3 Messabweichung und Messunsicherheit

Überblick

- Einleitung, Begriffe und Definitionen
- Systematische Messabweichung
- Zufällige Messabweichung
- Angabe von Messunsicherheit und Messergebnis
- Literatur: DIN, „Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen“, Beuth, 1995.

Messabweichungen

- Messziel: Bestimmung des wahren Wertes x_w
- Messabweichung

$$e = x - x_w$$

- relative Messabweichung

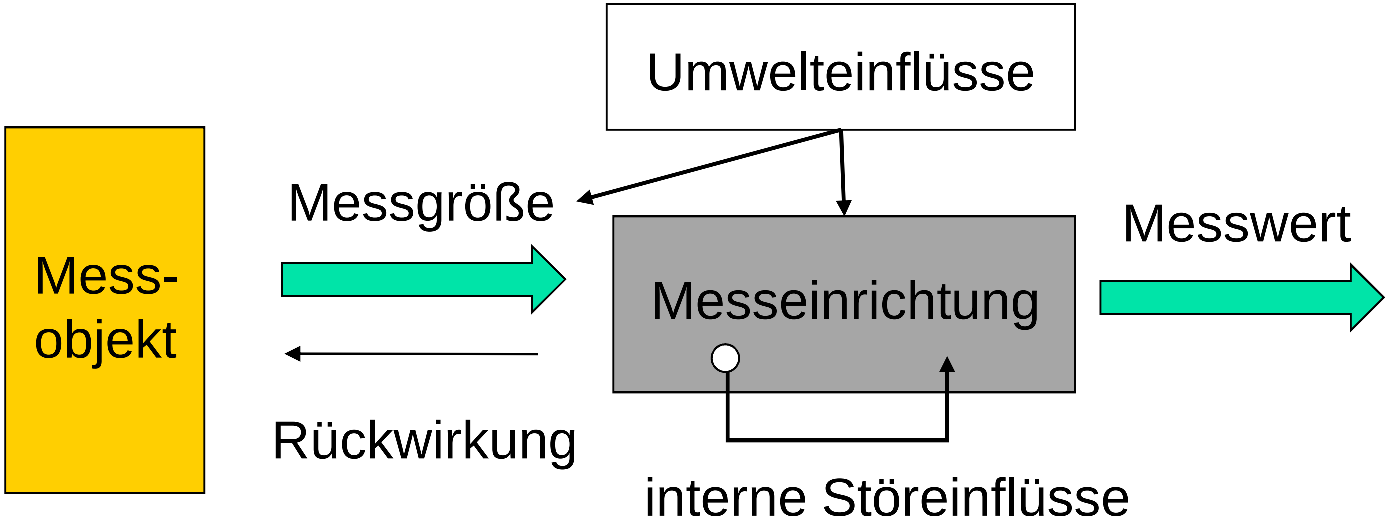
$$e_{rel} = \frac{e}{x_w} = \frac{x - x_w}{x_w} = \frac{x}{x_w} - 1$$

- Dimensionen:
  - Messabweichung: Dimension des Messwertes
  - relative Messabweichung: dimensionslos, %
- Beachte: wahrer Wert ←→ richtiger Wert

Messfehler

- Fehler: Nichteinhalten von Bedingungen im Sinne der Qualitätssicherung, defektes Gerät anderer Fehlerfall
  - allgemein: „Fehler“ = qualitativer Begriff für die Nichteinhaltung einer Forderung / Voraussetzung
- Messabweichung: Differenz innerhalb der spezifizierten Genauigkeit des Messgerätes
- Unterscheidung:
  - Messabweichung: innerhalb der spezifizierten Genauigkeit
  - Messfehler: Fehlerfall liegt vor.

Ursachen von Messabweichungen



- Wesentliche Störeinflüsse:
  - Rückwirkung der Messeinrichtung auf das Messobjekt
  - Umwelteinflüsse (Temperaturschwankungen, Feuchte, Luftdruck, Gebrauchslage, Störstrahlung…)
  - Innere Störeinflüsse (Nichtlinearitäten, Reibung…)

Ursachen von Messabweichungen

- Messabweichungen
  - systematische Messabweichungen
  - zufällige Messabweichungen

Bekannte Einflüsse: Systematische Messabweichungen

- Systematische Messabweichungen
  - konstanter Betrag, bestimmtes Vorzeichen
  - zeitlich nicht oder nur langsam veränderlich
  - nicht bestimmbar bei gleichbleibenden Bedingungen

- bekannte systematische Messabweichungen
  - korrigierbar
  - Korrektion K:

$$K = -e_{sys}$$

  - korrigierte Messwert x_{korr}:

$$x_{korr} = x + K$$

- unbekannte systematische Messabweichungen
  - nicht vollständig in Betrag und Vorzeichen bekannt
  - ggf. abschätzbar
  - nicht vollständig korrigierbar

Fortpflanzung systematischer Messabweichungen

- Messergebnis y als Funktion der Messwerte x_i

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

- Messabweichung e_y

$$e_y = y - y_w = f\left(x_1 + e_{x_1}, x_2 + e_{x_2}, \ldots, x_n + e_{x_n}\right) - f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

- … aus Einzelabweichungen (für $e_{x_i} << x_i$)

$$e_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} e_{x_i}$$

andere Schreibweise

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Regeln der Fortpflanzung systematische Messabweichungen

Addition von Messwerten → Addition der Abweichungen

$$y = x_1 + x_2 \qquad e_y = e_{x_1} + e_{x_2}$$

Subtraktion von Messwerten → Subtraktion der Abweichungen

$$y = x_1 - x_2 \qquad e_y = e_{x_1} - e_{x_2}$$

Multiplikation von Messwerten → Addition der relativen Abweichungen

$$y = x_1 x_2 \qquad e_y = x_2 e_{x_1} + x_1 e_{x_2}$$

$$e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{x_2 e_{x_1} + x_1 e_{x_2}}{x_1 x_2} = e_{rel,x_1} + e_{rel,x_2}$$

Division von Messwerten → Subtraktion der relativen Abweichungen

$$y = \frac{x_1}{x_2}; \quad e_y = \frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2} \qquad e_{rel} = \frac{e_y}{y} = \frac{\frac{1}{x_2} e_{x_1} - \frac{x_1}{x_2^2} e_{x_2}}{x_1 x_2^{-1}} = e_{rel,x_1} - e_{rel,x_2}$$

Unbekannte Einflüsse und Messunsicherheit Zufällige Messabweichungen

- Grund: nicht beherrschbare, nicht deterministische Einflüsse
- zufällige Messabweichungen sind nicht vorhersagbar
- → Streuung der Messwerte bei wiederholter Messung.
- Abgrenzung von unbekannten systematischen Messabweichungen in der Praxis oft schwierig bis unmöglich.
- Beschreibung der Messgröße X als <u>statistische Größe</u> (Zufallsgröße).

Einschub:
Beschreibung statistischer Größen

- Verteilungsfunktion F(x)

$$F(x) = \text{prob}(X \leq x)$$

- Verteilungsdichtefunktion f(x)

  (bei stetigen Verteilungsfunktionen)

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

- Es gilt:

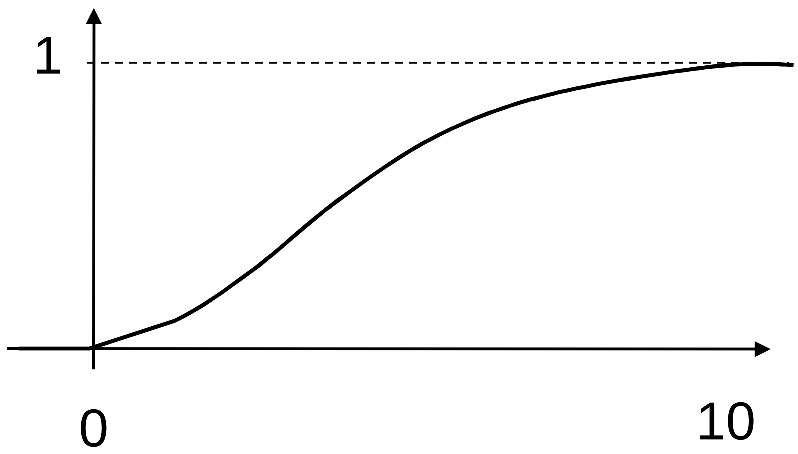
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$F(x \to \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

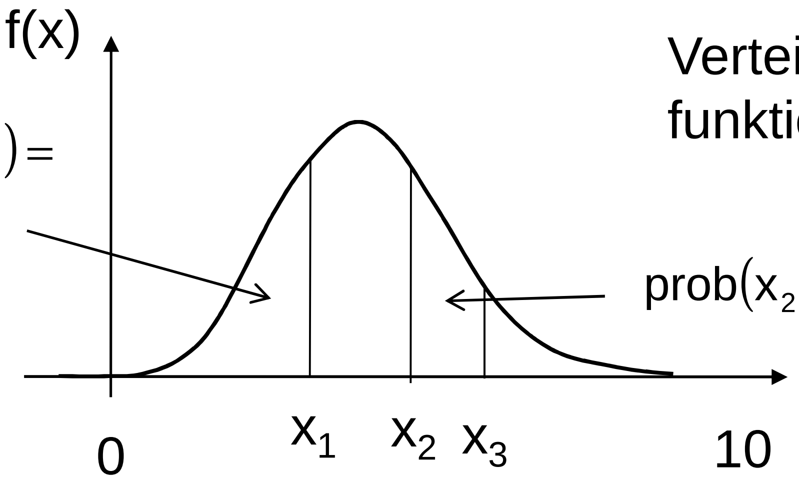
$$\text{prob}(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

Verteilungsfunktion und Verteilungsdichtefunktion

Beispiel: Zufallszahlen zwischen 0 und 10



Verteilungsfunktion F(x)



Verteilungsdichte-funktion $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

$$\mathrm{prob}(\infty < x \le x_1) = F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

$$\mathrm{prob}(x_2 < x \le x_3) = F(x_3) - F(x_2) = \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

- Erwartungswert

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx \quad \text{(für stetige Zufallsgrößen)}$$

- wahrer Wert der Messgröße X

$$x_w = \mu$$

(nach Korrektur der systematischen Abweichung)

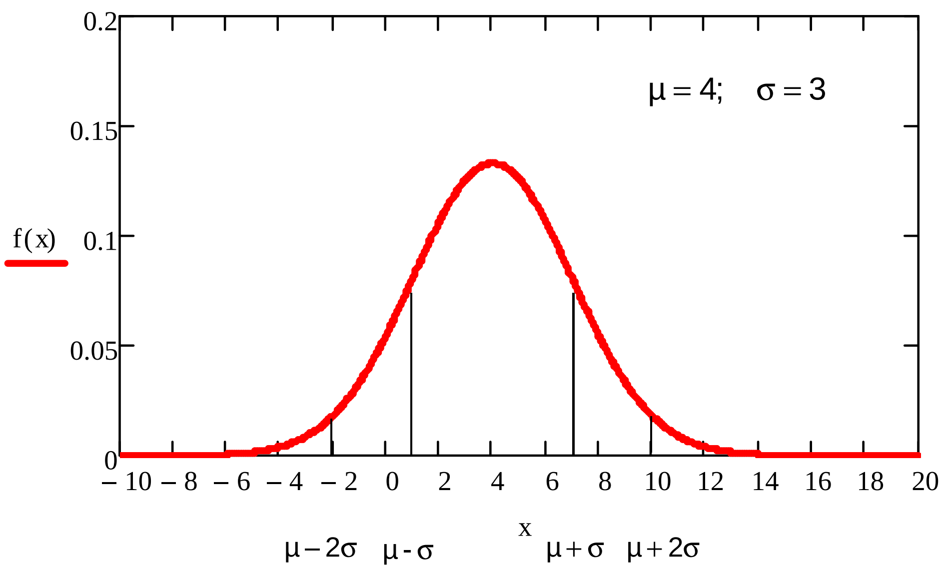
- Varianz (als Maß für die Streuung der Messwerte)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \mu)^2 f(x)\,dx$$

- Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Verteilungsfunktionen
1. Normalverteilung

- „Normal"- oder „Gaußverteilung"
- gute Näherung bei unbekannter statistischer Verteilung
- Verteilungsdichtefunktion: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

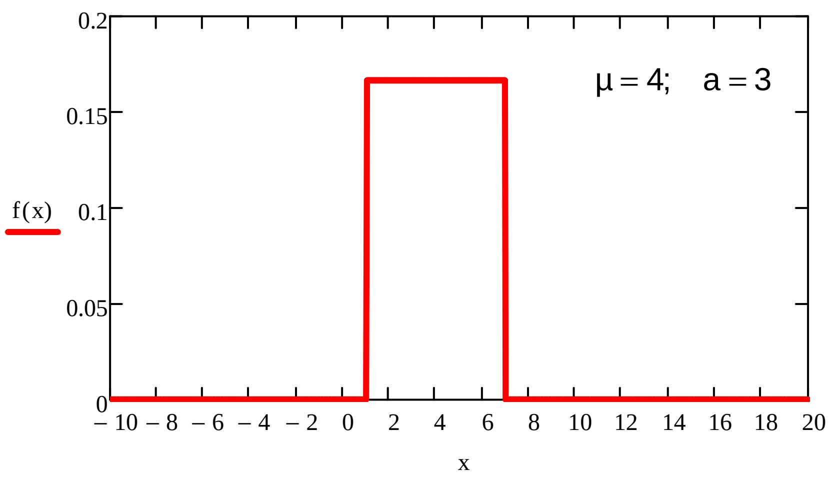


$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

Werteverteilung:
68,3% aller Werte liegen in $\mu\pm\sigma$
95,5% aller Werte liegen in $\mu\pm2\sigma$
99,7% aller Werte liegen in $\mu\pm3\sigma$

Verteilungsfunktionen
2. Gleichverteilung

- auch „Rechteckverteilung“
- alle vorkommenden Werte besitzen gleiche Wahrscheinlichkeit im Intervall
- Verteilungsdichtefunktion:



$$f(x) = \begin{cases} 1/(2a) & \mu\text{-}a < x < \mu + a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} a^2$$

Stichprobe einer Messgröße

- Grundgesamtheit: Gesamtmenge aller möglichen Messwerte x_i
- Erwartungswert und Varianz sind Eigenschaften der Grundgesamtheit.
- Praxis: nicht beliebig viele Messungen möglich.
- → Stichprobe mit dem Umfang n aus der Grundgesamtheit
- Erwartungswert und Varianz der Grund-gesamtheit müssen aus der Stichprobe geschätzt werden.

Stichprobe: Schätzung von Erwartungswert und Varianz

- Mittelwert $\overline{x}$ ist Schätzwert für Erwartungswert μ und damit für wahren Wert:

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- „empirische" Varianz s ist Schätzwert für σ^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

Beachte: Vorfaktor ist nun 1/(n-1), damit Schätzung erwartungstreu ist.

Vertrauensbereich für den Erwartungswert

- endlich große Stichprobe liefert <u>zufällige</u> Differenz zwischen Schätzwert $\bar{x}$ und wahrem Wert $\mu = x_w$
- m-Messreihen mit $\bar{x}_i$ und $s_i = s$ (i=1…m),
- für alle (gesamten) Messreihen folgt:

$$\bar{x}_g = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i \qquad s_g^{\,2} = \frac{1}{m} s_i^{\,2} \text{ , bzw: } \qquad s_g = \frac{1}{\sqrt{m}} s_i$$

- Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ aus n Einzelmessungen

$$\bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s < \mu < \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s \qquad t = t(n, \alpha)$$

Student bzw. t-Verteilung

- gibt den Faktor t an und geht mit großem n in die bekannte Standardabweichung über.*

α: Überschreitungs-wahrscheinlichkeit

1-α: Vertrauens-niveau

Vertrauensniveau (1-α)	63,8%	95%	99,73%
n=2	1,84	12,7	235,8
n=3	1,32	4,3	19,21
n=4	1,20	3,18	9,22
n=5	1,15	2,78	6,62
n=6	1,11	2,57	5,51
n=10	1,06	2,26	4,09
n=20	1,03	2,09	3,45
n=50	1,01	2,01	3,16
$n \rightarrow \infty$	1,00	1,96	3,00

*gilt für Normalverteilungen

Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

- Fall: Messergebnis y setzt sich aus mehreren Messgrößen x_i zusammen: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- Erwartungswerte der einzelnen Messgrößen

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_{n_i}$$

- Varianzen der einzelnen Messgrößen

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(x_{n_i} - \mu_n \right)^2$$

- Erwartungswert des Messergebnisses

$$\mu_y = f(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$$

Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

- Wie groß ist die Abweichung / Unsicherheit?
- Unterscheidung
  - ungünstigste Kombination („worst case"-Kombination)
  - Wahrscheinlichste Abweichung
- Worst-Case-Kombination: maximale Abweichung des Ergebnisses vom Mittelwert

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$$

$$\left|\Delta y\right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right|$$

Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

- statistische Kombination der Varianzen („Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz“)

$$\sigma_y^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)} \right)^2 \sigma_k^2 \right)$$

$$\sigma_y^2 = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \sigma_1 \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \sigma_2 \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \sigma_3 \right)^2 + \ldots..$$

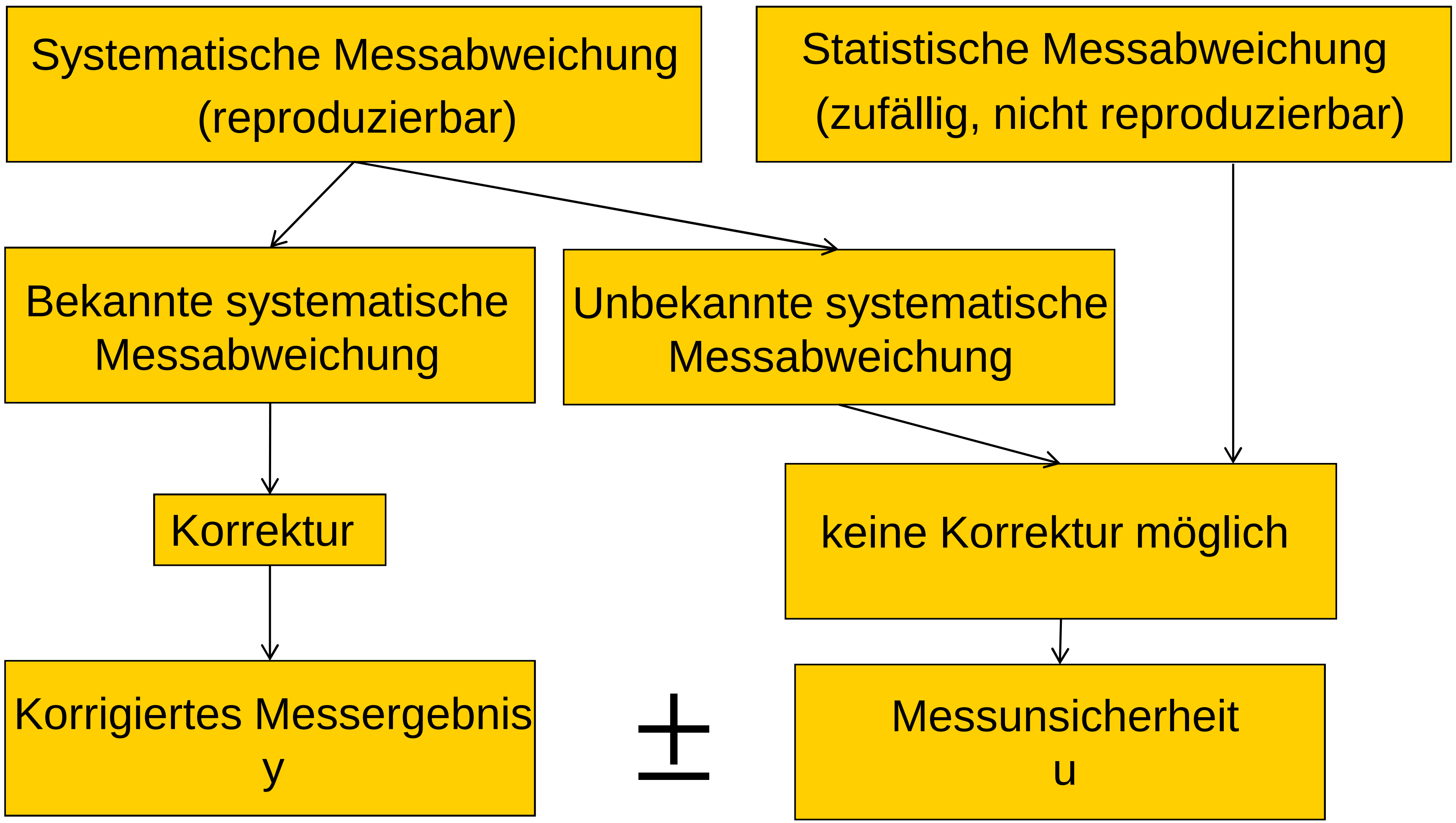
Fortpflanzung zufälliger Abweichungen

- Gleichungen werden auf Schätzwerte Mittelwert und empirische Varianz übertragen:

$$y = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)$$

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)} \right)^2 s_k^2 \right)$$

Messunsicherheit und Angabe des vollständigen Messergebnisses



nach: Mühl, Einführung…

Messunsicherheit und Angabe des vollständigen Messergebnisses

- Messunsicherheit u(y) als Standardunsicherheit, angegeben durch Standardabweichung
- relative Messunsicherheit $$u_{rel} = \frac{u}{|y|}$$
- Angabe des vollständigen Messergebnisses (Messgröße x, korrigiertes Messgergebnis y)
  - $x=y\pm u$ — Beispiel: U=2V ±0,1V
  - $x=y\times(1\pm u_{rel})$ — Beispiel: U=2V×(1±0,05)
  - y; u — Beispiel: 2V; 0,1V
  - $y;\ u_{rel}$ — Beispiel: 2V; 0,05 oder 2V; 5%
  - $x=y\ \pm u_{rel}$ — Beispiel: U=2V ±5%

Fortpflanzung von Messunsicherheiten

- Worst Case Abschätzung und Gaußsches Fortpflanzungsgesetz lassen sich auf die Messunsicherheiten übertragen:

a) Worst Case Abschätzung der Unsicherheit

$$u_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| u_{x_i}$$

b) Statistische Fortpflanzung der Unsicherheit

$$u_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2$$

Zusammenfassung Begriffe

- Standardunsicherheit

  (als Standardabweichung angegebene Unsicherheit)

  $$u = s$$

- kombinierte Standardunsicherheit

  (Unsicherheit einer Messgröße, errechnet aus mehreren Eingangsgrößen)

  $$u_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2}$$

- erweiterte Messunsicherheit

  (Messunsicherheit Vertrauensniveau, definiert durch k)

  $$U = k u_y$$

- Erweiterungsfaktor

  k=2 für Normalverteilung 2σ-Umgebung im Detail von Verteilungsfunktion und Genauigkeit abhängig

Lernziele Kapitel 3

- Begriffe
- Arten von Messabweichungen
  - Systematische Messabweichung
  - Zufällig Messabweichung
- Grundbegriffe der statistischen Beschreibung von Messgrößen
- Bestimmung der Messunsicherheit
- Angabe des vollständigen Messergebnisses