Leitfaden zur

Fehlerbetrachtung

Erhard Döpel
Fachhochschule Jena, Fachbereich Grundlagenwissenschaften

13. August 2007

Fachhochschule Jena
University of Applied Sciences Jena

Dieses Skript ist nur für den internen Gebrauch an der FH Jena bestimmt!
Erstellt am 13. August 2007 mit LaTeX.

Literatur

1. P.A. Tipler;
   Physik;
   Spektrum Verlag Heidelberg 1994

2. DIN 1319 Grundbegriffe der Messtechnik;
   Teil 3: Begriffe für die Messunsicherheit und für die Beurteilung von Messgeräten und Messeinrichtungen

3. Eichler, Kronfeld, Sahm;
   Das Neue Physikalische Grundpraktikum;
   Springer-Verlag Heidelberg, Berlin, 2006

4. D. Geschke (Hrsg.) u.a. Physikalisches Praktikum;
   12. Auflage, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig 2001

5. W. H. H. Gränicher, Messung beendet - was nun?
   B. G. Teubner Stuttgart 1994

1 Physikalische Größen und deren Messung

Physikalische Größen sind exakt definiert und müssen entsprechend exakt angewendet werden. Beachten Sie die Abgrenzung von der oft umgangssprachlich erweiterten Benutzung. So ist die physikalische Größe Energie (die in einem System gespeicherte Arbeit) wohl zu unterscheiden von der Bedeutung im täglichen Sprachgebrauch (geistige oder körperliche Spannkraft) und sollte auch nicht verwechselt werden mit anderen physikalischen Größen (z.B. Kraft).

Physikalische Größen sind das Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit. Die Maßeinheit steht für die Verkörperung der Größe bzw. für die Messvorschrift. Die Maßzahl gibt an, wie oft die zu bestimmende Größe in der Maßverkörperung enthalten ist. Die Möglichkeiten für eine Maßverkörperung sind vielfältig. So hat man früher die Länge durch Vergleich mit der Fuß- oder Ellenlänge des Fürsten angegeben. Mit der Entwicklung der Industrie und des weltumspannenden Handels ist das Bedürfnis nach einem präzisen einheitlichen System der Maßverkörperungen gewachsen. Heute ist das System der SI-Einheiten (Systeme International d'Unités) in den meisten Ländern gesetzlich eingeführt. Von staatlichen Ämtern wird es nach dem neuesten technischen und wissenschaftlichen Kenntnisstand bewahrt. Für die physikalischen Grundgrößen (Masse, Länge, Zeit, Stromstärke, Temperatur, Lichtstärke, Stoffmenge) sind die Maßverkörperungen definiert (kg, m, s, A, K, cd, mol). Für die physikalischen Grundgrößen hat man solche Maßverkörperungen (Primärstandards) gewählt, die möglichst unabhängig von äußeren Einflüssen sind und sehr genau reproduziert werden können. Alle anderen Größen sind abgeleitet und durch die Verknüpfungen mit den Grundgrößen bestimmt.

Keine Messung ist absolut fehlerfrei. Sie kann prinzipiell nicht genauer als die Definitionsgenauigkeit (Reproduzierbarkeit) der eingehenden Grundgrößen sein. Hinzu kommen dann noch Ungenauigkeiten beim eigentlichen Messprozess (Vergleich der zu bestimmenden Größe mit der Maßverkörperung). In den wenigsten Fällen der täglichen Praxis ist jedoch eine Genauigkeit erforderlich, die den aufwendigen Vergleich mit dem Primärstandard rechtfertigen würde. Es wurde deshalb eine ganze Reihe von Messverfahren und Messgeräten entwickelt, die mit angepassten Genauigkeitsanforderungen einfacher handhabbar sind.

Zur Einschätzung, ob der gewonnene Messwert für die Erfordernisse einer nachfolgenden Anwendung brauchbar ist, gehört unbedingt die Angabe des Messfehlers. Ein Gerätehersteller muss zur Garantie der Funktionen in der Entwicklungsphase umfangreiche Betrachtungen zur Toleranz der Eigenschaften der Gerätekomponenten durchführen und diese während der Produktion überwachen. Wenn Sie z.B. die Brennweite einer Linse bestimmt haben und diesen Wert ohne Fehler angeben, kann ein Konstrukteur nicht entscheiden, welche Justierfreiheitsgrade er vorsehen muss bzw. ob er diese

Linse überhaupt zur Lösung seiner Aufgabe einsetzen kann.

2 Messfehler

Zu jeder Messung gehört die Abschätzung der möglichen Abweichungen des Messwertes x_m vom wahren Wert x_w. Diese Abweichung bezeichnet man als wahren Messfehler ϵ (vgl. Abb.1), der immer unbekannt bleiben wird. Die Aufgabe des Experimentators besteht darin, aus seiner Messung und im Vergleich mit Ergebnissen anderer Messungen einen Fehler Δx so abzuschätzen, dass der wahre Wert (mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit) innerhalb des Intervalls $x_m - \Delta x \cdots x_m + \Delta x$ liegt.

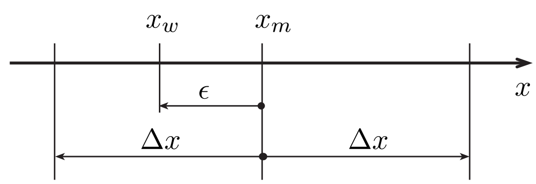

Abbildung 1: Angabe der Fehlergrenzen

Die Abweichung Δx bezeichnet man als absoluten Fehler. Der Messwert wird zusammen mit dem absoluten Fehler in der Form $x_m \pm \Delta x$ (z.B. $s = (4,02 \pm 0,04)$m) angegeben.

Das Verhältnis des absoluten Fehlers zum Messwert $r = \Delta x / x_m$ (in %) bezeichnet man als relativen Fehler. Der Messwert wird zusammen mit dem relativen Fehler in der Form $x_m \pm r\%$ (z.B. s = 4,02m±1%) angegeben.

Grobe Messfehler resultieren aus falscher Bedienung von Messgeräten, defekten Messgeräten oder schlechten Versuchsbedingungen. Das ist z.B. der Fall, wenn Sie das Erdmagnetfeld bei unbeabsichtigter Anwesenheit eines starken Elektromagneten messen. Grobe Messfehler sind prinzipiell vermeidbar und werden hier nicht weiter diskutiert.

Systematische Messfehler drücken sich dadurch aus, dass bei mehrmaliger Wiederholung der Messung die Abweichung des Messwertes vom wahren Wert immer in der gleichen Richtung zu finden ist und auch immer ungefähr gleich groß ist. Die Ursachen für die Abweichungen wirken nach Betrag und Richtung in annähernd konstanter Weise. Diese Ursachen sind z.B. Ungenauigkeiten der Messgeräte (Kalibrierfehler). Manchmal ist auch das Messverfahren unvollkommen, weil (geringe) Störungen der Messgröße vernachlässigt wurden. Diese Fehler können durch Berücksichtigung der Einflüsse zumindest teilweise korrigiert werden. Es bleibt aber ein systematischer Restfehler (Δx_s) (meist Genauigkeit des Messgerätes), der nicht weiter eliminiert werden kann und zusammen mit dem Messwert angegeben werden muss.

Zufällige Fehler erkennt man daran, dass die Messwerte bei Wiederholung der Messung um den wahren Wert schwanken. Die Schwankungen können in der Natur der Messgröße begründet sein[1], durch wechselnde Messbedingungen (Umgebungseinflüsse) verursacht werden[2] oder auch einfach nur durch die Unzulänglichkeit der menschlichen Sinne entstehen[3]. Mit Hilfe geeigneter statistischer Methoden kann man aus einer endlichen Anzahl von Messungen einen Schätzwert für die Messgröße und ihren zufälligen Fehler (Δx_z) bestimmen.

Zu Beginn der Fehlerbetrachtung sollte man versuchen, die verschiedenen Fehlerquellen zu erkennen, abzuschätzen und zu vergleichen. Nur die Einflüsse der stärksten Fehlerquellen sind in die Fehlerbetrachtung einzubeziehen. Fehlerquellen mit geringeren Einflüssen können ab einer bestimmten Stärke vernachlässigt werden.

Im Folgenden erhalten Sie Hinweise für die Abschätzung dieser Fehleranteile bei der unmittelbaren Messung einer Größe. Oft muss die zu bestimmende Größe erst aus den Messgrößen berechnet werden. Im Abschnitt Fehlerfortpflanzung wird diskutiert, wie man aus dem Fehler der Messgröße den der Bestimmungsgröße ermittelt. Meist gehen in diese Bestimmungsgröße mehrere Messwerte ein. Es wir dort auch diskutiert, wie sich ihr Gesamtfehler aus den einzelnen Bestandteilen zusammensetzt.

Die richtige Fehlerrechnung erfordert einige Erfahrung. Diskutieren Sie deshalb mit Ihrem Versuchsbetreuer, wie Sie bei Ihrer konkreten Versuchsaufgabe vorgehen können.

3 Abschätzung systematischer Fehler

Die Abschätzung systematischer Fehler setzt die genaue Kenntnis der Messgeräte und des Messverfahrens voraus. Mögliche Ursachen für systematische Abweichungen des Messwertes vom wahren Wert sind nachfolgend aufgeführt.

Unvollkommenheit des Messgerätes (Kalibrierfehler) Jedes Messgerät wurde durch Vergleich mit einem genaueren Messverfahren geeicht. Daraus resultiert eine Genauigkeitsklasse, die der Hersteller für dieses Gerät garantiert und die ihm oft sogar von einem Eichamt zertifiziert wurde. Ein

[1] z.B. Aktivität einer radioaktiven Probe

[2] z.B. Steig- und Sinkgeschwindigkeit der Öltröpfchen beim Millikan-Versuch ist wegen der Stöße mit Luftmolekülen nicht konstant

[3] z.B. Schwankungen beim Stoppen einer Zeit

übliches Multimeter hat zum Beispiel die Genauigkeitsklasse 5%, d.h. der maximale Messfehler beträgt 5% des Messbereiches. Informieren Sie sich über die im Praktikum verwendeten Messgeräte und deren Fehler beim Versuchsbetreuer.

Beachten Sie auch, dass sich die Genauigkeit der Messungen durch unsachgemäße Behandlung der Geräte verschlechtern kann. Das trifft z.B. zu, wenn die Wägestücke einer Analysenwaage verschmutzen oder korrodieren.

Unvollkommenheit des Messverfahrens oder des theoretischen Modells zur Versuchsauswertung Sie sollten überprüfen, ob Sie bei der Messung der Größe alle Einflüsse auf den Messwert berücksichtigt haben und ob Näherungen bei der Auswertung der Versuchsergebnisse gerechtfertigt sind. Zum Beispiel soll die Messung der Viskosität eines Öles über die Sinkgeschwindigkeit einer Kugel und damit über die Bestimmung der Stokes'schen Reibungskraft erfolgen. Je nach angestrebter Genauigkeit müssen der Auftrieb der Kugel im Öl, der Einfluss der endlichen Gefäßdimensionen auf die Reibungskraft (Ladenburg-Korrektur) oder auch ein quadratischer Term bei der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Reibungskraft (Oseen-Korrektur) berücksichtigt werden.

Sie sollten die Beeinflussung des Messergebnisses durch die Messung möglichst klein halten, zumindest aber einschätzen. Wenn Sie z.B. eine Spannungsmessung an einer hochohmigen Quelle durchführen, sollten Sie Sorge dafür tragen, dass das Messgerät einen deutlich höheren Innenwiderstand als die Quelle hat, damit die zu messende Spannung beim Anschließen des Gerätes nicht zusammenbricht. Durch Beachtung derartiger Einflüsse und Korrektur bei der Auswertung kann man die Messgenauigkeit prinzipiell steigern. Das ist jedoch nur solange sinnvoll, solange andere Fehlereinflüsse kleiner als diese Korrekturen sind.

Unvollkommenheit der Versuchsbedingungen Schließlich sollte das Messobjekt die für die Messung geforderten Eigenschaften und Umgebungsbedingungen (Zusammensetzung, Form, Reinheit, ...) besitzen. Zum Beispiel ist das Ergebnis einer Messung der Oberflächenspannung von Wasser sehr empfindlich von dessen Verunreinigungen insbesondere mit Tensiden abhängig. Wegen der thermischen Ausdehnung ist die Einhaltung der Temperatur wichtig, wenn man eine Länge von 1m mit einer Genauigkeit von 1μm messen will.

Ablesegenauigkeit Beachten Sie auch, dass der Messwert nicht beliebig genau vom Messgerät abgelesen werden kann. Misst man z.B. den Durchmesser eines Drahtes mit einer Schieblehre, beträgt die Ablesegenauigkeit 0,1mm. Bei einer Mikrometerschraube beträgt sie 0,01mm. Die Digitalanzeige einer intakten Waage oder Stoppuhr ist sinnvollerweise so dimensioniert, dass der Kalibrierfehler kleiner als die letzte angezeigte Stelle ist. Diese ist entweder auf- oder abgerundet. Der systematische Fehler ist damit durch die Ablesegenauigkeit bestimmt und beträgt die Hälfte dieser letzten angezeigten Stelle.

Durch Untersuchung der verschiedenen Fehlereinflüsse ist ein Wert für die maximale Abweichung des wahren Wertes vom Messwert anzugeben. Oftmals ist dieser Fehler nur ein begründeter Schätzwert. Diskutieren Sie mit Ihrem Versuchsbetreuer die Quellen für die systematischen Fehler ihrer Messung, um Erfahrungen zu sammeln!

4 Abschätzung zufälliger Fehler

Durch statistische Auswertung sehr vieler Messungen kann man zufällige Fehler abschätzen und reduzieren. Für diese Auswertung ist es prinzipiell zunächst erst einmal wichtig zu wissen, wie die Messwerte verteilt sind. Hierzu teilt man die auftretenden Messwerte in Klassen ein und zählt, wie oft der Messwert in jeder Klasse aufgetreten ist. Dividiert man diese Häufigkeitswerte durch die Gesamtzahl der Messwerte, erhält man eine relative Häufigkeitsverteilung, wie sie z.B. durch die Balken in Abb.2 dargestellt wird. Lässt man die Klassenbreite gegen Null und die Gesamtzahl der Messwerte gegen Unendlich gehen, erhält man eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung. Wir nehmen nun an, diese sei eine Gaußsche Normalverteilung (s. Abb.2 durchgehende Linie)

$$h(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}).$$

Die Größe $h(x)dx$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Messwert im Intervall $x \dots x+dx$ zu messen. Die Normalverteilung besitzt nur zwei Parameter. μ ist der wahre Wert, um den die Messwerte symmetrisch verteilt sind. Die Standardabweichung σ ist ein Maß für die Streuung der Einzelmesswerte um den wahren Wert. Die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Wert x im Intervall $\mu - \sigma \dots \mu + \sigma$ zu messen beträgt 68,3%.

Streng genommen müsste die Annahme der Normalverteilung vor jeder Messung erst durch geeignete statistische Tests überprüft werden. In vielen Fällen ist sie jedoch gerechtfertigt, insbesondere dann, wenn die Einzelmessungen unabhängig voneinander (nicht korreliert) sind.

Unter der Annahme einer Normalverteilung können Näherungswerte für μ und σ mit Hilfe einer genügend großen Anzahl von Einzelmessungen (Sichprobe $n \geq 10$) gewonnen werden. Es seien x_i $(i = 1 \dots n)$ diese Messwerte. Dann ist das arithmetische Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

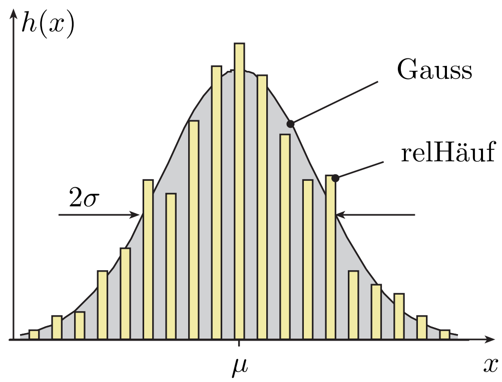

Abbildung 2: Relative Häufigkeit des Auftretens statistisch schwankender Messwerte (relHäuf) und Normalverteilung (Gauss)

die beste Näherung für den wahren Wert μ und

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

die beste Näherung für die Standardabweichung σ.

Führt man nacheinander mehrere Messungen vom Stichprobenumfang n aus, so streuen die Mittelwerte $\bar{x}$ dieser Messungen um den wahren Wert μ mit einer Streuung von $\sigma/\sqrt{n}$. Daher liegt der Mittelwert einer Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% im Intervall $\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ldots \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Da σ durch s_x geschätzt wird, müssen je nach Stichprobenumfang und gewünschter statistischer Sicherheit die Intervallgrenzen durch Korrektur mit den sogenannten t-Werten etwas erweitert werden. In der folgenden Tabelle sind einige dieser t-Faktoren angegeben.

Stich-proben-umfang	statistische Sicherheit 68,3%	95%	99%
2	1,84	12,71	63,66
3	1,32	4,3	9,93
4	1,20	3,18	5,84
5	1,15	2,776	4,604
10	1,058	2,262	3,250
120	1,004	1,980	2,617

Der zufällige Fehler Δx_z ergibt sich schließlich je nach Stichprobenumfang und gewählter statistischer Sicherheit zu

$$\Delta x_z = \frac{s_x t}{\sqrt{n}} = t\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}.$$

Bei einem Stichprobenumfang von 10 und einer statistischen Sicherheit von 68,3% kann $t = 1$ gesetzt werden.

5 Fehlerfortpflanzung

Wird eine physikalische Größe nicht direkt bestimmt, sondern über eine Verknüpfung mit gemessenen Größen (z.B. Geschwindigkeit = Wegdifferenz / Zeitintervall), so sollte man schon vor der Messung untersuchen, von welchen Größen das Ergebnis besonders empfindlich abhängt. Diese müssen dann mit besonderer Sorgfalt bestimmt werden.

Wir nehmen zunächst an, unsere zu bestimmende Größe z hängt nur von einer Messgröße x ab $z = f(x)$. Für die Messgröße haben Sie den Wert x_m ermittelt und den Fehler mit Δx abgeschätzt. Den Erwartungswert der zu bestimmenden Größe z_m gewinnen Sie, indem Sie den Messwert in den funktionalen Zusammenhang einsetzen $z_m = f(x_m)$. Sie müssen nun noch einen Fehler für die Größe z_m abschätzen, der durch den Messfehler Δx und die Stärke der Abhängigkeit der Größe z von der Messgröße x bestimmt ist. Sie können das tun, indem Sie $x_m + \Delta x$ und $x_m - \Delta x$ in den funktionalen Zusammenhang $z = f(x)$ einsetzen und damit den Maximalwert z_m^+ und den Minimalwert z_m^- unmittelbar bestimmen (vgl. Abb. 3(a)). Für kleine Abweichungen Δx kann man $z = f(x)$ mit Hilfe des Differenzialquotienten linearisieren[4] (vgl. Abb. 3(b))

$$|\Delta z| = |\frac{dz}{dx}(x_m)\Delta x|.$$

Die Betragsstriche sind deswegen eingeführt, weil nur die Größe der Abweichungen abgeschätzt wird.

Wir nehmen nun an, unsere Bestimmungsgröße z hängt von zwei Messgrößen x und y ab $z = f(x, y)$. Für die beiden Messgrößen haben Sie Werte von x_m und y_m ermittelt und den Fehler mit Δx bzw. Δy abgeschätzt. Den Erwartungswert der zu bestimmenden Größe z_m gewinnen man auch hier wieder, indem man die Messwerte in den funktionalen Zusammenhang einsetzen $z_m = f(x_m, y_m)$. Der Fehler Δz setzt sich nun aus den beiden Anteilen zusammen, die von den Messfehlern Δx bzw. Δy herrühren. Jeden kann man für sich in der oben diskutierten Weise abschätzen. Für die Zusammensetzung der beiden Anteile sind zwei verschiedene Methoden gebräuchlich.

[4] d.i. Taylor-Entwicklung

(1) Überwiegen die systematischen Fehler, hat man die Messfehler Δx bzw. Δy als maximale Abweichungen von den Messwerten bestimmt. Um sicher zu gehen, dass das auch für die Abweichungen Δz vom Wert z_m gilt, addiert man die Beträge der beiden Fehleranteile algebraisch

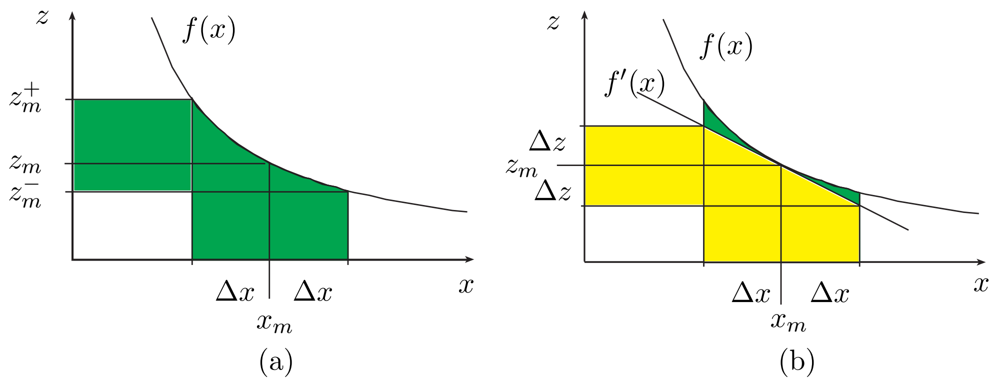

Abbildung 3: Fehlerfortpflanzung
(a) Bestimmung des größten (z_m^+) und des kleinsten (z_m^-) Wertes der Ergebnisgröße durch unmittelbares Einsetzen des größten und des kleinsten Wertes der Messgröße ($x_m \pm \Delta x$) in die Formel $z = f(x)$
(b) Berechnung der Schwankungen Δz über den Anstieg $f'(x)$

$$|\Delta z| = |\frac{\partial z}{\partial x}(x_m, y_m)\Delta x| + |\frac{\partial z}{\partial y}(x_m, y_m)\Delta y|.$$

Man geht dabei vom ungünstigsten Fall aus, dass die Abweichungen der beiden Größen $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ und $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ in die gleiche Richtung wirken und sich zum maximalen Wert verstärken. Dieses Vorgehen bezeichnet man als Größtfehlerabschätzung.

(2) Überwiegen bei allen eingehenden Messgrößen die zufälligen Fehler, hat man mit dem oben beschriebenen statistischen Verfahren die Fehler Δx und Δy so bestimmt, dass der wahre Wert mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit innerhalb des Konfidenzintervalls liegt. Um diese Wahrscheinlichkeitsaussage auch für den Fehler Δz zu wahren, muss man berücksichtigen, dass es bei unabhängigen Messgrößen x und y unwahrscheinlich ist, dass beide Abweichungen $\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x$ und $\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ den größten Wert gleichzeitig annehmen. Die beiden Abweichungen können sich im Einzelfall sogar teilweise kompensieren. Eine genaue Betrachtung führt auf das Ergebnis, dass bei Wahrung der statistischen Sicherheit die beiden Fehleranteile pythagoreisch zu addieren sind

$$|\Delta z| = \sqrt{(\frac{\partial z}{\partial x}(x_m, y_m)\Delta x)^2 + (\frac{\partial z}{\partial y}(x_m, y_m)\Delta y)^2}.$$

Wird die zu bestimmende Größe aus noch mehr Messwerten bestimmt, hat man bei der Fehlerfortpflanzung auch die weiteren Fehleranteile aufzusummieren. Das gilt für beide Möglichkeiten der Fehleraddition.

Eine pythagoreische Addition der Fehleranteile und damit die Bestimmung der statistischen Kenngrößen von z ist nur solange sinnvoll, solange die Beiträge stochastischer Fehlerquellen deutlich überwiegen. In einer konkreten Messung wird vielleicht für eine Messgröße der statistische Fehler und für eine andere der systematische Fehler überwiegen. Dann ist besser eine Größtfehlerabschätzung vorzunehmen.

Es erfordert etwas Geschick und Erfahrung, die Fehlerfortpflanzung rationell durchzurechnen. Einige Regeln helfen, den Aufwand deutlich zu reduzieren. Hängt die Ergebnisgröße in einer *rein* multiplikativen Verknüpfung von den Messgrößen $z = x^r y^s$ ab, dann addieren sich die relativen Fehler

$$|\frac{\Delta z}{z_m}| = |r\frac{\Delta x}{x_m}| + |s\frac{\Delta y}{y_m}| \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta z}{z_m} = \sqrt{(r\frac{\Delta x}{x_m})^2 + (s\frac{\Delta y}{y_m})^2}.$$

Setzt sich das Ergebnis additiv aus den Messgrößen zusammen $z = ax \pm by$, dann addieren sich die absoluten Fehler

$$|\Delta z| = |a\Delta x| + |b\Delta y| \quad \text{bzw.} \quad \Delta z = \sqrt{(a\Delta x)^2 + (b\Delta y)^2}.$$

Bei der Planung des Experimentes sollten Sie sich eine Übersicht über die Größenordnungen der Einflüsse der Fehler aller Messwerte auf den Fehler des Ergebnisses verschaffen. Damit wird klar, welche Messgrößen man besonders sorgfältig bestimmen muss und welche Fehler für den des Endergebnisses unerheblich sind. Ordnen Sie die Fehlereinflüsse der einzelnen Messwerte nach ihrer Größe und vernachlässigen Sie solche, die gegenüber anderen viel kleiner sind.

Die Fehlerfortpflanzung ist weiterhin nur für den grundlegenden Zusammenhang anzuwenden und nicht für Korrekturen kleiner systematischer Abweichungen. So darf man z.B. bei der Bestimmung des Fehlers der Viskosität im Kugelfallversuch die Ladenburg- und die Oseen-Korrektur unberücksichtigt lassen. Durch Vergleich des Einflusses dieser Korrekturen mit dem Messfehler kann man entscheiden, ob ihre Berücksichtigung überhaupt sinnvoll ist.

6 Signifikante Stellen

Neben den Messfehlern haben Sie bei der Auswertung der Messergebnisse auch Rechenungenauigkeiten zu beachten. Bei der Angabe eines Einzelmesswertes wurde die letzte Dezimalstelle gerundet. Damit ist seine Unsicherheit gleich dem halben Wert der letzten angegebenen Dezimalstelle. Sind diese Ziffern Nullen, sollte man sie angeben, um anzuzeigen, dass sie sicher sind. Bei der Auswertung werden verschiedene Messwerte verknüpft (z.B. Berechnung von Mittelwert, Streuung und zufälligem Fehler). Dabei liefert der Taschenrechner meist sehr viel mehr Stellen, als bei der Einzelmessung bestimmt wurden. Es ergibt sich die Frage, welche Ziffern des Rechenergebnisses sicher sind (d.h. Information tragen) und angegeben werden dürfen. Das ist eine Frage der Rechengenauigkeit mit gerundeten Werten (Näherungswerten) und betrifft sowohl die ausgewerteten Messwerte als auch die berechneten Fehler (insbesondere die zufälligen). Mit Hilfe folgender Rundungsregeln (vgl. Fehlerfortpflanzung) stellt man sicher, dass nur die signifikanten (sicheren) Dezimalstellen angegeben werden.

(1) Nach der Bildung von Mittelwerten ist auf die Stellenzahl der Einzelmessungen zu runden. Beispiel: Beim Bestimmen der Fallzeit mit einer Stoppuhr lesen Sie diese auf Hundertstelsekunden ab. Nach der Berechnung des Mittelwertes sollten Sie auf Hundertstel runden.

(2) Bei der Angabe von Fehlern ist ebenfalls auf die Stellenzahl der Einzelmessungen zu runden. Sollte dieser kleiner als eine Einheit der letzten Stelle sein, ist der Fehler auf diesen Wert aufzurunden. Beispiel: Die statistische Auswertung obiger Messreihe mit dem Taschenrechner ergibt einen Fehler des Mittelwertes von Δx = 0,132157 s. Da bei der Einzelmessung auf die zweite Stelle nach dem Komma gerundet wurde, sollten Sie das auch hier tun Δx = 0,14 s. Ergibt sich dieser Fehler bei der Auswertung von Messergebnissen, die mit einer Armbanduhr auf eine volle Sekunde gerundet wurden, wird auf die volle Sekunde aufgerundet: $\Delta x = 1$ s.

(3) Bei der Addition und Subtraktion von gerundeten Messwerten dürfen im Ergebnis nur so viele Dezimalstellen angegeben werden, wie der Summand mit der kleinsten Stellenzahl hat. Beispiel: Sie bestimmen den Außendurchmesser eines Rohres mit dem Lineal und runden auf 1mm. Den Innendurchmesser bestimmen Sie mit dem Messschieber und runden auf Zehntelmillimeter. Die daraus bestimmte Wandstärke sollten Sie auf volle Millimeter runden.

(4) Bei Multiplikation oder Division von gerundeten Messwerten darf das Ergebnis nur so viele gültige Ziffern wie der Faktor mit der kleinsten Anzahl gültiger Ziffern besitzen. Beispiel: Eine Kreisscheibe von 4,53mm Durchmesser (bestimmt mit einer Mikrometerschraube) wird aus 3,1m Entfernung (bestimmt mit Bandmaß) betrachtet. Die scheinbare Winkelausdehnung (im Bogenmaß) beträgt $4,53 \cdot 10^{-3}/3,1{=}1,46129 \cdots \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$.

Bei der Auswahl der signifikanten Ziffern sollten Sie berücksichtigen, dass der Messfehler oftmals nur geschätzt wird und es deshalb nicht sinnvoll ist, eine große Anzahl von Dezimalstellen anzugeben. Meist wird eine Stelle genügen.

7 Lineare Regression

Bisher wurden die Fehler einzelner Messwerte betrachtet. Bei vielen Messaufgaben ist jedoch die Abhängigkeit einer physikalischen Größe von einer oder mehreren anderen zu bestimmen. Die theoretischen Modelle zur Beschreibung der zugrunde liegenden Effekte liefern meist explizite funktionale Zusammenhänge der Messgrößen (wenigstens aber die Bestimmungsgleichungen). Man erwartet beispielsweise bei der Rotation einer Spule in einem Magnetfeld einen linearen Zusammenhang zwischen der Drehzahl der Spule und der Amplitude der induzierten Spannung. Das Ergebnis der Messreihe lässt sich durch Angabe der Parameter der Modellfunktionen zusammenfassen. In unserem Beispiel kann man den Anstieg der linearen Funktion und daraus u.a. die Stärke des Magnetfeldes bestimmen

In den einfachsten Fällen lassen sich die Zusammenhänge durch lineare Funktionen[5] beschreiben (z.B. Abhängigkeit der Dehnung einer Feder von der einwirkenden Kraft (Hookesches Gesetz), Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes von der Temperatur, ...).

Wir betrachten die lineare Abhängigkeit $y(x) = ax+b$ zweier Messgrößen x und y. Durch die Messung haben wir n zusammengehörige Wertepaare $\{x_i, y_i\}$ bestimmt. Aus den gemessenen Wertepaaren sind die Parameter a und b zu bestimmen.

Das kann man näherungsweise in einer grafischen Darstellung der Messpunkte erreichen, indem man eine Ausgleichsgerade so durch die Messpunkte legt, dass die Abweichungen minimal werden. Der Schnittpunkt der Ausgleichsgeraden mit der Ordinate bestimmt den Parameter b und der Anstieg der Geraden den Parameter a. Das Ergebnis hängt jedoch stark von der subjektiven Einschätzung ab.

Ein objektives Verfahren ist die lineare Regression. Die beiden Parameter werden so bestimmt, dass die Summe der Abweichungsquadrate zwischen Ausgleichsgerade und Messpunkten minimal wird (Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate). Die Rechenvorschrift für die Bestimmung der Parameter lautet hierbei

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

und

$$b = \frac{\bar{y}\overline{x^2} - \overline{xy}\bar{x}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Die überstrichenen Größen sind Mittelwerte, die nach der folgenden Vorschrift gebildet werden

$$\overline{v} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i \quad \text{mit} \quad v = x, y, xy, x^2, y^2.$$

[5] Ist das nicht der Fall, kann man den Zusammenhang oft mit geeigneten Koordinatentransformationen linearisieren.

Der Anstieg der Geraden a wird als Regressionskoeffizient bezeichnet.

Die statistischen Fehler der Parameter a und b erhält man aus der Beziehung

$$\Delta a = t\sqrt{\frac{\overline{y^2} + a^2\overline{x^2} - 2a\overline{xy} - 2b\overline{y} + 2ab\overline{x}}{(n-2)(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}} \quad \text{und}$$

$$\Delta b = \Delta a\sqrt{\overline{x^2}}.$$

Der Standardfehler Δy für einen Schätzwert von y, den man für einen bestimmten x-Wert durch Einsetzen in die Formel $y = ax + b$ erhält, berechnet sich zu

$$\Delta y = \sqrt{\frac{n}{n-2}(\overline{y^2} - \bar{y}^2 - \frac{(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y})^2}{\overline{x^2} - \overline{x}^2})}.$$

In verschiedenen Computerprogrammen und sogar Taschenrechnern können Sie auf diese programmierten Algorithmen zurückgreifen.