,5\ddot{v} + \dot{v} = 2u$$

Bodediagramm:

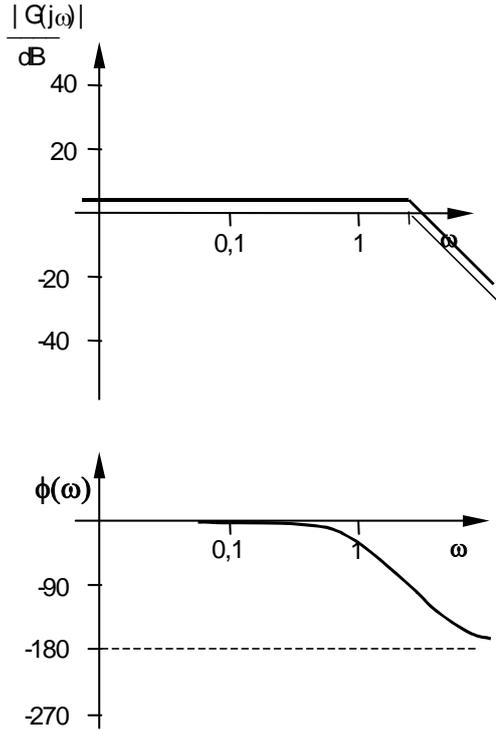


b)

$$G(p) = \frac{1,3}{(1+p \cdot 0,3)^2}$$

P-T<sub>2</sub>

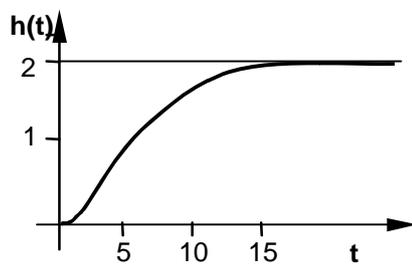
$$0,09\ddot{v} + 0,6\dot{v} + v = 1,3u$$



A4.

$$\frac{1}{p(ap+1)(bp+1)} \leftrightarrow 1 + \frac{ae^{-\frac{t}{a}} - be^{-\frac{t}{b}}}{b-a};$$

$$h(t) = 2 \left( 1 + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{5}{4}e^{-\frac{t}{5}} \right).$$



$$\text{A5.} \quad \Omega = 2\pi \cdot n = \frac{c \cdot G_e(j\omega)G_m(j\omega)}{1 + c^2 \cdot G_e(j\omega)G_m(j\omega)} \cdot U_M - \frac{G_m(j\omega)}{1 + c^2 \cdot G_e(j\omega)G_m(j\omega)} \cdot M_L,$$

$$\Omega = 2\pi \cdot n = \frac{c}{\frac{1}{G_e(j\omega)G_m(j\omega)} + c^2} \cdot U_M - \frac{\frac{1}{G_e(j\omega)}}{\frac{1}{G_e(j\omega)G_m(j\omega)} + c^2} \cdot M_L.$$

Leerlauf ( $M_L = 0$ ):

$$\Omega = 2\pi \cdot n = \frac{c}{\frac{1}{G_e(j\omega)G_m(j\omega)} + c^2} \cdot U_M;$$

$$\Omega = \frac{c}{(R_A + R_M)(1 + j\omega T_e) \cdot f_r(1 + j\omega T_m) + c^2} \cdot U_M,$$

$$\Omega = \frac{332 \text{ (Vs)}^{-1}}{1 + 9,8 \cdot 10^{-3} j\omega + 37,5 \cdot 10^{-9} (j\omega)^2} \cdot U_M = \frac{332 \text{ (Vs)}^{-1}}{(1 + 9,9 \cdot 10^{-3} j\omega)(1 + 3,8 \cdot 10^{-6} j\omega)} \cdot U_M;$$

$$\Omega = 830 \text{ s}^{-1}; \quad n = 132 \text{ Us}^{-1}.$$

Lastabhängigkeit der Drehzahl:

$$n = -\frac{\frac{1}{2\pi}}{\frac{1}{G_m(j\omega)} + c^2 \cdot G_e(j\omega)} \cdot M_L = -\frac{\frac{1}{2\pi} \cdot (R_A + R_M)(1 + j\omega T_e)}{f_r \cdot (1 + j\omega T_m) \cdot (R_A + R_M)(1 + j\omega T_e) + c^2} \cdot M_L$$

$$n = -\frac{0,51 \cdot 10^6 (1 + 3,8 \cdot 10^{-6} j\omega) \text{ (VAs)}^{-1} \text{ s}^{-1}}{(1 + 9,9 \cdot 10^{-3} j\omega)(1 + 3,8 \cdot 10^{-6} j\omega)} \cdot M_L$$

Bei  $U_M = 2,5 \text{ V}$  verringert sich die Drehzahl auf

$$n = 132 - 5,1 \cdot 10^5 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} = 81 \text{ U s}^{-1}$$

Bei  $U_M = 2,5 \text{ V}$  bleibt der Motor bereits bei  $M_{L0} = 0,26 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$  stehen.

Die Vergrößerung des Meßwiderstandes führt auf die Drehzahlabhängigkeit

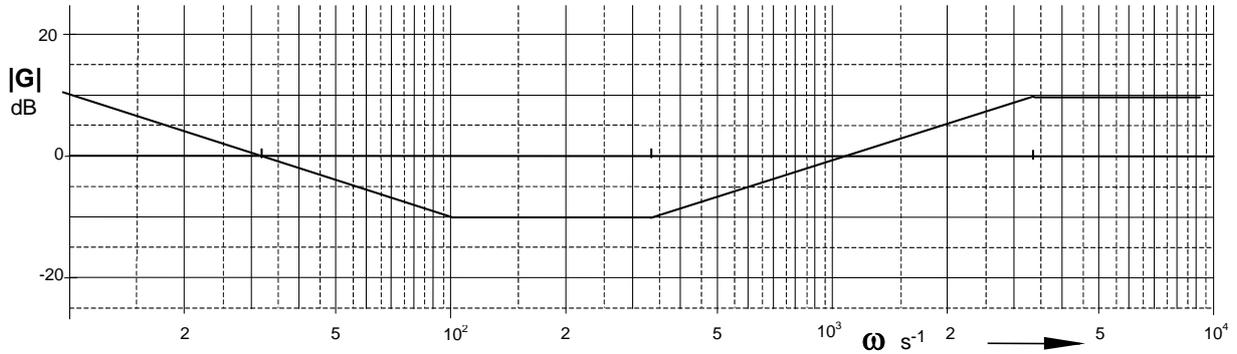
$$n = \frac{51,6 \text{ (Vs)}^{-1} \cdot U_M}{(1 + 13 \cdot 10^{-3} j\omega)(1 + 3,8 \cdot 10^{-6} j\omega)} - \frac{0,66 \cdot 10^6 (1 + 3,8 \cdot 10^{-6} j\omega) \text{ (VAs)}^{-1} \text{ s}^{-1}}{(1 + 13 \cdot 10^{-3} j\omega)(1 + 0,4 \cdot 10^{-3} j\omega)} \cdot M_L,$$

die Drehzahl fällt ab, die Lastabhängigkeit wird größer, die Dynamik wird etwas schlechter.

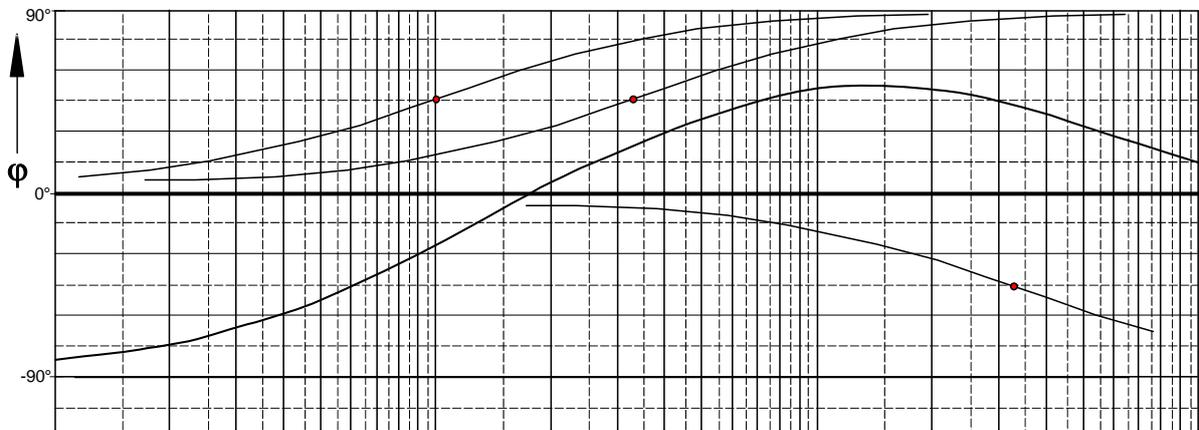
A6. 
$$G_R(p) = \frac{32}{p} \cdot \frac{(1 + 0,01 p)(1 + 0,003 p)}{1 + 0,0003 p},$$

$\omega_{e1} = 100 (+); \quad \omega_{e2} = 333 (+); \quad \omega_{e1} = 3333 (-);$

Amplitudengang:



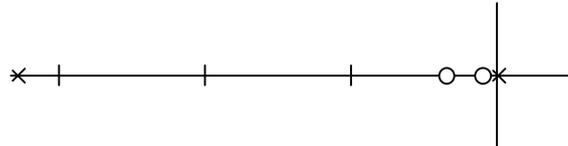
Phasengang:



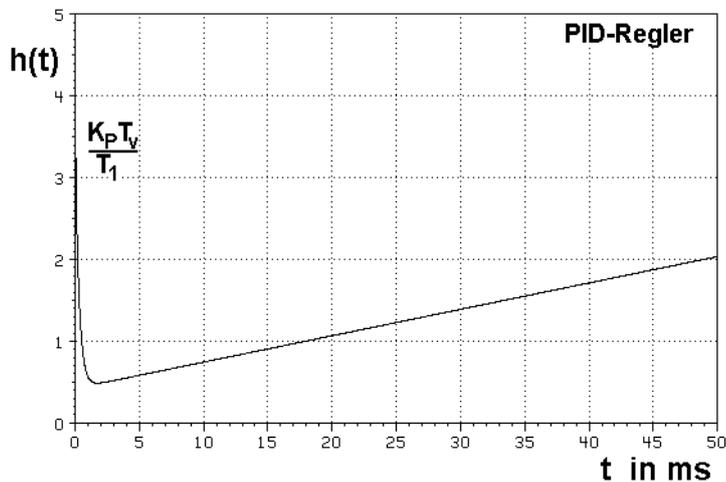
PN-Verteilung:

$p_{N1} = -100; \quad p_{N2} = -333,$

$p_{P1} = 0; \quad p_{P2} = -3333.$

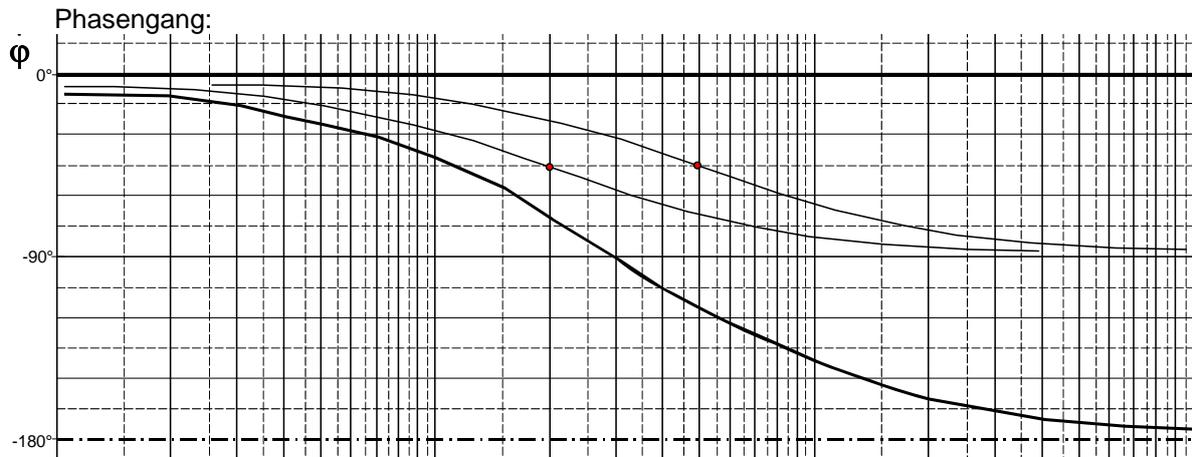


$$h(t) = K_P \left\{ 1 + \frac{(t - T_1)}{T_n} + e^{-\frac{t}{T_1}} \left( \frac{T_1}{T_n} + \frac{T_v}{T_1} - 1 \right) \right\},$$



A7. Geradennäherung ergibt:

$$12,5 \text{ db} = 4,2; \quad \omega_{e1} = 20, \quad \omega_{e2} = 50; \quad G_S(j\omega) = \frac{4,2}{(1 + 0,02 \cdot j\omega)(1 + 0,05 \cdot j\omega)}$$



$$G_S(p) = \frac{v}{u} = \frac{4,2}{(1 + 0,02 \cdot p)(1 + 0,05 \cdot p)}$$

$$0,001\ddot{v} + 0,07\dot{v} + v = 4,2u,$$

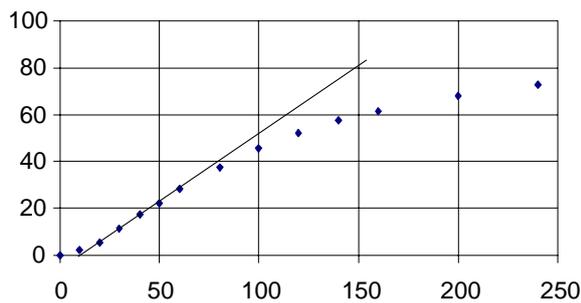
$$h(t) = 4,2 \left( 1 + \frac{0,02}{0,03} e^{-\frac{t}{0,02}} - \frac{0,05}{0,03} e^{-\frac{t}{0,05}} \right).$$

## 2. Kennwertermittlung

### 2.1. Kennwertermittlung im Zeitbereich

A1.  $h(t) = \frac{x_a(t)}{x_{e0}} = \frac{\vartheta(t) - 20^\circ\text{C}}{1,25\text{ kW}}$ ;  $K_S = 80 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}}$

t in min	0	10	20	30	40	50	60	80	100	120	140	160	200	240	$\rightarrow\infty$
$\vartheta$ in $^\circ\text{C}$	20	23	27	34	42	48	55	67	77	85	92	97	105	111	120
h(t)	0	2,4	5,6	11,2	17,6	22,4	28	37,6	45,6	52	57,6	61,6	68	72,8	80



$$\left. \begin{array}{l} T_g = 135 \text{ min} \\ T_u = 10 \text{ min} \end{array} \right\} \frac{T_g}{T_u} = 13,5 > 9,65; \quad b = 4,3$$

$$\frac{T_g}{T_1} = 7; \quad T_1 = 20 \text{ min}; \quad T_2 = b \cdot T_1 = 85 \text{ min}$$

$$G(p) = 80 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot \frac{1}{(1 + p \cdot 20 \text{ min})(1 + p \cdot 85 \text{ min})}$$

$$h(t) = 80 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot \left[ 1 - 1,3 \cdot \exp\left(-\frac{t}{85 \text{ min}}\right) + 0,3 \cdot \exp\left(-\frac{t}{20 \text{ min}}\right) \right]$$

$$1700 \cdot \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + 105 \cdot \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \vartheta(t) = 80 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot P_{el}(t)$$

A2.  $\frac{T_g}{T_u} = \frac{350\text{s}}{18\text{s}} = 19,5 > 9,65; \quad b = 9,4,$

$$\frac{T_g}{T_1} = 12,3; \quad T_1 = 28,4\text{s}; \quad T_2 = b \cdot T_1 = 267\text{s},$$

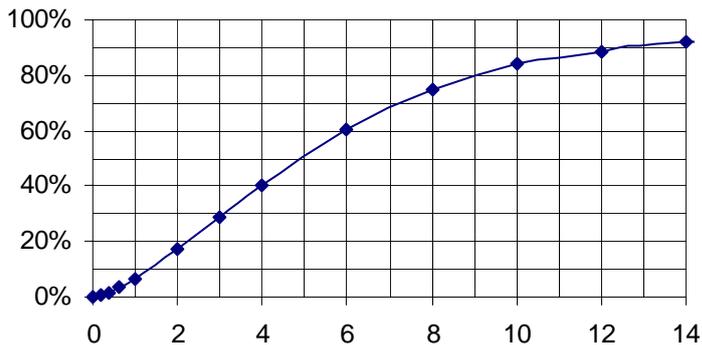
$$G(p) = 1,3 \frac{\text{mV}}{\text{V}} \cdot \frac{1}{(1 + p \cdot 28,4\text{s})(1 + p \cdot 267\text{s})}$$

$$h(t) = 1,3 \frac{\text{mV}}{\text{V}} \cdot \left[ 1 - 1,12 \cdot \exp\left(-\frac{t}{267\text{s}}\right) + 0,12 \cdot \exp\left(-\frac{t}{28,4\text{s}}\right) \right]$$

$$7570 \cdot \frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2} + 295 \cdot \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \vartheta(t) = 1,3 \frac{\text{mV}}{\text{V}} \cdot u_e(t)$$

**A3.** 
$$h(t) = \frac{\vartheta(t) - 20^\circ\text{C}}{0,5\text{kW}} \quad K_S = \frac{590^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{0,5\text{kW}} = 1140 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}},$$

<b>t</b> in min	0	0,2	0,4	0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0	12,0	14,0	$\rightarrow\infty$
<b><math>\vartheta</math></b> in $^\circ\text{C}$	20	23	29	39	58	117	185	250	365	445	500	525	545	590
<b>h(t)</b>	0	6	18	38	76	194	330	460	690	850	960	1010	1050	1140
<b>h(t)</b> in %	0,0	0,5	1,6	3,3	6,7	17,0	28,9	40,4	60,5	74,6	84,2	88,6	92,1	100,0



$$\begin{aligned} T_{10} &= 1,4; \\ T_{90} &= 12,4; \quad T_{90}/T_{10} = 8,9; \quad b = 3,8; \\ T_{70} &= 7,2; \quad T_{70}/T_{10} = 5,1; \quad b = 3,8; \\ T_{50} &= 4,9; \quad T_{50}/T_{10} = 3,5; \quad b = 4,2; \\ T_{30} &= 3,2; \quad T_{30}/T_{10} = 2,3; \quad b = 4,5; \end{aligned}$$

$$b = 4; \quad T_1 = 1,25 \text{ min}; \quad T_2 = 5 \text{ min},$$

$$G(p) = 1140 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot \frac{1}{(1 + p \cdot 1,25 \text{ min})(1 + p \cdot 5 \text{ min})},$$

$$h(t) = 1140 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot \left[ 1 + 0,33 \cdot \exp\left(-\frac{t}{1,25 \text{ min}}\right) - 1,33 \cdot \exp\left(-\frac{t}{5 \text{ min}}\right) \right],$$

$$6,25 \cdot \frac{d^2 \vartheta(t)}{dt^2} + 6,25 \cdot \frac{d\vartheta(t)}{dt} + \vartheta(t) = 1140 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kW}} \cdot P_{el}(t).$$

**A4.** 
$$K_S = \frac{\Delta x_a}{\Delta x_e} = \frac{3,2 \text{ mV}}{70 \text{ K}} = 0,046 \frac{\text{mV}}{\text{K}},$$

$$\left. \begin{aligned} T_{30}/T_{50} &= 0,72; \quad n = 3 \\ T_{50}/T_{90} &= 0,51; \quad n = 3 \end{aligned} \right\} n = 3; \quad \frac{T_{50}}{T_1} = 2,6; \quad T_1 = 3,8 \text{ s},$$

$$G(p) = \frac{K_S}{(1 + pT_1)^3} = 0,046 \frac{\text{mV}}{\text{K}} \cdot \frac{1}{(1 + p \cdot 3,8 \text{ s})^3},$$

$$h(t) = 0,046 \frac{\text{mV}}{\text{K}} \cdot \left[ 1 - e^{-\frac{t}{3,8 \text{ s}}} \left( 1 + \frac{t}{3,8 \text{ s}} + \frac{t^2}{28,9 \text{ s}^2} \right) \right].$$

## 2.2. Kennwertermittlung im Frequenzbereich

A1. 1.  $K_I = 0,6$ ;  $\omega_{e1} = 0,2 (+)$ ;  $\omega_{e2} = 4 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_I \cdot 1 + j\omega T_D}{j\omega \cdot 1 + j\omega T_1} = \frac{0,6}{j\omega} \cdot \frac{1 + j\omega \cdot 5}{1 + j\omega \cdot 0,25} , \quad \text{I-PD-T}_1 ,$$

bzw.:  $G(j\omega) = K_P \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_n} \right) \cdot \frac{1}{1 + j\omega T_1} = 3 \cdot \left( 1 + \frac{1}{j\omega \cdot 1,67} \right) \cdot \frac{1}{1 + j\omega \cdot 0,25}$  PI-T<sub>1</sub> .

2.  $K_S = 20 \text{ dB} = 10$ ;  $\omega_{e1} = 1 (-)$ ;  $\omega_{e2} = 2 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_S}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{10}{(1 + j\omega \cdot 1)(1 + j\omega \cdot 0,5)} , \quad \text{P-T}_2 .$$

3.  $K_I = 0,2$ ;  $\omega_{e1} = 0,1 (+)$ ;  $\omega_{e2} = 0,5 (+)$ ;  $\omega_{e3} = 2 (-)$ ;  $\omega_{e4} = 10 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_I \cdot (1 + j\omega T_{D1})(1 + j\omega T_{D2})}{j\omega \cdot (1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{0,2}{j\omega} \cdot \frac{(1 + j\omega \cdot 10)(1 + j\omega \cdot 2)}{(1 + j\omega \cdot 0,5)(1 + j\omega \cdot 0,1)} , \quad \text{I-(PD)}_2\text{-T}_2 ,$$

bzw.:  $G(j\omega) = \frac{K_P \left( 1 + \frac{1}{j\omega T_n} + j\omega T_v \right)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{2,4 \cdot \left( 1 + \frac{1}{j\omega \cdot 5} + j\omega \cdot 1,67 \right)}{(1 + j\omega \cdot 0,5)(1 + j\omega \cdot 0,1)} , \quad \text{PID-T}_2 .$

4.  $K_D = T_D = \frac{1}{0,02} = 50$  ,

$$G(j\omega) = K_D j\omega = j\omega T_D = j\omega \cdot 50 , \quad \text{D} .$$

5.  $K_I = \frac{1}{T_1} = 0,04$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_I}{j\omega} = \frac{1}{j\omega T_1} = \frac{0,04}{j\omega} = \frac{1}{j\omega \cdot 25} , \quad \text{I} .$$

6.  $K_S = -14 \text{ dB} = 0,2$ ;  $\omega_{e1} = 3 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_S}{1 + j\omega T_1} = \frac{0,2}{1 + j\omega \cdot 0,33} , \quad \text{P-T}_1 .$$

7.  $K_D = T_D = \frac{1}{0,4}$ ;  $\omega_{e1} = 0,4 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{1 + j\omega T_1} = \frac{j\omega T_D}{1 + j\omega T_1} = \frac{2,5 \cdot j\omega}{1 + j\omega \cdot 2,5} , \quad \text{D-T}_1 .$$

8.  $K_D = T_D = \frac{1}{2}$ ;  $\omega_{e1} = 0,4 (-)$ ;  $\omega_{e2} = 5 (-)$  ,

$$G(j\omega) = \frac{K_D j\omega}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} = \frac{0,5 \cdot j\omega}{(1 + j\omega \cdot 0,5)(1 + j\omega \cdot 0,2)} , \quad \text{D-T}_2 .$$

### 3. Regeleinrichtungen und Regelalgorithmen

#### 3.1. Zweipunktregler

A1. Grundlast:

$$\Delta x_G = 150^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = 130^\circ\text{C} ,$$

$$\Delta y_G = \frac{\Delta x_G}{K_S} = \frac{130^\circ\text{C}}{12 \text{ K m}^{-3}\text{h}} = 10,8 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} ,$$

Regelbereich für die Regellast:

$$\Delta x_R = x_{\max} - x_0 = 100^\circ\text{C} ;$$

geschaltete Regellast:

$$\Delta y_R = \frac{\Delta x_R}{K_S} = \frac{100^\circ\text{C}}{12 \text{ K m}^{-3}\text{h}} = 8,35 \frac{\text{m}^3}{\text{h}} ,$$

Schwingspanne:

$$2\hat{x} = \frac{T_t}{T_1} \cdot \Delta x_R + x_\Delta = 36,6^\circ\text{C} ,$$

Extremtemperaturen:

$$x_S + \hat{x} = 218,3^\circ\text{C}$$

$$x_S - \hat{x} = 181,7^\circ\text{C} ,$$

Schwingungsdauer:

$$T \approx 4 \cdot T_t + \frac{4x_\Delta}{\Delta x_R} \cdot T_1 = 22 \text{ min} ; \quad T_{\text{lauf}} = T_{\text{lab}} = T_1 ,$$

Ein/Ausschaltverhältnis:

$$\frac{T_{\text{lauf}}}{T_{\text{lab}}} = 1 ,$$

Bleibende Regeldifferenz:

$$x_{\text{db}} = 0 .$$

### 3.2. Stetige Regeleinrichtungen

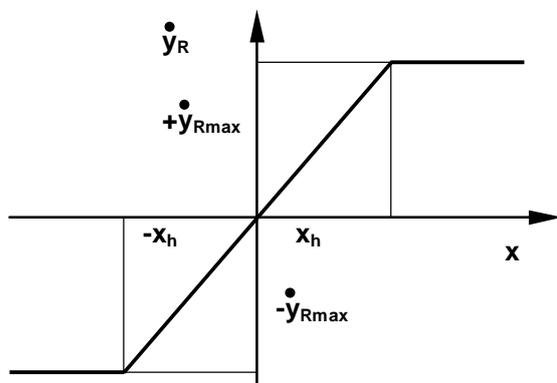
**A1.** 
$$G_R(p) = \frac{y_R(p)}{x_d(p)} = \frac{1}{\frac{1}{K_I} + G_r(p)},$$

für  $K_r \rightarrow \infty$ :

$$G_R(p) = \frac{1}{G_r(p)} = \frac{1}{10p} \cdot (1 + 16p + 48p^2) = 1,6 \cdot \left(1 + \frac{1}{16p} + 3p\right), \quad \text{PID-Regler,}$$

Kennwerte:  $K_p = 1,6$ ;  $T_n = 16$ ;  $T_v = 3$ .

**A2. Kennlinie:**



DGL:

$$y_R(t) = K_I \cdot \int x_W(t) dt$$

oder 
$$\dot{y}_R(t) = K_I \cdot x_W(t)$$

$$K_I = 0,5 \frac{\text{cm s}^{-1}}{\text{V}}$$

$$T_y = \frac{y_h}{y_h \cdot K_I} = \frac{y_h}{\dot{y}_{R \max}} = 6 \text{ s.}$$

**A3.** 
$$G_R(p) = \frac{y_R(p)}{x_d(p)} = \frac{1}{\frac{1}{G_v(p)} + G_r(p)} = \frac{1}{\frac{p}{4 \cdot 0,5} + \frac{2 \cdot 35p}{1 + 35p}},$$

$$G_R(p) = \frac{0,49 \cdot \left(1 + \frac{1}{p \cdot 35 \text{ s}}\right)}{1 + p \cdot 0,25 \text{ s}}, \quad \text{PI-T}_1\text{-Verhalten,}$$

Kennwerte:  $K_p = 0,49$ ;  $T_n = 35 \text{ s}$ ;  $T_1 = 0,25 \text{ s}$ .

**A4.** PI-Regler,

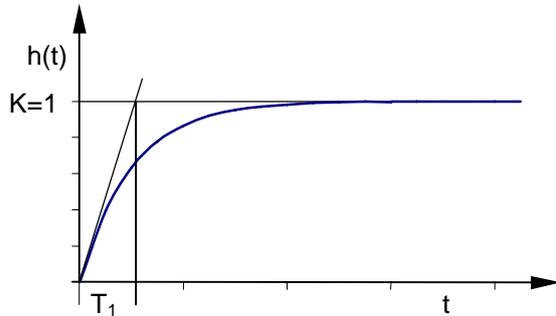
$$G_R(p) = 1,5 \cdot \left(1 + \frac{1}{3p}\right),$$

Kennwerte:  $K_p = 1,5$ ;  $T_n = 3$ .

## 4. Entwurf und Verhalten einschleifiger linearer Regelkreise

### 4.1. Übertragungsverhalten des Regelkreises

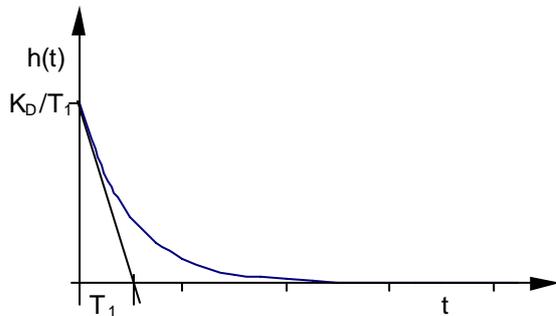
A1.



$$G_W(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_I K_S} \cdot p},$$

$$K = 1; \quad T_1 = \frac{1}{K_I K_S},$$

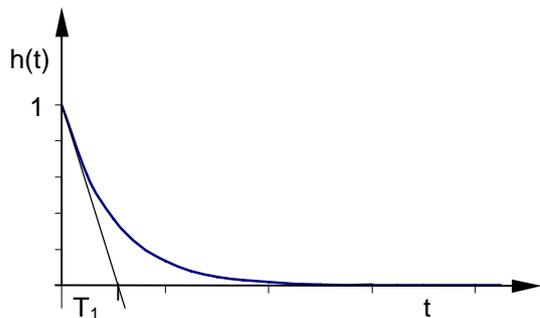
$T_1$ -Verhalten.



$$G_Z(p) = \frac{K_S \cdot p}{K_I K_S + p} = \frac{\frac{1}{K_I} \cdot p}{1 + \frac{1}{K_I K_S} \cdot p},$$

$$K_D = \frac{1}{K_I}; \quad T_1 = \frac{1}{K_I K_S},$$

D- $T_1$ -Verhalten.



$$G_Z(p) = \frac{1}{1 + \frac{K_I K_S}{p}} = \frac{\frac{1}{K_I K_S} \cdot p}{1 + \frac{1}{K_I K_S} \cdot p},$$

$$K_D = T_1 = \frac{1}{K_I K_S},$$

D- $T_1$ -Verhalten.

A2.  $R = \frac{1}{1 + K_R K_S}, \quad K_S = 0,5, \quad K_R = 18,$

$x_{db} = -R \cdot K_S \cdot z \quad x_{db} = -0,025.$

**A3. Reglerauswahl:**

- |    |                            |               |   |
|----|----------------------------|---------------|---|
| a) | P-T <sub>2</sub> -Strecke, | P-Regler      | bleibende Regeldifferenzen bei Führung und Störung;                                       |
|    |                            | I-Regler      | keine bleibenden Regeldifferenzen, aber langsamer;  |
|    |                            | PI-, PID      | keine bleibenden Regeldifferenzen, schneller als I-Regler.                                |
| b) | I-T <sub>1</sub> -Strecke, | P-, PD-Regler | bleibende Regeldifferenz bei Störung;   |
|    |                            | I-Regler      | instabil;   |
|    |                            | PI-, PID      | keine bleibenden Regeldifferenzen,<br>deutlich geringere Stabilitätsreserve als P-Regler. |

**A4. Reglerauswahl:**

- |    |                            |               |   |
|----|----------------------------|---------------|---|
| b) | I-T <sub>1</sub> -Strecke, | P-, PD-Regler | bleibende Regeldifferenz bei Störung;   |
|    |                            | I-Regler      | instabil;   |
|    |                            | PI-, PID      | keine bleibenden Regeldifferenzen,<br>deutlich geringere Stabilitätsreserve als P-Regler. |
| b) | P-T <sub>2</sub> -Strecke, | P-Regler      | bleibende Regeldifferenzen bei Führung und Störung;                                       |
|    |                            | I-Regler      | keine bleibenden Regeldifferenzen, aber langsamer;  |
|    |                            | PI-, PID      | keine bleibenden Regeldifferenzen, schneller als I-Regler.                                |

## 4.2. Stabilität des Regelkreises

$$\text{A1.} \quad D = \begin{vmatrix} K_I K_P T_n & T_I T_n \\ K_I K_P & T_n \end{vmatrix},$$

$$D_1 = K_I K_P T_n > 0; \quad K_I > 0, \quad K_P > 0, \quad T_n > 0,$$

$$D_2 = K_P K_I T_n^2 - K_P K_I T_n T_I > 0; \quad T_n - T_I > 0, \quad T_n > T_I.$$

$$\text{A2.} \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3,5 & 1 \\ 1+2K_P & 3,5 \end{vmatrix},$$

$$K_P < 5,6.$$

$$\text{A3.} \quad G_R(j\omega) = -\frac{1}{G_S(j\omega)},$$

$$K_P = -\frac{j\omega(j\omega - \omega^2 - j\omega^3)}{2 + j\omega},$$

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{2}; \quad K_{P\text{krit}} = 1; \quad T_{\text{krit}} = 4,44 \text{ min.}$$

$$\text{A4.} \quad \omega = 0,5,$$

$$\text{stabil, da} \quad \text{Im}\left\{-\frac{1}{G_S(j\omega)}\right\} > \text{Im}\{G_R(j\omega)\}.$$

$$\text{A5.} \quad G_R(j\omega) \cdot G_S(j\omega) = -1,$$

$$\frac{K_I}{\omega} \cdot 1 = 1; \quad -\frac{\pi}{2} - \omega T_t = -\pi \quad K_I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{T_t},$$

$$\frac{K_I}{\omega} \cdot 1 = 1; \quad -\frac{\pi}{2} - \omega T_t = -\frac{2\pi}{3} \quad K_I = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{T_t}.$$

**A6.** Hurwitzkriterium:

$$A(p) = K + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + p^4,$$

instabil, da  $a_3 = 0$ .

### 4.3. Einstellregeln

A1. Einstellregeln nach Chien/Hrones/Reswick (CHR):

$$K_P = 0,6 \cdot \frac{T_g}{T_u K_S} = 0,1 \frac{\text{kW}}{\text{K}}, \quad T_n = 4 \cdot T_u = 12 \text{ min} .$$

A2.  $T_n = 4$  ,

$$\text{I-Regler an } G_1(p) = \frac{2,5}{(1 + 0,2p)(1 + 0,5p)} ,$$

Bodediagramm zeichnen:  $2,5 = 8 \text{ dB}$  ;  $\omega_{e1} = 5 \text{ s}^{-1}$  ;  $\omega_{e2} = 2 \text{ s}^{-1}$  ,

Stabilitätsgrenze:

$$\text{bei } \varphi_s = -90^\circ ; \quad \omega = 3 \text{ s}^{-1} ; \quad |G_1(j\omega)| = 4 \text{ dB} \quad K_I = \frac{\omega}{|G_1(j\omega)|} = 1,9 \text{ s}^{-1} ,$$

Phasenreserve  $60^\circ$  :

$$\text{bei } \varphi_s = -30^\circ ; \quad \omega = 0,75 \text{ s}^{-1} ; \quad |G_1(j\omega)| = 2,5 \quad K_I = \frac{\omega}{|G_1(j\omega)|} = 0,3 \text{ s}^{-1} ,$$

$$G_R(p) = K_P \left( 1 + \frac{1}{p T_n} \right) \quad K_P = K_I \cdot T_n \quad G_R(p) = 1,2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{p \cdot 4 \text{ s}} \right) ,$$

Wendetangente:  $T_u = 0,5 \text{ s}$  ;  $T_g = 6 \text{ s}$  ;  $K_S = 2,5$  ,

PI-Regler:  $K_P = 0,34 / K_S \cdot T_g / T_u = 1,6$  ;  $T_n = T_g = 6 \text{ s}$  .

Nach CHR wird die Nachstellzeit etwas größer gewählt, dadurch kann bei etwa gleichem Überschwingen des geschlossenen Kreises der  $K_P$ -Wert des Reglers vergrößert werden, die Ausregelzeit wird kleiner.

Bei I-Regler wird der Übergangsprozeß des geschlossenen Kreises langsamer, bei P-Regler tritt eine bleibende Regeldifferenz auf.

A3.  $T_u = 1,5 \text{ s}$  ;  $T_g = 12,5 \text{ s}$  ;  $K_S = 3,25$  ,

$T_g / T_u = 8,33$   $n = 2$  ;  $T = T_g / 2,72 = 4,6 \text{ s}$  ,

$$G(p) = \frac{3,25}{(1 + 4,6 p)^2} , \quad 21,16 \ddot{v}(t) + 9,2 \dot{v}(t) + v(t) = 3,25 u(t) , \quad \text{P-T}_2$$



$$h(t) = 3,25 \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t}{4,6} \right) e^{-\frac{t}{4,6}} \right]$$

Kennwerte Regelstrecke:

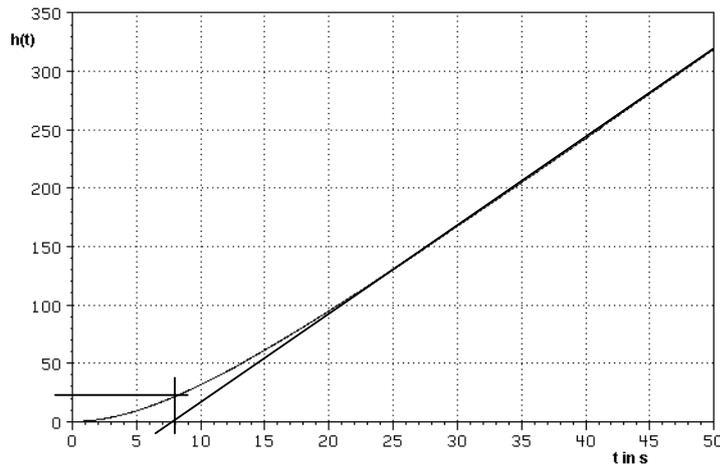
$$K_S = 3,25 ; \quad T_1 = T_2 = 4,6 \text{ s} .$$

Reglertyp: PID-Regler ,

$$K_P = 1,53 ;$$

$$T_n = 12,5 \text{ s} ; \quad T_v = 0,75 \text{ s} .$$

**A4.**



$$K_I = 7,5 \text{ s}^{-1}; T_u = 8 \text{ s}; h_u = 22$$

$$\frac{h_u}{K_I \cdot T_I} = 0,36; n = 1;$$

$$T_I = \frac{T_u}{n} = 8 \text{ s}.$$

$$G(p) = \frac{K_I}{p(1+pT_I)} = \frac{7,5 \text{ s}^{-1}}{p(1+p \cdot 8 \text{ s})}$$

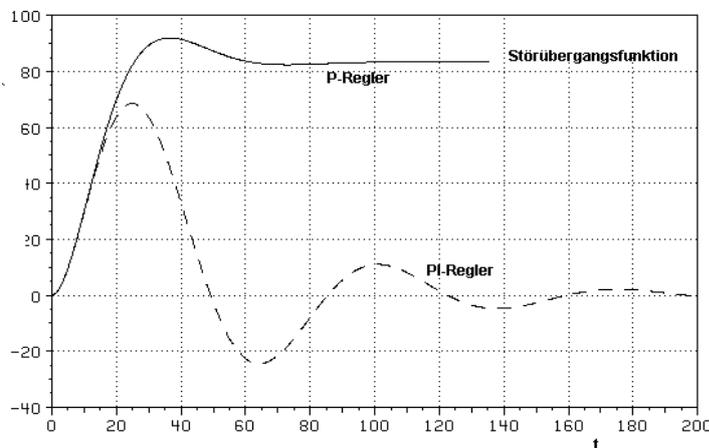
$$h(t) = 7,5 \text{ s}^{-1} \left( 8 \text{ s} \cdot e^{-\frac{t}{8 \text{ s}}} + t - 8 \text{ s} \right)$$

Regelstrecke: I-T<sub>1</sub>-Verhalten,  
Kennwerte: K<sub>I</sub> = 7,5 s<sup>-1</sup>; T<sub>1</sub> = 8 s ,

$$\text{P-Regler: } K_P = \frac{0,71}{K_I \cdot T_u} = 0,012 ,$$

$$\text{PI-Regler: } K_P = \frac{0,71}{K_I \cdot T_u} = 0,012 ,$$

$$T_n = 2,3 \cdot T_u = 18,4 \text{ s}.$$



$$\text{A5. } R = \frac{1}{1 + K_{PR} \cdot K_{Ps}} = 0,33, \quad e_\infty = R \cdot w = 1,66,$$

$$131,7 - 2,34K_{PR} - 4,68 > 0; \quad K_{PR} = 54,3,$$

Bodediagramm: 0,5 = 8 dB;  $\omega_{e1} = 0,13 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_{e2} = 0,83 \text{ s}^{-1}$ ;  $\omega_{e3} = 2 \text{ s}^{-1}$ ,

bei  $\varphi_s = -180^\circ$ ;  $\omega = 1,5 \text{ s}^{-1}$ ;  $|G_1(j\omega)| = -34 \text{ dB}$ ,

$$K_{PR} = \frac{1}{|G_S(j\omega)|} = 50,1.$$

54,3 = 34,7 dB, der Fehler der grafischen Methode von etwa 1 dB (1 mm) resultiert aus der Asymptotennäherung des Frequenzganges.

Bei  $\varphi_s = -120^\circ$ ;  $\omega = 0,48 \text{ s}^{-1}$ ;  $|G_1(j\omega)| = -19 \text{ dB}$ ,

$$K_{PR} = \frac{1}{|G_S(j\omega)|} = 8,9.$$

Ein PI-Regler beseitigt die beträchtliche bleibende Regeldifferenz.

**A6. Momentengleichgewicht:**

$$\ddot{\varphi}_M \cdot \Theta_M + D_M \cdot \dot{\varphi}_M + c_{TM} \cdot \varphi_M + c_{TL} (\varphi_M - \varphi_L) = M_{el}$$

$$\ddot{\varphi}_L \cdot \Theta_L + D_L \cdot \dot{\varphi}_L + c_{TL} (\varphi_L - \varphi_M) = 0$$

$$M_{el} = h_M \cdot I_M$$

Übergang in den Frequenzbereich:

$$p^2 \varphi_M \cdot \Theta_M + D_M \cdot p \varphi_M + c_{TM} \cdot \varphi_M + c_{TL} (\varphi_M - \varphi_L) = h_M \cdot I_M$$

$$p^2 \varphi_L \cdot \Theta_L + D_L \cdot p \varphi_L + c_{TL} (\varphi_L - \varphi_M) = 0$$

$$\frac{\varphi_M}{I_M} = \frac{h_M}{c_{TM}} \cdot \frac{1 + p \frac{D_L}{c_{TL}} + p^2 \frac{\Theta_L}{c_{TL}}}{\left(1 + p \frac{D_M}{c_{TM}} + p^2 \frac{\Theta_M}{c_{TM}}\right) \cdot \left(1 + p \frac{D_L}{c_{TL}} + p^2 \frac{\Theta_L}{c_{TL}}\right) + p \frac{D_L}{c_{TM}} + p^2 \frac{\Theta_L}{c_{TM}}}$$

$$\frac{\varphi_M}{I_M} = 0,5 \cdot \frac{1 + 0,15 \cdot 10^{-3} p + 7 \cdot 10^{-6} p^2}{1 + 1,85 \cdot 10^{-3} p + 82,3 \cdot 10^{-6} p^2 + 2,15 \cdot 10^{-9} p^3 + 35 \cdot 10^{-12} p^4}$$

$$p_1 = -11,2 \quad +j 110 ;$$

$$p_2 = -11,2 \quad -j 110 ;$$

$$p_3 = -19,5 \quad -j 1526 ;$$

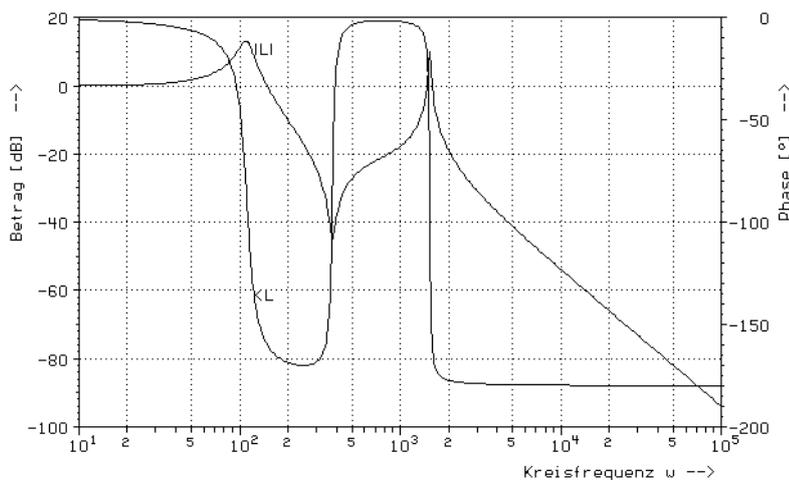
$$p_4 = -19,5 \quad +j 1526 ;$$

$$G_A(p) = \frac{\varphi_M}{I_M} = k \cdot \frac{1}{(1 + 2d_2 T_{02} p + T_{02}^2 p^2)} \cdot \frac{(1 + 2d_1 T_{01} p + T_{01}^2 p^2)}{(1 + 2d_3 T_{03} p + T_{03}^2 p^2)}$$

$$k = 1 \frac{\text{rad}}{\text{A}}, \quad T_{01} = 2,65 \text{ ms}; \quad T_{02} = 9 \text{ ms}; \quad T_{03} = 0,65 \text{ ms};$$

$$d_1 = 0,028; \quad d_2 = 0,1; \quad d_3 = 0,013$$

Bodediagramm:



Es eignet sich nur ein Regler, der im Bereich  $\omega = 10^2 \dots 10^4$  einen Phasengewinn von etwa  $60^\circ$  beiträgt. Ein PID-Regler macht das.

Der technische PID-Regler hat die Übertragungsfunktion

$$G_R(p) = \frac{K_P}{1+pT_1} \left( 1 + \frac{1}{pT_n} + pT_v \right) = \frac{K_P}{1+pT_1} \cdot \frac{1}{pT_n} \cdot (1 + pT_n + p^2T_vT_n).$$

Im Bereich  $4T_v \leq T_n$  hat die quadratische Funktion reelle Wurzeln

$$G_R(p) = \frac{K_P}{1+pT_1} \cdot \frac{1}{pT_n} \cdot (1 + pT_{D1}) \cdot (1 + pT_{D2}); \quad T_D = \frac{T_n}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4T_v}{T_n}} \right).$$

Der Übergang zur positiven Phase des PID-Reglers

$$\omega_{\mp} = \sqrt{\omega_{eD1} \cdot \omega_{eD2}} = \sqrt{\frac{1}{T_{D1} \cdot T_{D2}}} = \sqrt{\frac{1}{T_n \cdot T_v}}$$

muß bei  $\omega < 1000 \text{ s}^{-1}$  sein, da der Kreis sonst instabil wird.

Da im Bereich der Resonanzfrequenzen die Amplitude nicht verstärkt werden soll,

ist das Verhältnis  $\frac{T_{D1}}{T_{D2}} \cong 10$  anzustreben.

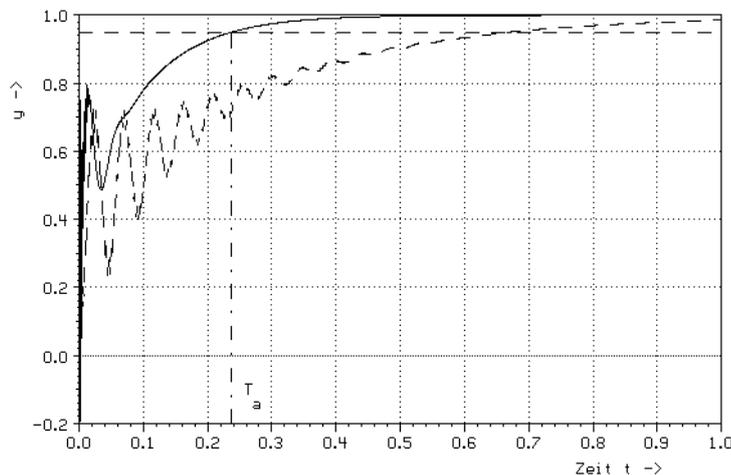
Der  $K_P$ -Wert wird so gewählt, daß die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  bei  $3000 \text{ s}^{-1}$  liegt.

Die Siebzeitkonstante  $T_1$  darf nur sehr klein sein ( $T_1 < 30 \mu\text{s}$ ), damit der Phasengewinn im Bereich der Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  nicht verschlechtert wird.

Ergebnisse der Modellierung ( ohne  $T_1$  ):

Ausgangswerte vor der Optimierung		nach der Optimierung
Verstärkungsfaktor	$K_P$ : 0,6	0,99
Nachstellzeit	$T_n$ : 0,1 s	0,046 s
Vorhaltzeit	$T_v$ : 0,1 ms	3,9 ms

Das Diagramm zeigt das Übergangsverhalten bei Führung vor und nach einer Optimierung.



Die Wahl komplexer Nullstellen zur Kompensation ist nicht zu empfehlen, da in der Praxis stets eine robuste Lösung gefordert wird, d.h. die Unempfindlichkeit des Systems gegenüber Parameterschwankungen. Spezielle Optimierungsergebnisse mit  $4T_v > T_n$  sind deshalb nicht geeignet.

<b>LÖSUNGEN ZUR AUFGABENSAMMLUNG</b>	<b>29</b>
<b>1. GRUNDBEGRIFFE, MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN</b>	<b>29</b>
1.1. <b>Struktur, Wirkungsplan, technologisches Schema</b>	<b>29</b>
1.1.1. Ableiten der mathematischen Gleichungen aus dem Wirkungsplan	29
1.1.2. Darstellung des Wirkungsplanes nach den Gleichungen	30
1.1.3. Modellgleichungen und technologisches Schema	31
1.2. <b>Regelungstechnische Aufgabe, Analyse technischer Systeme</b>	<b>33</b>
1.2.1. Regelung technischer Anordnungen	33
1.2.2. Regelungstechnische Analyse technischer Anordnungen	34
1.3. <b>Linearisierung, Arbeitspunkt</b>	<b>36</b>
1.4. <b>Übertragungsverhalten von Systemen</b>	<b>37</b>
1.4.1. Differentialgleichung	37
1.4.2. Sprungantwort, Übergangsfunktion	38
1.4.3. Laplace-Transformation, Übertragungsfunktion	40
1.4.4. Diskretes Übertragungsverhalten	42
1.4.5. Frequenzganganalyse	43
1.4.6. Übertragungsverhalten von Systemen, Komplexaufgaben	47
<b>2. KENNWERTERMITTLUNG</b>	<b>54</b>
2.1. <b>Kenwertermittlung im Zeitbereich</b>	<b>54</b>
2.2. <b>Kenwertermittlung im Frequenzbereich</b>	<b>56</b>
<b>3. REGELEINRICHTUNGEN UND REGELALGORITHMEN</b>	<b>57</b>
3.1. <b>Zweipunktregler</b>	<b>57</b>
3.2. <b>Stetige Regeleinrichtungen</b>	<b>58</b>
<b>4. ENTWURF UND VERHALTEN EINSCHL. LINEARER REGELKREISE</b>	<b>59</b>
4.1. <b>Übertragungsverhalten des Regelkreises</b>	<b>59</b>
4.2. <b>Stabilität des Regelkreises</b>	<b>61</b>
4.3. <b>Einstellregeln</b>	<b>62</b>