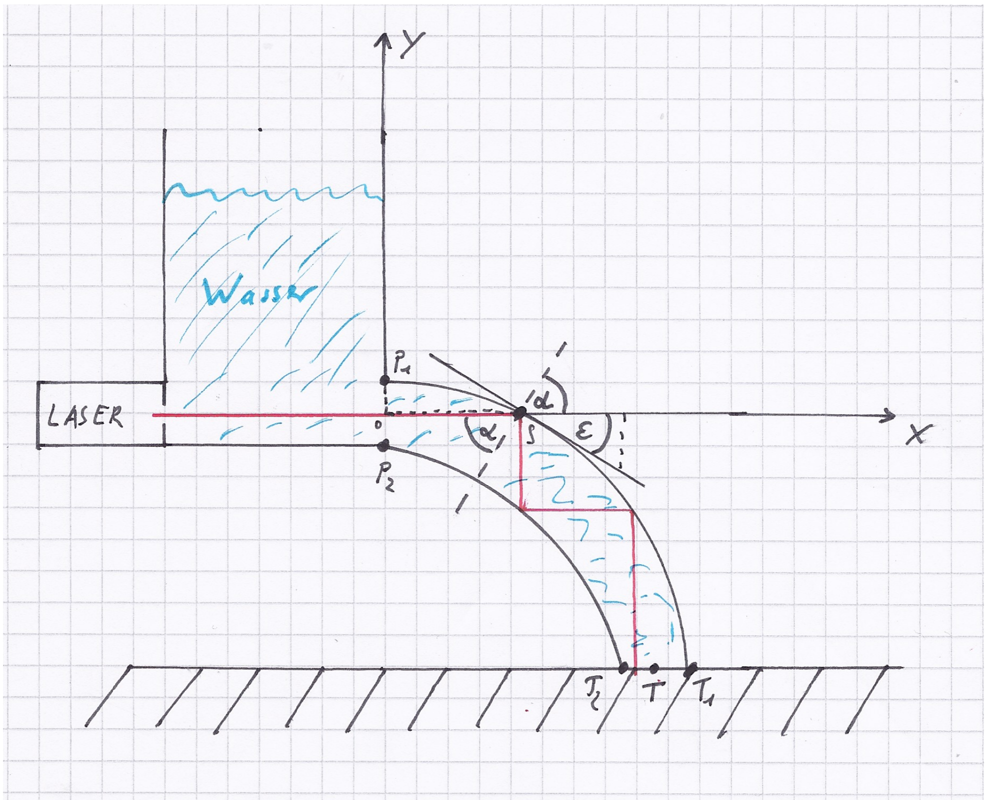
Aufgabe:

Gegeben sei ein Gefäß, welches mit Wasser gefüllt ist und im unteren Bereich ein Loch aufweist. Durch dieses Loch entweicht Wasser, welches einen Wasserstrahl bildet. Durch diesen Wasserstrahl wird ein Laserstrahl geschickt. Der Wasserstrahl muss eine Tiefe von 50 cm überwinden, bevor er auf dem Boden auftrifft. Zu Berechnen sei das Auftreffen bei T(x,-50 cm), die Wurfweite x bei dem der Wasserstrahl auf den Boden auftrifft. Des Weiteren ist nachzuweisen, dass der Laserstrahl mindestens einmal Totalreflexion aufweist. Berechnen Sie dazu den Schnittpunkt zwischen der äußeren Grenze des Wasserstrahles und dem LASER im Punkt S(x,y).



Gegeben:

$P_1\left(0, \frac{1}{2}\ cm\right)$ $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\ cm\right)$ $T\left(x_T, -50cm\right)$ $v_{x0} = 5\ \frac{m}{s}$ $n_{Luft} = 1$ $n_{Wasser} = 1,333$

Gesucht:

a) Auftreffen des Wassers bei $S\,(x_S, y_S)$
b) Wurfweite x_T bei $T\,(x_T, -50\ cm)$
c) Nachweis, dass mindestens einmal Totalreflexion auftritt

Lösung:

a)

$y_S = -\frac{g}{2}t^2 + y_0 \quad x_S = v_{x0} \cdot t$

daraus folgt

$t = \frac{x_S}{v_{x0}} \quad t = \sqrt{\frac{2(y_S - y_0)}{-g}}$

beide Gleichungen gleich gesetzt ergibt die Bewegungsgleichung des Wassers

$$\begin{aligned}
\frac{x_S}{v_{x0}} &= \sqrt{\frac{2\,(y_S - y_0)}{-g}} \\
x_S &= \sqrt{\frac{2 \cdot v_{x0}^2 \cdot (y_S - y_0)}{-g}} \\
x_S &= \sqrt{\frac{2 \cdot \left(5\ \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (0 - 0,5\ cm)}{-9,81\frac{m}{s^2}}} \\
x_S &\approx 0,16\ m
\end{aligned}$$

Der LASER trifft also bei $S\,(0,16m, 0)$ auf den äußeren Bogen des Wasserstrahles.

b)

$$x_T = \sqrt{\frac{2 \cdot v_{x0}^2 \cdot (y_T - y_0)}{-g}}$$

$$x_{T1} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(5\ \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (-50\ cm\ -\ 0,5\ cm)}{-9,81}}$$
$$x_{T1} = 1,60m$$

$$x_{T2} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(5\ \frac{m}{s}\right)^2 \cdot (-50\ cm\ +\ 0,5\ cm)}{-9,81}}$$
$$x_{T2} = 1,59m$$

Der Wasserstrahl trifft mit seinen Grenzen also bei $T_1\,(1,60m, -0,50m)$ und $T_2\,(1,59m, -0,50m)$ auf dem Boden auf.

c) Zunächst ist der Grenzwinkel γ für Totalreflexion zu ermitteln.

$$\sin\gamma = \frac{n_{Luft}}{n_{Wasser}}$$
$$\gamma = \arcsin\left(\frac{n_{Luft}}{n_{Wasser}}\right)$$
$$\gamma = \arcsin\left(\frac{1}{1,333}\right)$$
$$\gamma = 48,61^\circ$$

Zur Berechnung des Winkels ϵ ist es notwendig die Steigung der Tangente im Punkt $S\,(0,16m,0)$, welche den Winkel ϵ mit der x-Achse einschließt, zu ermitteln. Dazu ist die Gleichung aus der Lösung a) nach y_S umzustellen und abzuleiten.

$$\sqrt{\frac{2\,(y_S - y_0)}{-g}} = \frac{x_S}{v_{x0}}$$

$$y_S = y_0 - \frac{x_S^2 \cdot g}{2 \cdot v_{x0}^2}$$

$$y_S = 0,005\ m\ -\ \frac{x_S^2 \cdot 9,81\frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left(5\frac{m}{s}\right)^2}$$

$$y_S = 0,005\ m\ - 0,1926\ \frac{1}{m} \cdot x_S^2$$

$$\frac{dy_S}{dx} = \left[0,005\ m\ - 0,1926\ \frac{1}{m} \cdot x_S^2\right]'$$

$$y_S' = -0,3924 \cdot x_S$$

$$y_S' = -0,3924 \cdot 0,16m$$

$$y_S' = -0,063m$$

Bekannt ist, dass die Steigung dem Tangens entspricht. Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$y_S' = \tan \epsilon$$

$$\epsilon = \arctan y_S'$$

$$\epsilon = \arctan\left(-0,063\right)$$

$$|\epsilon| = 3,6°$$

Aus der Dreiecksbeziehung lässt sich nun der Winkel α ermitteln.

$$\alpha = 90° - |\epsilon|$$

$$\alpha = 90° - 3,6°$$

$$\alpha = 86,4°$$

Auf der Grundlage das der Winkel α größer ist als der Grenzwinkel γ ergibt sich, dass Totalreflexion vorliegt.