## 4. Ergänzungen

### 4.1. Vertiefende Fragen

Welche technischen Möglichkeiten zur kräftefreien Lagerung beliebig geformter Kreisel gibt es?

Wo werden Kreisel angewendet?

### 4.2. Ergänzende Bemerkungen

Für viele Anwendungen ist es notwendig, die Rotationsfrequenz des Kreisels zu stabilisieren. Eine relativ einfache Methode besteht darin, den Kreisel in einer Ebene senkrecht zur Figurenachse zu magnetisieren. Erzeugt man nun um den Kreisel ein magnetisches Wechselfeld konstanter Frequenz, so wirkt der Kreisel als Rotor eines Synchronmotors. Die durch Reibung verlorene Rotationsenergie wird vom Magnetfeld wieder zugeführt. Welche Geometrie muß das Wechselfeld besitzen?

Die Elektronen eines Atoms besitzen aufgrund ihres Bahn- und Eigendrehimpulses ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$. Die daraus resultierende potentielle Energie

(9) $W = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$

in einem äußeren magnetischen Feld $\vec{B}$ ist minimal, wenn $\vec{\mu}$ und $\vec{B}$ antiparallel sind. Deshalb wirkt ein Drehmoment, das versucht, $\vec{\mu}$ antiparallel zur Feldrichtung einzustellen. Wegen ihres Drehimpulses verhalten sich die Elektronen mechanisch jedoch wie Kreisel und weichen mit einer Präzessionsbewegung aus (Larmor-Präzession).

# Versuch 6 Viskosität

## 1. Ziel des Versuches

In vielen Fällen wird bei Betrachtungen zur Mechanik vorausgesetzt, daß Reibungseffekte vernachlässigbar sind. In diesem Versuch spielt die Reibung in Flüssigkeiten die zentrale Rolle: Es soll die Viskosität einer Flüssigkeit aus der konstanten Fallgeschwindigkeit einer Kugel bestimmt werden. Weiterhin soll die $r^4$-Abhängigkeit des Volumenstromes bei Kapillaren experimentell verifiziert werden.

Rohr mit kleinem Querschnitt

## 2. Grundlagen

### 2.1. Laminare Strömung

Bewegt sich eine Flüssigkeit an der Oberfläche eines festen Körpers vorbei, so hängt die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit vom Abstand zu dieser Oberfläche ab. Unmittelbar an der Grenzfläche haftet eine dünne Flüssigkeitsschicht, die Strömungsgeschwindigkeit ist dort also null. Weiter von der Grenzfläche entfernte Flüssigkeitsschichten besitzen eine von null verschiedene Geschwindigkeit.

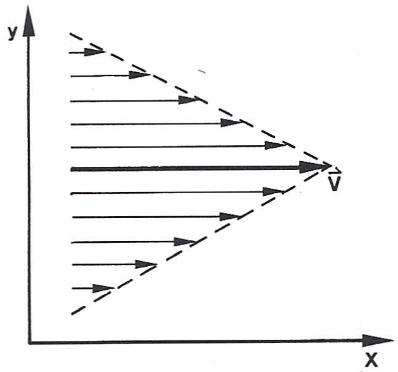


*Abb. V6–1. Geschwindigkeitsgefälle in einem viskosen Medium*

Bei hinreichend kleinen Strömungsgeschwindigkeiten gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei, ohne ineinander zu verwirbeln. Eine solche Strömungsform heißt laminar.
Die folgenden Ausführungen setzen immer laminare Strömungsverhältnisse voraus.

### 2.2. Definition der dynamischen Viskosität

Bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit oder ein Gas wirkt auf den Körper eine Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Ihr Betrag hängt von der Geschwindigkeit, der Geometrie des Körpers und der inneren Reibung des Mediums ab.
Betrachtet man beispielsweise eine ebene Platte, die parallel zur Plattenebene in $x$-Richtung durch eine Flüssigkeit bewegt wird, so haftet die unmittelbar anliegende Flüssigkeitsschicht an ihr und bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit $v$. Flüssigkeitsschichten in größerem Abstand haben eine geringere Geschwindigkeit. Es entsteht ein Geschwindigkeitsgefälle in $y$-

Richtung, also senkrecht zur Bewegungsrichtung.
Die Reibungskraft $F_R$, die auf die Platte wirkt, ist proportional zur Berührungsfläche $A$ und zu dem Geschwindigkeitsgefälle $dv/dy$ an der Plattenoberfläche.

(1) $F_R = \eta A \, dv/dy$.

Darin ist $\eta$ eine Materialkonstante, die als dynamische Viskosität oder Zähigkeit der umgebenden Flüssigkeit bezeichnet wird. Ihre Einheit ist

(2) $[\eta] = 1 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Eine in der Literatur noch häufig zu findende ältere Einheit ist

(3) $1 \text{ Poise} = 1 \text{ g s}^{-1} \text{ cm}^{-1} = 0.1 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Die Viskosität einer Flüssigkeit nimmt mit wachsender Temperatur $T$ ab. Meist gilt mit guter Näherung

(4) $\eta(T) = a \cdot \exp(b/T)$,

wobei $a$ und $b$ empirisch zu bestimmmende Konstanten sind.
Verwendet man statt der Platte eine Kugel mit Radius $r$, die man mit konstanter Geschwindigkeit $v$ durch eine viskose Flüssigkeit bewegt, so ist die Reibungskraft, die auf die Kugel wirkt:

(5) $F_R = 6\pi\eta r v$ (Stokessches Gesetz).

Fällt die Kugel unter dem Einfluß ihrer Gewichtskraft durch die Flüssigkeit, so verschwindet nach hinreichend langer Zeit die Summe aus Gewichtskraft, Auftriebskraft und Stokesscher Reibungskraft:

(6) $6\pi\eta r v + 4/3\pi r^3(\varrho_F - \varrho_K) = 0$.
$\varrho$: Dichte der Flüssigkeit bzw. der Kugel

Die Kugel bewegt sich dann mit einer konstanten Geschwindigkeit, aus der mit (7) die Viskosität der Flüssigkeit ermittelt werden kann:

(7) $$\eta = \frac{2r^2(\varrho_K - \varrho_F)}{9v}.$$

## 2.3. Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Bei der laminaren Strömung in einer Röhre mit dem Radius $r$ haftet eine Flüssigkeitsschicht an der Rohrwand, während in der Rohrmitte die Fließgeschwindigkeit am höchsten ist. Welcher Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ fließt nun durch eine Röhre der Länge $l$, an deren beiden Enden die Drucke $p_1$ bzw. $p_2$ herrschen?

Wir betrachten dazu in der Röhre einen einzelnen axialen Flüssigkeitsfaden mit dem Radius $x$. Aufgrund der Druckdifferenz wirkt auf ihn die Kraft

(8) $F_1 = (p_1 - p_2)\pi x^2$.

Weiterhin wirkt nach (1) auf die Mantelfläche des Fadens die Reibungskraft

(9) $F_2 = \eta \cdot 2\pi x l \cdot dv/dx$.

Bei stationärer Strömung verschwindet die Summe der beiden Kräfte (8) und (9) und man erhält

(10) $2\eta l \, dv/dx = -(p_1 - p_2)x$.

Man erhält $v(x)$ durch Integration über $x$, wobei die Randbedingung $v = 0$ für $x = r$ zu berücksichtigen ist. Das Ergebnis dieser Integration ist:

(11) $v(x) = (p_1 - p_2) \cdot (r^2 - x^2)/(4\eta l)$.

Eine stationäre laminare Strömung in einer Röhre besitzt also ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil.

Der Volumenstrom über den gesamten Querschnitt der Röhre beträgt

(12) $$\Delta V/\Delta t = \int_0^r 2\pi x \, dx \cdot v(x) = \pi r^4 \cdot (p_1 - p_2)/(8\eta l).$$

Die Gleichung (12) wird als Hagen-Poiseuillesches Gesetz bezeichnet. Von besonderer praktischer Bedeutung für die Dimensionierung von Rohrquerschnitten ist darin die Abhängigkeit des Volumenstromes von der 4. Potenz des Radius der Röhre.

## 2.4. Die Reynoldssche Zahl

Ob die Strömung einer Flüssigkeit laminar ist oder ob es zu Wirbelbildungen (turbulente Strömung) kommt, hängt von dem Verhältnis zwischen den Trägheitskräften der strömenden Flüssigkeit und deren Viskosität ab. Bei einer Kapillare wird dieses Verhältnis beschrieben durch die Reynoldssche Zahl

(13) $R = \varrho \cdot r \cdot v/\eta$.

Der Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ ist durch die Strömungsgeschwindigkeit $v$ bestimmmt:

(14) $\Delta V/\Delta t = r^2 \pi v.$

Die nach $v$ aufgelöste Gleichung (14) in (13) eingesetzt ergibt

(15) $$R = \frac{\varrho \cdot \Delta V}{\eta \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta t}.$$

Für kleine Reynoldszahlen sind die Trägheitskräfte der strömenden Flüssigkeitsteilchen klein gegen die Reibungskräfte, und die Strömung ist laminar. Empirisch stellt man fest, daß in Röhren der Umschlag zur turbulenten Strömung meist bei einem kritischen Wert $R_{\text{krit}} \approx 1\,000$ bis $2\,000$ geschieht. Dieser Umschlag in eine turbulente Strömung macht sich makroskopisch durch eine Vergrößerung des Strömungswiderstandes bemerkbar.

## 3. Versuch

### 3.1. Verwendete Geräte

- Stahlkugeln mit verschiedenen Radien
- Flüssigkeitsgefüllte Fallröhre mit Lichtschranken
- Elektronischer Kurzeitmesser
- Kapillaren verschiedener Durchmesser
- Vorratsgefäß mit Magnetventil
- Meßzylinder

### 3.2. Aufgabenstellung

1. Aufgabe
Mit der Kugelfall-Methode soll die Viskosität einer Flüssigkeit bei Zimmertemperatur bestimmt werden.

2. Aufgabe
Beim Gesetz von Hagen-Poiseuille soll die $r^4$-Abhängigkeit des Volumenstromes an Kapillaren mit verschiedenen Durchmessern nachgewiesen werden.

### 3.3. Hinweise zur Versuchsdurchführung

Bei der Versuchsdurchführung muß zunächst festgestellt werden, nach welcher Fallstrecke die Geschwindigkeit der Kugel konstant ist. Es wird mehrfach die Fallzeit gemessen, die die Kugel für den Weg $s$ zwischen zwei Lichtschranken LS1 und LS2 benötigt.

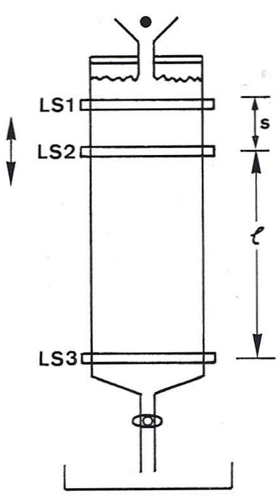


*Abb. V6–2. Versuchsaufbau zur Bestimmung der Viskosität*

Auf die verwendeten Kugelradien angepaßte „Trichter" sorgen dafür, daß die Kugeln genau längs der Rohrachse fallen und damit den Lichtweg sicher unterbrechen. Die Rohrachse muß deshalb exakt vertikal stehen.
Die obere Lichtschranke LS1 wird einige Zentimeter unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche angebracht, damit die beim Eintauchen der Kugel auftretenden Luftblasen nicht zu Fehlmessungen führen. Die Messung wird für mehrere Weglängen $s$ wiederholt. Aus dem Weg-Zeit-Diagramm der Kugel kann dann entnommen werden, in welcher Höhe die Geschwindigkeit konstant ist. Auf diese Höhe wird LS2 eingestellt. Zur genauen Messung der konstanten Endgeschwindigkeit wird 10 mal die Zeit gemessen, die die Kugel von LS2 bis zu der am unteren Ende der Flüssigkeitssäule angebrachten Lichtschranke LS3 benötigt.
Für Aufgabe 2 wird der in Abbildung 3 dargestellte Versuchsaufbau verwendet. Der Ausfluß aus dem Vorratsgefäß (a) wird durch ein elektrisch betätigtes Ventil (b) geöffnet. Über einen zweipoligen Schalter ist eine elektronische Uhr mit dem Ventil gekoppelt. Für mehrere Durchmesser der Kapillaren (c) wird je 10 mal die Zeit ermittelt, in der 20 $cm^3$ Wasser ausfließen.
Die Querschnittsfläche des Vorratsgefäßes ist möglichst groß zu wählen, damit während der Messung die Höhe der Flüssigkeit und damit die Druckdifferenz zwischen oberem und unterem Ende der Kapillare als konstant angenom-

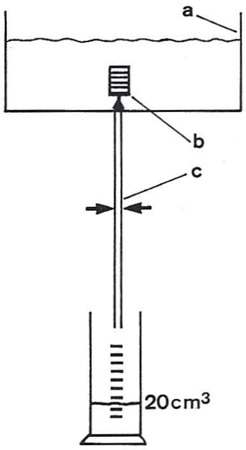


*Abb. V6–3. Versuchsaufbau zum Nachweis der $r^4$-Abhängigkeit des Volumenstromes: a) Vorratsgefäß, b) Magnetventil, c) Kapillare*

men werden kann. Um die Versuchsbedingungen bei jedem Teilexperiment gleich zu lassen, muß die entnommene Wassermenge immer wieder in das Vorratsgefäß geschüttet werden.

### 3.4. Meßbeispiele

Zu Aufgabe 1:
Als Flüssigkeit wurde Rizinusöl benutzt. Die verwendeten Stahlkugeln hatten 4, 5 und 6 mm Durchmesser.
Abbildung 4 zeigt das Meßergebnis zur Bestimmung der konstanten Fallgeschwindigkeit. Der Versuchsaufbau erlaubte einen minimalen Abstand der Lichtschranken LS1 und LS2 von 6,7 cm. Für $s > 10$ cm liegen die Meßpunkte auf Geraden, die Kugeln haben dann also ihre konstante Endgeschwindigkeit erreicht.
Für die Falldauern auf der Strecke $l = 65{,}1\ \text{cm} \pm 0{,}2\ \text{cm}$ zwischen LS2 und LS3 erhielt man:

Tabelle 1: Stationäre Geschwindigkeiten

| $r$/mm | $t$/s | $v$/m s$^{-1}$ |
|---|---|---|
| 2,0 | 9,57 ± 0,09 | 0,068 ± 0,001 |
| 2,5 | 6,14 ± 0,07 | 0,106 ± 0,002 |
| 3,0 | 4,22 ± 0,06 | 0,154 ± 0,003 |

Die Fehlerangabe in der Zeit $t$ ist die 3fache Standardabweichung jeweils einer Meßreihe aus 10 Einzelmessungen. Der Fehler in der Geschwindigkeit $v$ ergibt sich dann unter Berücksichtigung der Meßungenauigkeit von $l$ mit der Fehlerfortpflanzungsformel (Gl. 0.2.10).
Nach (7) ist eine Proportionalität zwischen $v$ und $r^2$ zu erwarten. Die Ursprungsgerade in Abbildung 5 bestätigt dies. Der Quotient $v/r^2$ kann als die Steigung dieser Geraden aufgefaßt werden. Aus dem Diagramm ergibt sich

$$v/r^2 = 171\ \text{cm}^{-1}\,\text{s}^{-1}.$$

Zur Bestimmung der Dichte $\varrho_K$ wurden 10 Kugeln mit $r = 3$ mm gewogen. Aus der Gesamtmasse $m = (8{,}71 \pm 0{,}01)$ g und dem Gesamtvolumen berechnet man die Dichte $\varrho_K =$

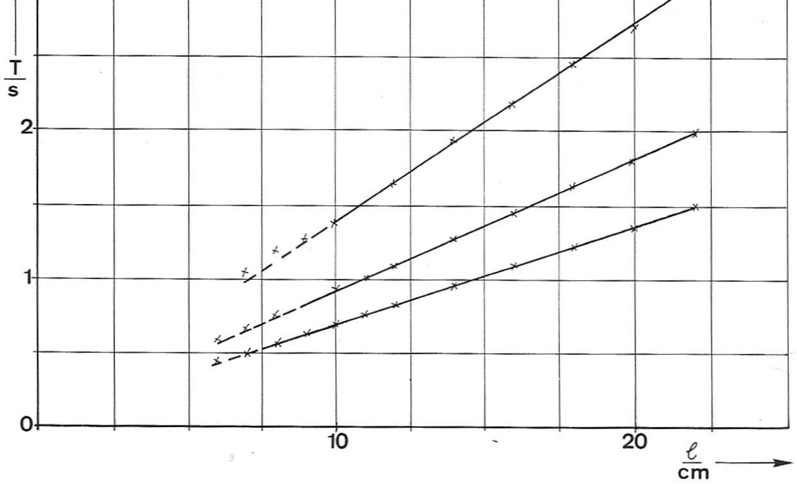


*Abb. V6–4. Zur Bestimmung der konstanten Fallgeschwindigkeit*

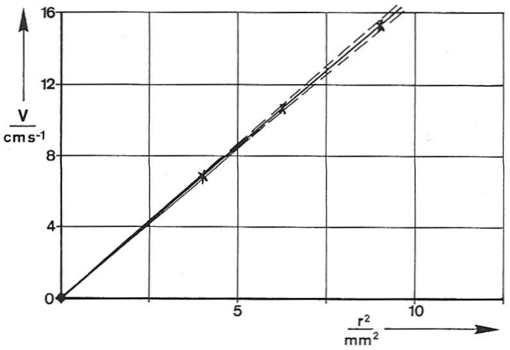


*Abb. V6–5. Radiusabhängigkeit der konstanten Endgeschwindigkeit*

7,70 g/cm$^3$. Das Rizinusöl hat die Dichte $\varrho_F$ = 0.96 g/cm$^3$.
Damit erhält man aus (7) für die Viskosität $\eta$ = 8,75 · 10$^{-2}$ N s m$^{-2}$.
Aus der Steigung der Fehlergeraden ergibt sich als relativer Fehler des Quotienten $r^2/v$ etwa 2%. Der Fehler bei der Bestimmung der Dichten ist dagegen vernachlässigbar. Wir haben damit als Ergebnis

$$\eta = (8{,}75 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N\,s\,m^{-2}}.$$

Zu Aufgabe 2:
Der Volumenstrom wurde bei 7 Kapillaren mit verschiedenen Innendurchmessern gemessen. Das Ergebnis ist in Abbildung 6 gezeigt:
Bei hinreichend kleinen Innendurchmessern ergibt sich näherungsweise ein proportionaler Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom und der vierten Potenz des Durchmessers. Bei der mit (a) markierten Messung ($r$ = 1,0 mm) bricht die Proportionalität jedoch ab. Eine Überprüfung der Reynoldszahl für diesen Meßwert ergibt mit (15) den Wert $R \approx 1\,400$. Man kann daraus schließen, daß bei den gegebenen Versuchsbedingungen im Bereich (I) eine laminare und im Bereich (II) eine turbulente Strömung vorliegt.

## 4. Ergänzungen

### 4.1. Vertiefende Fragen

Bei der Herleitung von (12) wird vorausgesetzt, daß sich die Druckdifferenz und damit die Wasserhöhe im Vorratsgefäß zeitlich nicht ändert. Durch Integration berechne man eine Formel für den Fall, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft.

### 4.2. Ergänzende Bemerkungen

Nicht nur bei Flüssigkeiten, sondern auch bei strömenden Gasen tritt innere Reibung auf. Die oben durchgeführten Überlegungen für viskose Flüssigkeiten treffen auch für Gase zu. Die Viskosität von Gasen ist im allgemeinen jedoch wesentlich geringer als bei Flüssigkeiten. Die Tabelle 2 gibt einen Überblick über die Viskositäten einiger wichtiger Stoffe.

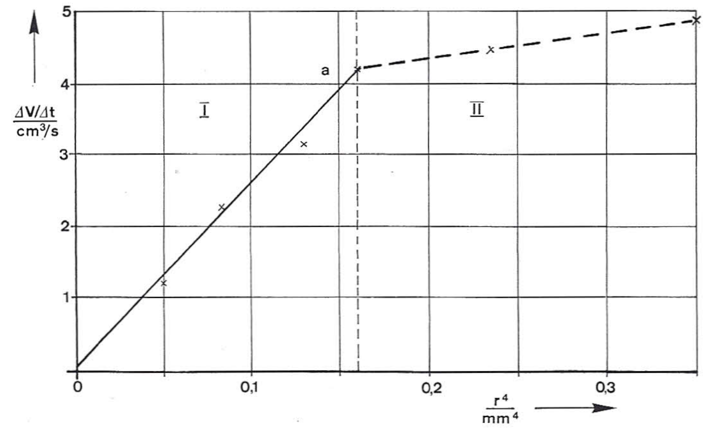


*Abb. V6–6. Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ bei Kapillaren mit verschiedenen Innendurchmessern: I laminarer Bereich, II turbulenter Bereich*