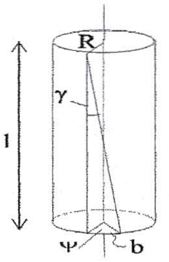
2.3 Torsion eines Drahtes

Abb. 2 zeigt einen zylindrischen Draht der Länge l mit dem Radius R, der am oberen Ende fest eingespannt und durch ein äußeres Drehmoment $\vec{M}$ um den Winkel $\vec{\varphi}$ verdrillt ist.



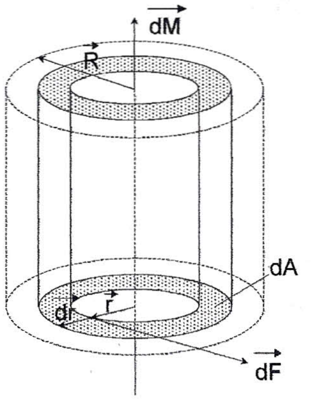


Abb. 2a: Zusammenhang zwischen Auslenkungswinkel φ und Scherungswinkel γ

Abb. 2b: differenzielle Zerlegung des Drahtes

Zerlegt man diesen Zylinder in viele hohlzylinderförmige Volumenelemente (Abb. 2b), so lässt sich das Drehmoment, welches ein Volumenelement verdrillt, wie folgt aufschreiben:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F} \tag{11}$$

oder, da $\vec{r}$ und $d\vec{F}$ senkrecht aufeinander stehen:

$$dM = r \cdot dF \tag{11a}$$

Mit $\quad \tau = dF/dA = G \cdot \gamma \quad$ folgt: $\quad dM = r \cdot G \cdot \gamma \cdot dA \qquad (12)$

Für kleine Winkel $\gamma \approx \sin\gamma$ ist $\gamma = b/l$. Der Bogenabschnitt b ergibt sich zu $b = \varphi \cdot r$ (Abb. 2a). Man kann also den Scherungswinkel γ ausdrücken durch:

$$\gamma = \frac{r \cdot \varphi}{l} \tag{13}$$

Mit $dA = 2\pi r \cdot dr$ (Grundfläche des differentiell kleinen Hohlzylinders) erhält man für das auf ein Volumenelement wirkende Drehmoment

$$dM = \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3 \cdot dr\,. \tag{14}$$

Eine Integration über alle Volumenelemente führt auf das wirkende Gesamtdrehmoment

$$M = \int_0^R \frac{2\pi}{l} \cdot G \cdot \varphi \cdot r^3 \cdot dr = \frac{\pi}{2 \cdot l} \cdot G \cdot \varphi \cdot R^4\,. \tag{15}$$

Diesem äußeren Drehmoment wirkt nach dem dritten NEWTONschen Axiom (Kraft = Gegenkraft) ein gleich-großes rücktreibendes Moment $M_r = D \cdot \varphi$ entgegen. Damit gilt für die Beträge der Drehmomente: