EINGEGANGEN 1 4. April 2010
EINGEGANGEN 2 2. April 2010

Fachhochschule Jena, Fachbereich Grundlagenwissenschaften (GW)

PRAKTIKUMSANLEITUNG
VERSUCH TORSION

Bearbeiter : O.R.Hofmann, E. Döpel   Version 21.09.2009

T

Torsionsmodul, Winkelrichtgröße und Massenträgheitsmoment

Prof. Dr. rer. nat. habil. E. Döpel
Prof. Dr.-Ing. habil. O. R. Hofmann
Dipl.-Lehrer B. Kley

gültig für die Studiengänge		
	AT, TI, KMT	im Fachbereich ET/IT
	MB, ME	im Fachbereich MB
	FT, AO, PiUS, WT	im Fachbereich SciTec
	MT, BT	im Fachbereich MT

	Bearbeiter 1	2	3
Name, Vorname	Goldbuch Michael	Döffinger Jürgen	
Matrikel-Nr.	631430	631551	
Studiengang	KMT	KMT	
Prakt-GrNr	17	17	
Datum der Versuchsdurchführung	07. 04. 2010		
Unterschrift	M. G	J. D	
Betreuer	Dipl.-Lehrer B. Kley		
Vortestat Bestätigung der Messwerte	Kl (7.4.10)		
Testat- Protokoll	Z/Kl (19.4.10); A/Kl (29.4.10)		

Fehlerrechnung überprüfen!

Torsion090921

1 Aufgabe des Versuches

Torsionsmodul und Elastizitätsmodul sind wichtige elastische Materialwerte von Festkörpern. Im Gegensatz dazu sind die Federkonstanten einer Blattfeder oder einer Spiralfeder Systemkonstanten. Letztere sind gerätespezifisch und beinhalten neben Materialwerten noch Form und Abmessungen (Geometriewerte) der Feder.
Im Praktikumsversuch soll

- die Winkelrichtgröße (Federkonstante) eines Spiralfederschwingers,
- das Massenträgheitsmoment eines Spiralfederschwingers und
- der Torsionsmodul eines Drahtes aus Kupfer bzw. Stahl bestimmt werden.

2 Grundlagen

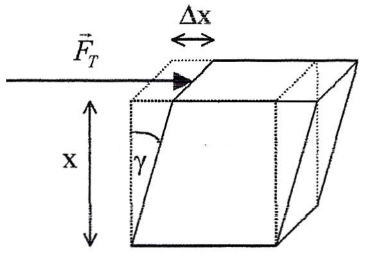
2.1 HOOKEsches Gesetz

Feste Körper erleiden bei Einwirkung äußerer Kräfte Verformungen. Nimmt der Körper nach der Krafteinwirkung seine ursprüngliche Form wieder an, spricht man von elastischer Deformation.
Für elastische Verformungen gilt das HOOKEsche Gesetz, nach dem die relative Verformung $\Delta l / l$ bzw. $\Delta x / x$ der mechanischen Spannung σ bzw. τ proportional ist. σ und τ sind definiert als Kraft pro Flächeneinheit ($\sigma = F_N / A$ bzw. $\tau = F_T / A$). Normalkräfte F_N führen zu Dehnungen bzw. Stauchungen der Länge l um Δl. Der Proportionalitätsfaktor zwischen der Zug- oder Druckspannung σ und der relativen Verformung ist der Elastizitätsmodul E. Das HOOKEsche Gesetz für die Dehnung bzw. Stauchung lautet:

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} \tag{1}$$

Tangentialkräfte F_T bewirken eine Scherung. Darunter versteht man eine Deformation, bei der parallele Schichten durch tangential angreifende Scherkräfte F_T parallel um Δx verschoben werden (Abb. 1).

Abb. 1: Veranschaulichung der Deformation eines Körpers durch Scherkräfte



Für kleine Deformationswinkel γ gilt:

$$\gamma \approx \sin\gamma \approx \tan\gamma = \frac{\Delta x}{x}. \tag{2}$$

Das HOOKEsche Gesetz für den Fall der Scherung und für kleine Scherungswinkel γ lautet:

$$\tau = G \cdot \frac{\Delta x}{x}. \tag{3}$$

Hierbei wurde als Proportionalitätsfaktor zwischen der Schubspannung τ und dem Scherungswinkel $\gamma = \frac{\Delta x}{x}$ die Größe G (Torsions-, Scher- oder Schubmodul) eingeführt. Der Torsionsmodul ist eine Materialkonstante, die die elastischen Eigenschaften eines Stoffes für den Lastfall Scherung beschreibt.

2.2 Drehschwingungen

Ein Drehschwinger ist ein um eine Achse drehbar gelagertes schwingungsfähiges System. Wird der Schwinger durch Drehung um diese Achse um den Winkel $+\varphi$ aus der Gleichgewichtslage entfernt, so tritt ein rücktreibendes Drehmoment M auf. Es ist bei nicht zu großem Drehwinkel φ diesem Winkel proportional. Analog zur rücktreibenden Federkraft $F = -kx$ gilt:

$$M = -D \cdot \varphi . \tag{4}$$

Die für die elastische Aufhängung typische Konstante D heißt Winkelrichtgröße (auch Direktionsmoment bzw. Federkonstante für Torsion).
Zwischen dem an einem Körper angreifenden Drehmoment M und der ihm dadurch erteilten Winkelbeschleunigung α gilt in Analogie zu $F = m \cdot a$ die Beziehung

$$M = J \cdot \alpha . \tag{5}$$

mit der Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$

J ist das Massenträgheitsmoment des Körpers. Unter Vernachlässigung der Dämpfung erhält man aus
(Gl. 4) und (Gl. 5) die Bewegungsgleichung des Pendels

$$\ddot{\varphi} + \frac{D}{J} \cdot \varphi = 0 . \tag{6}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet:

$$\varphi(t) = A\cos(\sqrt{D/J} \cdot t + \delta) \tag{7}$$

mit der Kreisfrequenz der ungedämpften freien Schwingung. $\omega_0 = \sqrt{D/J}$ (8)

Die Schwingungsdauer $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}$ ergibt sich aus $\omega = {}^{2\pi}\!/_{T}$. (9)

Um aus Gl. (9) die Winkelrichtgröße D bestimmen zu können, muss das Massenträgheitsmoment J bekannt sein. Dazu ist eine zweite Messung notwendig. Man erhöht das Massenträgheitsmoment J des Systems um ein bekanntes Massenträgheitsmoment J'. Mittels dieser Anordnung bestimmt man die Schwingungsdauer T_0'.

$$T_0' = 2\pi\sqrt{\frac{J+J'}{D}} \tag{10}$$

Mit (9) und (10) stehen zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Unbekannten D und J zur Verfügung.

2.3 Torsion eines Drahtes

Abb. 2 zeigt einen zylindrischen Draht der Länge l mit dem Radius R, der am oberen Ende fest eingespannt und durch ein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ um den Winkel $\vec{\varphi}$ verdrillt ist.

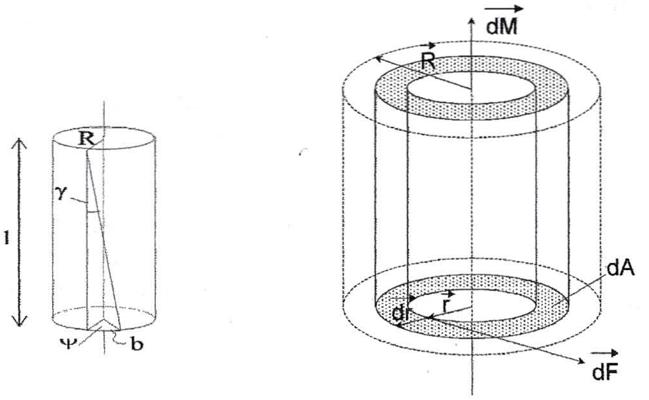


Abb. 2a:
Zusammenhang zwischen Auslenkungswinkel φ und Scherungswinkel γ

Abb. 2b:
differenzielle Zerlegung des Drahtes

Zerlegt man diesen Zylinder in viele hohlzylinderförmige Volumenelemente (Abb. 2b), so lässt sich das Drehmoment, welches ein Volumenelement verdrillt, wie folgt aufschreiben:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \qquad (11)$$

oder, da $\vec{r}$ und $d\vec{F}$ senkrecht aufeinander stehen:

$$dM = r \cdot dF \qquad (11a)$$

Mit $\tau = dF/dA = G \cdot \gamma$ folgt: $dM = r \cdot G \cdot \gamma \cdot dA$ (12)

Für kleine Winkel $\gamma \approx \sin\gamma$ ist $\gamma = b/l$. Der Bogenabschnitt b ergibt sich zu $b = \varphi \cdot r$ (Abb. 2a). Man kann also den Scherungswinkel γ ausdrücken durch:

$$\gamma = \frac{r \cdot \varphi}{l} \qquad (13)$$

Mit $dA = 2\pi r \cdot dr$ (Grundfläche des differentiell kleinen Hohlzylinders) erhält man für das auf ein Volumenelement wirkende Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3 \cdot dr\,. \qquad (14)$$

Eine Integration über alle Volumenelemente führt auf das wirkende Gesamtdrehmoment

$$M = \int_0^R \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3 \cdot dr = \frac{\pi}{2 \cdot l} \cdot G \cdot \varphi \cdot R^4\,. \qquad (15)$$

Diesem äußeren Drehmoment wirkt nach dem dritten NEWTONschen Axiom (Kraft = Gegenkraft) ein gleich-großes rücktreibendes Moment $M_r = D \cdot \varphi$ entgegen. Damit gilt für die Beträge der Drehmomente:

$$M - M_r = 0$$

und wir erhalten für den Materialwert Torsionsmodul $$G = \frac{2l \cdot D}{\pi \cdot R^4}. \qquad (16)$$

In der Bestimmungsgleichung für den Torsionsmodul G (Gl.16) steht noch die unbekannte Größe D. Diese kann mit Hilfe der Schwingungsdauer T_0 des in Drehschwingungen versetzten Drehpendels bestimmt werden (Gl. 9).
Da im Allgemeinen das Massenträgheitsmoment J des Drehpendels nicht bekannt ist, muss es durch eine weitere Messung bestimmt werden. Dazu befestigt man eine zweite zylindrischen Metallscheibe mit bekanntem Massenträgheitsmoment J' an den Torsionsschwinger und bestimmt die Schwingungsdauer T_0' (Gl. 10).

Unter Verwendung der Gleichungen (9), (10) und (16) erhält man eine Bestimmungsgleichung für den Torsionsmodul des Drahtes.

$$G = \frac{8\,\pi\, l}{R^4} \cdot \frac{J'}{T_0'^2 - T_0^2} \qquad (17)$$

2.4 Massenträgheitsmoment und STEINERscher Satz

Das Massenträgheitsmoment eines Körpers bezüglich einer vorgegebenen Achse ist definiert als die über alle Massenelemente dm des Körpers erstreckte Summe

$$J = \int r^2 \cdot dm. \qquad (18)$$

Dabei ist r der (senkrechte) Abstand des Massenelements dm von der Drehachse. Für eine Kreisscheibe der Masse m und des Radiuses r erhält man als Massenträgheitsmoment bezogen auf die <u>polare</u> Schwerpunktachse J_S:

$$J_S = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 \ . \qquad (19)$$

<u>Anmerkung 1:</u> Der Index “s“ soll verdeutlichen, das es sich um das Massenträgheitsmoment J bezogen auf eine Schwerpunktachse des Körpers handelt.

Das Massenträgheitsmoment eines Vollzylinders (Masse m, Radius r, Höhe h) bezogen auf die <u>äquatoriale</u> Schwerpunktachse berechnet sich wie folgt:

$$J_S = \frac{m}{12} \cdot (3r^2 + h^2)\,. \qquad (20)$$

Diese Formel vereinfacht sich für dünne Zylinder (Draht) wegen $h \gg r$ zu

$$J_S = \frac{m}{12} h^2 . \qquad (21)$$

In unserem Versuch ist $h \approx 2r$, so dass dieser Fall nicht zutrifft.

Bei einer Parallelverschiebung der Drehachse aus dem Schwerpunkt vergrößert sich das Massenträgheitsmoment und man benutzt zu seiner Berechnung den STEINERschen Satz. Ist J_S das Massenträgheitsmoment eines Körpers für eine Schwerpunktachse (in bestimmter Orientierung), m die Masse des Körpers und a der Abstand der zum Schwerpunkt parallel verschobenen Drehachse, so berechnet sich das Massenträgheitsmoment dieser Anordnung nach:

(STEINERscher Satz) $$J = J_s + m \cdot a^2 . \tag{22}$$

Anmerkung 2: Bei der im Versuchsteil "Spiralfederschwinger" verwendeten hantelförmigen Anordnung berechnet sich das zusätzliche Massenträgheitsmoment J' beider Zylinder als Summe ihrer Massenträgheitsmomente unter Beachtung ihrer Anordnung auf dem Stab. Sie haben sie die gleichen Abmessungen und Massen. Ordnet man sie außerdem im gleichen Abstand zur Achse an, erhält man J' der beiden Zusatzzylinder, wenn man in die Formeln (20) und (22) die Gesamtmasse $m = m_1 + m_2$ einsetzt

$$J' = J_S + ma^2 = m\left(\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{4}r^2 + a^2\right). \tag{23}$$

3 Versuchsbeschreibung

3.1 Spiralfederschwinger

Der Spiralfederschwinger besteht aus einem drehbar gelagerten Metallstab und einer Spiralfeder. Die Spiralfeder bewirkt die rücktreibende Kraft. Die Drehachse geht durch den Schwerpunkt des Stabes. Auf diesen können zur Veränderung des Massenträgheitsmomentes zusätzlich Metallzylinder angebracht werden. Die Schwingungsdauer T_0 des Spiralfederschwingers (nur Metallstab) ist dreimal zu messen und zu mitteln. Um eine entsprechende Genauigkeit zu erreichen, soll dieser Wert aus der Dauer von jeweils 10 Schwingungen ermittelt werden. Die maximale Auslenkung des Drehpendels soll eine halbe Umdrehung nicht übersteigen.
Diese Messung wird mit zwei zusätzlich auf dem Stab angebrachten Zylinderstücken wiederholt. Die zusätzlichen Massen erhöhen das ursprüngliche Massenträgheitsmoment J des Spiralfederschwingers um J'. Dies bewirkt eine Veränderung der Schwingungsdauer. Man bestimme T_0' analog. Um Gleichung (23) verwenden zu können, sollen die beiden Zylinder im gleichen Abstand a zur Achse angeordnet werden. Die Abmessungen, Abstände und die Masse sind jeweils nur einmal zu bestimmen. Der Ablesefehler soll geschätzt werden.
Unter Verwendung von T_0 und T_0' lassen sich die Winkelrichtgröße D und das Massenträgheitsmoment J des Spiralfederschwingers bestimmen.

3.2 Torsionsdraht – Drehpendel

Der Versuchsaufbau besteht aus einem Draht und einer an ihm angebrachten Metallscheibe, an die eine weitere Metallscheibe angeschraubt werden kann.
Die Schwingungsdauer des Drehpendels T_0 ist zehnmal aus je 20 Schwingungen zu ermitteln und anschließend zu mitteln. Um plastische Verformungen zu vermeiden, sind (insbesondere beim Kupferdraht) nur kleine Auslenkwinkel $\varphi < 30°$ zugelassen. Diese Messungen sind mit der angeschraubten Zusatzscheibe, die das Massenträgheitsmoment vergrößert, zu wiederholen. Man erhält T_0'. Da bei der Bestimmung der Länge und des Durchmessers des Drahtes sowie der Abmessungen und der Masse der Zusatzscheibe wiederum der Ablesefehler domi-

niert, würde man bei mehrmaliger Messung keine großen statistischen Schwankungen registrieren. Deshalb genügt eine Messung. Der Ablesefehler soll wiederum geschätzt werden.
Aus den Gleichungen für die Schwingungsdauer des Drehpendels bzw. Drehpendels mit Zusatzscheibe lässt sich der Torsionsmodul G bestimmen.

4 Messaufgaben, Protokoll der Messwerte, Ermittlung der Messfehler

Folgende Größen sind zu messen:

m_z	Masse beider Zylinder	m_s	Masse der Zusatzscheibe
d_z	Zylinderdurchmesser	$d_s = 2r_s$	Durchmesser der Kreisscheibe
h_z	Zylinderhöhe	a	Abstand Zylinderschwerpunktachse – Drehachse
L	Länge des Drahtes	$2R$	Durchmesser des Drahtes
T_0	Schwingungsdauer ohne Metallzylinder/ Zusatzscheibe		
T_0'	Schwingungsdauer mit Metallzylinder/ Zusatzscheibe		

4.1 Versuch Spiralfederschwinger

Der inhaltliche Schwerpunkt dieses Versuchsteiles liegt in der Behandlung des Begriffes Massenträgheitsmoment.

1) Leiten Sie Formeln zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D und des Massenträgheitsmomentes J ab. Lösen Sie dazu die Gleichungen (9) und (10) nach diesen gesuchten Größen auf.

aus (9) $D = \frac{4\pi^2}{T_0^2} J$; $J = \frac{T_0^2 D}{4\pi^2}$

aus (10) $D = \frac{4\pi^2}{T_0'^2}(J + J')$; $J = \frac{T_0'^2 D}{4\pi^2} - J'$

$D = D(J')$?

2) Ermitteln Sie das Massenträgheitsmoment J' der beiden Zylinderstücke (als dicke Vollzylinder) unter Beachtung ihrer Anordnung auf dem Stab.

Geben Sie die Messwerte zur Berechnung von J' nach Gleichung (23) an

	Massen beide Zyl. m_z	Zyl.durchmesser d_z	Zyl.höhe h_z	Abstand a
Messwerte	467,14 g	3,52 cm	3,27 cm	25,5 cm
geschätzter Fehler	± 0,05 g	± 0,01 cm	± 0,01 cm	0,2 cm

Berechnung von J'(2 Zyl)
Die verwendete Formel soll nur direkt gemessene Größen enthalten.

verwendete Formel	Wert
$J' = m\left(\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{16}d^2 + a^2\right)$	$J' = 30{,}454 \cdot 10^{-3}$ kg m²

Anz. Stellen ?

3) Bestimmen Sie die Winkelrichtgröße D des Federschwingers und das Massenträgheitsmoment J der Anordnung ohne Zylinderstücke.

Ermitteln Sie die Periodendauern T_0 und T_0' durch dreimalige Messung der Zeit für 10 Schwingungsperioden und bilden Sie die Mittelwerte

Messung	$10T_0$	$10T_0'$	T_0	T_0'
1	25,42 s	69,84 s	2,54 s	6,98 s
2	25,44 s	71,38 s	2,54 s	7,14 s
3	25,30 s	70,45 s	2,53 s	7,05 s
		Mittelwerte	2,54 s	7,06 s

Berechnen Sie die Winkelrichtgröße D und das Massenträgheitsmoment J des Federschwingers ohne Zusatzmasse. Die verwendeten Formeln sollen nur noch direkt gemessene Größen enthalten.

verwendete Formel	Wert
$D = \frac{J' \, 4\pi^2}{T_0'^2 - T_0^2} = \frac{4m\left(\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{16}d^2 + a^2\right)\pi^2}{T_0'^2 - T_0^2}$	$D = 27{,}7 \cdot 10^{-3}$ Nm
$J = m\left(\frac{1}{12}h^2 + \frac{1}{16}d^2 + a^2\right) \cdot \frac{T_0^2}{T_0'^2 - T_0^2}$	$J = 4{,}53 \cdot 10^{-3}$ kg m²

4) Vergleichen Sie, welchen Anteil der Steinersche Term J_a und das Massenträgheitsmoment bei Rotation um die Schwerpunktachse J_S am gesamten Massenträgheitsmoment J' der beiden Zusatzzylinder haben!

	Formel	Wert	% - Anteil
vollständig	J' Gleichung (23)	$30{,}454 \cdot 10^{-3}$ kgm²	100
Steinerscher Term (Zylinder als Punktmasse)	$J_a = ma^2$	$30{,}376 \cdot 10^{-3}$ kgm²	99,744 %
dicker Zylinder rotiert um SP-Achse	$J_S = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right)$	$1{,}106 \cdot 10^{-3}$ kgm²	3,632 %

Diskutieren Sie diese Ergebnisse.
Die Zusatzmassen sind eigentlich Hohlzylinder. Begründen Sie qualitativ, warum man keinen großen Fehler begeht, wenn man bei der Auswertung Vollzylinder annimmt.

Es wird kein großer Fehler begangen, da, wie man durch die Rechnung auf Seite 8 Nr. 4) sieht, der Steinersche Anteil sehr groß ist. Der Innenradius ist klein im Vergleich zum Außenradius. ⇒ Formel Hohlzylinder (dickwandig): Aus $\frac{1}{2} m (r_i^2 + r_a^2)$ wird hierdurch annähernd $\frac{1}{2} m r_a^2$. Und somit wird es ähnliche Werte annehmen wie bei einem Vollzylinder ($\frac{1}{2} m r^2$).

4.2 Versuch Torsionsdraht

Der inhaltliche Schwerpunkt dieses Versuchsteiles liegt in der zerstörungsfreien Bestimmung eines Materialwertes. Weiterhin sollen die Fehler der einzelnen verwendeten Messmittel abgeschätzt und ihre Bedeutung für das Endergebnis durch Größtfehlerabschätzung ermittelt werden.

1) Bestimmung des Massenträgheitsmomentes J_s des Zusatzkörpers nach Gl. (19).

	Wert	geschätzter Fehler absolut	geschätzter Fehler relativ
Masse des Zusatzkörpers m_s	669.0 g	± 0,1 g	± 0,02 %
∅ des Zusatzkörpers d_s	7 cm	± 0,01 cm	± 0,15 %
J_s der Zusatzscheibe	$40,98 \cdot 10^{-5}$ kg m²	$\pm 6,97 \cdot 10^{-3}$ kg m²	± 0,17 %

2) Ermitteln Sie den Torsionsmodul G und die Winkelrichtgröße D

Messwerte für den Torsionsdraht

Material: Stahl	Wert	geschätzter Fehler absolut	geschätzter Fehler relativ
Länge des Torsionsdrahtes L	1041 mm	± 1 mm	± 0,10 %
∅ des Drahtes $2R$	0,22 cm	± 0,01 cm	± 4,55 %
Radius des Drahtes R	0,11 cm	± 0,005 cm	

Ermitteln Sie die Periodendauern T_0 und T_0' durch zehnmalige Messung der Zeit 20 Schwingungsperioden, bilden Sie die Mittelwerte $\bar{T}_0$ bzw. $\bar{T}_0'$ und berechnen Sie die mittleren Fehler der Mittelwerte ΔT_0 bzw. $\Delta T_0'$.

	$20T_0/s$	T_0/s	$T_0-\bar{T}_0$	$(T_0-\bar{T}_0)^2$	$20T_0'/s$	T_0'/s	$T_0'-\bar{T}_0'$	$(T_0'-\bar{T}_0')^2$
1	15,25	0,76	+0,00	0,0000	17,22	0,86	0,00	0,0000
2	15,33	0,77	0,0~~0~~1	0,000~~0~~1	17,29	0,87	0,01	0,0001
3	15,34	0,77	0,0~~0~~1	0,000~~0~~1	17,32	0,87	0,01	0,0001
4	15,24	0,76	+0,00	0,0000	17,26	0,86	0,00	0,0000
5	15,28	0,76	+0,00	0,0000	17,24	0,86	0,00	0,0000
6	15,19	0,76	+0,00	0,0000	17,27	0,86	0,00	0,0000
7	15,20	0,76	0,00	0,0000	17,27	0,86	0,00	0,0000
8	15,20	0,76	0,00	0,0000	17,27	0,86	0,00	0,0000
9	15,33	0,77	0,0~~0~~1	0,000~~0~~1	17,23	0,86	0,00	0,0000
10	15,31	0,77	0,0~~0~~1	0,000~~0~~1	17,24	0,86	0,00	0,0000
	Summe	7,64	Summe	0,0006	Summe	8,62	Summe	0,0002
	$\bar{T}_0$	0,76	Fehler ΔT_0	0,0026 s	$\bar{T}_0'$	0,86	Fehler $\Delta T_0'$	0,0015 s
			Fehler $\frac{\Delta T_0}{T_0}$	0,0034			Fehler $\frac{\Delta T_0'}{T_0'}$	0,0017

Berechnung des Torsionsmoduls und der Winkelrichtgröße des Drahtes. Schreiben Sie die Formeln so auf, dass darin nur direkt gemessene Größen auftauchen.

Formel	berechnete Werte
$D = \frac{\pi^2 d^2 m}{2(T_0'^2 - T_0^2)}$	$D = 99{,}86 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Nm}$
$G = \frac{\pi l m d^2}{R^4 (T_0'^2 - T_0^2)}$	$G = 4{,}52 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N}$

zu klein

5 Fehlerfortpflanzung zum Versuchsteil Torsionsdraht

Im Versuch Kugelfall wird der Fehler der Ergebnisgröße Viskosität über das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet. Voraussetzung hierfür ist, dass die statistischen Fehler der Messgrößen wesentlich bedeutsamer sind als die systematischen und die Messgrößen nicht korreliert sind.

Im Versuch Torsionsmodul wird der Fehler der Ergebnisgröße Torsionsmodul mit Hilfe der Größtfehlerabschätzung ermittelt. Das Verfahren ist dann anzuwenden, wenn vermutet wird, dass systematische Fehler und Gerätefehler von Bedeutung sind.

Berechne den <u>absoluten</u> Größtfehler von G nach

$$|\Delta G| = \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial m_s}\Delta m_s\right|}_{=\Delta G|m_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial r_s}\Delta r_s\right|}_{=\Delta G|r_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial L}\Delta L\right|}_{=\Delta G|L} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R\right|}_{=\Delta G|R} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0}\Delta T_0\right|}_{=\Delta G|T_0} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0'}\Delta T_0'\right|}_{=\Delta G|T_0'}.$$

Jeder Term $\Delta G|_x$ gibt den Beitrag des absoluten Fehlers $|\Delta x|$ der Messgröße x zum absoluten Gesamtfehler $|\Delta G|$ an.

Mess-größe	Ableitungen (Formel und Zahlenwert)	abs. Fehler der Messgrößen	Beitrag zum Gesamtfehler
m_s	$\frac{\partial G}{\partial m_s} = \frac{4\pi l r^2}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 6{,}76 \cdot 10^{10} \frac{1}{ms^2}$	$\Delta m_s =$ $\pm 0{,}1\,g$	$\Delta G\|_{m_s} = 6{,}76 \cdot 10^6 \frac{kg}{ms^2}$
r_s	$\frac{\partial G}{\partial r_s} = \frac{8\pi l r m}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 2{,}58 \cdot 10^{12} \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta r_s =$ $\pm 0{,}01\,cm$	$\Delta G\|_{r_s} = 2{,}58 \cdot 10^8 \frac{kg}{ms^2}$
L $= l$	$\frac{\partial G}{\partial L} = \frac{\partial G}{\partial l} = \frac{4\pi r^2 m}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 4{,}34 \cdot 10^{10} \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta l =$ $\pm 1\,mm$	$\Delta G\|_l = 4{,}34 \cdot 10^7 \frac{kg}{ms^2}$
R	$\frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{16\pi l r^2 m}{R^5(T_0'^2 - T_0^2)} = -1{,}64 \cdot 10^{12} \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta R =$ $\pm 0{,}005\,cm$	$\Delta G\|_R = 8{,}2 \cdot 10^7 \frac{kg}{ms^2}$
T_0	$\frac{\partial G}{\partial T_0} = \frac{8\pi l r^2 m T_0}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)^2} = 4{,}24 \cdot 10^9 \frac{kg}{ms^3}$	$\Delta T_0 =$ $\pm 0{,}0026\,s$	$\Delta G\|_{T_0} = 1{,}1 \cdot 10^7 \frac{kg}{ms^2}$
T_0'	$\frac{\partial G}{\partial T_0'} = -\frac{8\pi l r^2 m T_0'}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)^2} = -4{,}8 \cdot 10^9 \frac{kg}{ms^3}$	$\Delta T_0' =$ $\pm 0{,}0015\,s$	$\Delta G\|_{T_0'} = 7{,}2 \cdot 10^6 \frac{kg}{ms^2}$
		Gesamtfehler $\Delta G =$	$4{,}09 \cdot 10^8 \frac{kg}{ms^2}$

geänderte Größen auf dem letzten Blatt

Berechne den <u>relativen</u> Größtfehler von G nach

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| = \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial m_s}\Delta m_s\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial r_s}\Delta r_s\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial L}\Delta L\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial T_0}\Delta T_0\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial T_0'}\Delta T_0'\right|$$

$$= \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial m_s}\frac{m_s}{G}\right|\left|\frac{\Delta m_s}{m_s}\right|}_{=\Delta G/G|m_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial r_s}\frac{r_s}{G}\right|\left|\frac{\Delta r_s}{r_s}\right|}_{=\Delta G/G|r_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial L}\frac{L}{G}\right|\left|\frac{\Delta L}{L}\right|}_{=\Delta G/G|L} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial R}\frac{R}{G}\right|\left|\frac{\Delta R}{R}\right|}_{=\Delta G/G|R} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G}\right|\left|\frac{\Delta T_0}{T_0}\right|}_{=\Delta G/G|T_0} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0'}\frac{T_0'}{G}\right|\left|\frac{\Delta T_0'}{T_0'}\right|}_{=\Delta G/G|T_0'}$$

Jeder Term $\left.\dfrac{\Delta G}{G}\right|_x$ gibt den Beitrag $\left|\dfrac{\Delta x}{x}\right|$ des relativen Fehlers der Messgröße x zum relativen Gesamtfehler $\left|\dfrac{\Delta G}{G}\right|$ an. Vereinfachen Sie die Formel so weit wie möglich.

An einem Beispiel soll erläutert werden, wie Tabelle (unten) auszufüllen ist. Hier ausgeführte Nebenrechnungen passen nicht in die Tabelle und sollen weggelassen werden.
Ausgehend von der Formel (17)

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J'}{T_0'^2 - T_0^2}$$

bilden wir zunächst die Ableitung

$$\frac{\partial G}{\partial T_0} = \frac{8\pi l \cdot J'}{R^4} \cdot \frac{(-1)(-2T_0)}{\left(T_0'^2 - T_0^2\right)^2}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit T_0 / G und beachtet obige Formel (17), so erhält man schließlich

$$\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G} = 2\frac{8\pi l \cdot J'}{R^4} \cdot \frac{(T_0)^2}{\left(T_0'^2 - T_0^2\right)^2} \frac{R^4\left(T_0'^2 - T_0^2\right)}{8\pi l \cdot J'}$$

$$= 2\frac{T_0^2}{T_0'^2 - T_0^2}$$

Mess-größe	Ableitungen (Formel und Zahlenwert)	rel. Fehler der Messgrößen	Beitrag zum Gesamtfehler
m_s	$\left\|\frac{\partial G}{\partial m_s}\frac{m_s}{G}\right\| = 1$	$\left\|\frac{\Delta m_s}{m_s}\right\| = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{m_s} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$
r_s	$\left\|\frac{\partial G}{\partial r_s}\frac{r_s}{G}\right\| = 2$	$\left\|\frac{\Delta r_s}{r_s}\right\| = 1{,}43 \cdot 10^{-3}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{r_s} = 2{,}86 \cdot 10^{-3}$
L $= l$	$\left\|\frac{\partial G}{\partial L}\frac{L}{G}\right\| = \left\|\frac{\partial G}{\partial l}\frac{l}{G}\right\| = 1$	$\left\|\frac{\Delta l}{l}\right\| = 9{,}61 \cdot 10^{-4}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{l} = 9{,}61 \cdot 10^{-4}$
R	$\left\|\frac{\partial G}{\partial R}\frac{R}{G}\right\| = 4$	$\left\|\frac{\Delta R}{R}\right\| = 0{,}05$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{R} = 0.2$
T_0 (Beispiel siehe oben)	$\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G} = 2\frac{T_0^2}{T_0'^2 - T_0^2} = 7{,}14$	$\left\|\frac{\Delta T_0}{T_0}\right\| = 0{,}0034$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{T_0} = 0{,}025$
T_0'	$\left\|\frac{\partial G}{\partial T_0'}\frac{T_0'}{G}\right\| = 2\frac{T_0'^2}{T_0'^2 - T_0^2} = 9{,}14$	$\left\|\frac{\Delta T_0'}{T_0'}\right\| = 0{,}0018$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\|_{T_0'} = 0{,}017$
		Gesamtfehler $\left\|\frac{\Delta G}{G}\right\| =$	$0{,}25$

geänderte Größe auf dem letzten Blatt

vorher: $\frac{\Delta G}{G} = \frac{4{,}09 \cdot 10^{8}}{4{,}52 \cdot 10^{10}}$ 2

6 Kolloquiumsschwerpunkte

NEWTONsche Axiome
HOOKEsches Gesetz, elastische Konstanten
Kinematik der Drehbewegung,
Drehmoment, Drehschwingung,
Differenzialgleichung der ungedämpften harmonischen Schwingung,
Massenträgheitsmoment, STEINERscher Satz
Fehlerrechnung

7 Literatur

Jodl, Becker: Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure, VDI-Verlag, Düsseldorf 1991

Ilberg, W. u.a.: Physikalisches Praktikum, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig 1994, 1998, 2001

Stroppe, H.: Physik für Studenten der Natur- und Technikwissenschaften, 9. Auflage, Fachbuchverlag Leipzig - Köln 1992

Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, 9. Auflage Springerverlag, Berlin, 2004

E. Döpel, O. R. Hofmann, B. Kley: Vorlesung Physik 1 an der FH Jena

5 Fehlerfortpflanzung zum Versuchsteil Torsionsdraht

Im Versuch Kugelfall wird der Fehler der Ergebnisgröße Viskosität über das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet. Voraussetzung hierfür ist, dass die statistischen Fehler der Messgrößen wesentlich bedeutsamer sind als die systematischen und die Messgrößen nicht korreliert sind.
Im Versuch Torsionsmodul wird der Fehler der Ergebnisgröße Torsionsmodul mit Hilfe der Größtfehlerabschätzung ermittelt. Das Verfahren ist dann anzuwenden, wenn vermutet wird, dass systematische Fehler und Gerätefehler von Bedeutung sind.
Berechne den <u>absoluten</u> Größtfehler von G nach

$$|\Delta G| = \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial m_s}\Delta m_s\right|}_{=\Delta G|m_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial r_s}\Delta r_s\right|}_{=\Delta G|r_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial L}\Delta L\right|}_{=\Delta G|L} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R\right|}_{=\Delta G|R} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0}\Delta T_0\right|}_{=\Delta G|T_0} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0'}\Delta T_0'\right|}_{=\Delta G|T_0'}.$$

Jeder Term $\Delta G|_x$ gibt den Beitrag des absoluten Fehlers $|\Delta x|$ der Messgröße x zum absoluten Gesamtfehler $|\Delta G|$ an.

Messgröße	Ableitungen (Formel und Zahlenwert)	abs. Fehler der Messgrößen	Beitrag zum Gesamtfehler
m_s	$\frac{\partial G}{\partial m_s} = \frac{4\pi l r^2}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 6{,}76 \cdot 10^{10}\ \frac{1}{m s^2}$	$\Delta m_s = \pm 0{,}1\ g$	$\Delta G\|_{m_s} = 6{,}76 \cdot 10^{6}\ \frac{kg}{m s^2}$
r_s	$\frac{\partial G}{\partial r_s} = \frac{8\pi l r m}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 2{,}58 \cdot 10^{12}\ \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta r_s = \pm 0{,}01\ cm$	$\Delta G\|_{r_s} = 2{,}58 \cdot 10^{8}\ \frac{kg}{m s^2}$
L = l	$\frac{\partial G}{\partial L} = \frac{4\pi r^2 m}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = 4{,}34 \cdot 10^{10}\ \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta L = \pm 1\ mm$	$\Delta G\|_{L} = 4{,}34 \cdot 10^{7}\ \frac{kg}{m s^2}$
R	$\frac{\partial G}{\partial R} = -\frac{16\pi l r^2 m}{R^5(T_0'^2 - T_0^2)} = -1{,}64 \cdot 10^{14}\ \frac{kg}{m^2 s^2}$	$\Delta R = \pm 0{,}005\ cm$	$\Delta G\|_{R} = 8{,}2 \cdot 10^{9}\ \frac{kg}{m s^2}$
T_0	$\frac{\partial G}{\partial T_0} = \frac{8\pi l r^2 m T_0}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)^2} = 4{,}24 \cdot 10^{11}\ \frac{kg}{m s^3}$	$\Delta T_0 = \pm 0{,}0026\ s$	$\Delta G\|_{T_0} = 1{,}1 \cdot 10^{9}\ \frac{kg}{m s^2}$
T_0'	$\frac{\partial G}{\partial T_0'} = -\frac{8\pi l r^2 m T_0'}{R^4(T_0'^2 - T_0^2)} = -4{,}80 \cdot 10^{11}\ \frac{kg}{m s^3}$	$\Delta T_0' = \pm 0{,}0015\ s$	$\Delta G\|_{T_0'} = 7{,}2 \cdot 10^{8}\ \frac{kg}{m s^2}$
		Gesamtfehler $\Delta G =$	$1{,}03 \cdot 10^{10}\ \frac{kg}{m s^2}$

Berechne den <u>relativen</u> Größtfehler von G nach

$$\left|\frac{\Delta G}{G}\right| = \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial m_s}\Delta m_s\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial r_s}\Delta r_s\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial L}\Delta L\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial R}\Delta R\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial T_0}\Delta T_0\right| + \left|\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial G}{\partial T_0'}\Delta T_0'\right|$$

$$= \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial m_s}\frac{m_s}{G}\right|\left|\frac{\Delta m_s}{m_s}\right|}_{=\Delta G/G|m_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial r_s}\frac{r_s}{G}\right|\left|\frac{\Delta r_s}{r_s}\right|}_{=\Delta G/G|r_s} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial L}\frac{L}{G}\right|\left|\frac{\Delta L}{L}\right|}_{=\Delta G/G|L} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial R}\frac{R}{G}\right|\left|\frac{\Delta R}{R}\right|}_{=\Delta G/G|R} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G}\right|\left|\frac{\Delta T_0}{T_0}\right|}_{=\Delta G/G|T_0} + \underbrace{\left|\frac{\partial G}{\partial T_0'}\frac{T_0'}{G}\right|\left|\frac{\Delta T_0'}{T_0'}\right|}_{=\Delta G/G|T_0'}$$

Jeder Term $\left.\frac{\Delta G}{G}\right|_x$ gibt den Beitrag $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ des relativen Fehlers der Messgröße x zum relativen Gesamtfehler $\left|\frac{\Delta G}{G}\right|$ an. Vereinfachen Sie die Formel so weit wie möglich.

An einem Beispiel soll erläutert werden, wie Tabelle (unten) auszufüllen ist. Hier ausgeführte Nebenrechnungen passen nicht in die Tabelle und sollen weggelassen werden.
Ausgehend von der Formel (17)

$$G = \frac{8\pi l}{R^4} \cdot \frac{J'}{T_0'^2 - T_0^2}$$

bilden wir zunächst die Ableitung

$$\frac{\partial G}{\partial T_0} = \frac{8\pi l \cdot J'}{R^4} \cdot \frac{(-1)(-2T_0)}{\left(T_0'^2 - T_0^2\right)^2}.$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit T_0 / G und beachtet obige Formel (17), so erhält man schließlich

$$\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G} = 2\frac{8\pi l \cdot J'}{R^4} \cdot \frac{(T_0)^2}{\left(T_0'^2 - T_0^2\right)^2} \frac{R^4\left(T_0'^2 - T_0^2\right)}{8\pi l \cdot J'}$$

$$= 2\frac{T_0^2}{T_0'^2 - T_0^2}$$

Mess-größe	Ableitungen (Formel und Zahlenwert)	rel. Fehler der Messgrößen	Beitrag zum Gesamtfehler
m_s	$\left\lvert\frac{\partial G}{\partial m_s}\frac{m_s}{G}\right\rvert = 1$	$\left\lvert\frac{\Delta m_s}{m_s}\right\rvert = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{m_s} = 1{,}5 \cdot 10^{-4}$
r_s	$\left\lvert\frac{\partial G}{\partial r_s}\frac{r_s}{G}\right\rvert = 2$	$\left\lvert\frac{\Delta r_s}{r_s}\right\rvert = 2{,}86 \cdot 10^{-3}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{r_s} = 5{,}72 \cdot 10^{-3}$
L $= l$	$\left\lvert\frac{\partial G}{\partial L}\frac{L}{G}\right\rvert = 1$	$\left\lvert\frac{\Delta l}{l}\right\rvert = 3{,}61 \cdot 10^{-4}$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{l} = 3{,}61 \cdot 10^{-4}$
R	$\left\lvert\frac{\partial G}{\partial R}\frac{R}{G}\right\rvert = 4$	$\left\lvert\frac{\Delta R}{R}\right\rvert = 0{,}05$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{R} = 0{,}2$
T_0 (Beispiel siehe oben)	$\frac{\partial G}{\partial T_0}\frac{T_0}{G} = 2\frac{T_0^2}{T_0'^2 - T_0^2} = 7{,}14$	$\left\lvert\frac{\Delta T_0}{T_0}\right\rvert = 0{,}0034$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{T_0} = 0{,}025$
T_0'	$\left\lvert\frac{\partial G}{\partial T_0'}\frac{T_0'}{G}\right\rvert = 2\frac{T_0'^2}{T_0'^2 - T_0^2} = 9{,}14$	$\left\lvert\frac{\Delta T_0'}{T_0'}\right\rvert = 0{,}0018$	$\left.\frac{\Delta G}{G}\right\rvert_{T_0'} = 0{,}017$
		Gesamtfehler $\left\lvert\frac{\Delta G}{G}\right\rvert =$	$0{,}2488$