Prof. Dr. Manfred Schmidt März 2008

Einheitliches Verfahren zur Ermittlung von Messunsicherheiten

1. Allgemeines

- Jede Messung ist grundsätzlich mit Unsicherheiten behaftet, so dass zur vollständigen Angabe eines Messergebnisses auch die Angaben über die Messunsicherheiten gehören. Im Gegensatz zu der früher üblichen Bezeichnungsweise ist hier stets von „Messunsicherheiten“ und nicht von „Fehlern“ die Rede. Fehler sind in der jetzt üblichen Nomenklatur [DIN 1319, Leitfaden (1995)] systematische Abweichungen von Messgeräten und Messeinrichtungen, die durch eine Korrektion berücksichtigt werden, d. h. vor der Ermittlung der Messunsicherheiten korrigiert werden.
- Zumindest im Bereich der elektrischen Messtechnik ist (heute) die Reproduzierbarkeit innerhalb einer Messreihe so gut, dass die Gesamtunsicherheit vorwiegend von den nicht statistisch erfassbaren Unsicherheitsanteilen abhängt.
- Die Art der Ermittlung und Kombination der (Teil-)Unsicherheiten ist nicht einfach von der Mathematik vorgegeben, sondern basiert auch auf physikalisch – messtechnisch vertretbaren und für die Praxis brauchbaren Ansätzen. Das Verfahren der Berechnung bzw. Abschätzung von Messunsicherheiten sollte
-
    - möglichst allgemein anwendbar,
    - in sich konsistent und einfach sein, und es sollte zu
    - realistischen Ansätzen führen.

- Die früher übliche lineare Addition der maximalen systematischen Teilunsicherheiten („worst case“) erfüllt sicher die erstgenannten Forderungen und ergibt Gesamtunsicherheiten, die „auf der sicheren Seite“ liegen. Mit zunehmender Anzahl der in die Abschätzung eingehenden Komponenten ergibt sich eine Überschätzung und keine realistische Abschätzung mehr.
- Alle in ein Messergebnis eingehenden physikalischen Größen werden als Zufallsvariablen behandelt, auch die Einflussgrößen. Eine Unterscheidung nach (den vermeintlichen Ursachen) „statistischen“ und „systematischen“ Unsicherheiten ist daher nicht mehr notwendig. Lediglich bei der Art der Ermittlung der Teilunsicherheiten kann unterschieden werden in
-
    Typ A: Teilunsicherheiten, die mit statistischen Methoden erfasst werden und
    Typ B: Teilunsicherheiten, die auf andere Art ermittelt werden.

    Diese Unterteilung ist lediglich aus methodischer Sicht günstig, für die Ermittlung der Messunsicherheit ist sie ohne Bedeutung, weil die Behandlung der Teilunsicherheiten gleichartig erfolgt.

- Eine Messgröße Y wird als Ausgangs- oder Ergebnisgröße bezeichnet. Sie ist im Allgemeinen über eine Funktion G von einer Anzahl von Eingangsgrößen X_i (i = 1, 2, 3, ...n) abhängig:

$$Y = G\left(X_1, X_2, X_3, ..., X_i, ..., X_n\right) \tag{1}$$

    Da die wahren Werte der Größen nicht bekannt sind, müssen als Eingangsdaten für eine Auswertung Schätzwerte x_i herangezogen werden.
- Als Maß für die Unsicherheit der Eingangsgrößen dienen empirische Varianzen s_{xi}^2 (Quadrate der Standartabweichungen s_{xi}) bzw. entsprechende Schätzwerte für den Fall, dass die Eingangsgrößen nicht voneinander abhängen, d. h. nicht miteinander korreliert sind. Bei Korrelation zwischen Eingangsgrößen sind auch noch Kovarianzen zu berücksichtigen [Leitfaden (1995)].

- Kann für eine Eingangsgröße eine bestimmte Verteilung angenommen werden, ist die dieser Verteilung entsprechende Varianz anzusetzen.
  Falls nur der obere und untere Grenzwert einer Eingangsgröße bekannt sind, wird eine gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Werte innerhalb des Intervalls angenommen (Rechteckverteilung). Daher ist für x_i der Mittelwert der beiden Grenzwerte anzusetzen, die Varianz ist für die Rechteckverteilung zu berechnen.
- Die Wahl von Varianzen (und Kovarianzen) als Kenngrößen erlaubt die Anwendung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes in verallgemeinerter Form, bei der die Zufallsvariablen eine beliebige Verteilung haben dürfen.

2. Ansätze für die Eingangsdaten

- Bei Messreihen unter Wiederholungsbedingungen ist in bekannter Weise der arithmetische Mittelwert nach Gl. (2) als Schätzwert x_i anzusetzen.
-

$$x_i = \bar{v} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} v_{i,j} \qquad (2)$$

- Aus der Standartabweichung folgen gemäß der Gl. (3) und (4) die Schätzwerte für die Standardabweichung und die Varianz von X_i.
-

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_i - \bar{v})^2} \qquad (3)$$

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{n}s_v^2 \qquad (4)$$

- Bei nur wenigen Einzelmesswerten kann der oben dargestellte Ansatz zu einer Unterschätzung des Unsicherheitsbetrages führen. Für eine Anzahl von Einzelmesswerten $2 \leq n \leq 10$ wird empfohlen, die Varianz aufgrund der Ergebnisse früherer größerer Messreihen abzuschätzen. Ist dies nicht möglich, ist die Standartabweichung mit einem von der Zahl der Einzelmesswerte n abhängigen Faktor zu multiplizieren (entspricht dem t – Faktor nach DIN 1319, Teil 3).

- Liegt für eine Größe nur ein einzelner Wert vor (Messwert, Literaturwert, Angabe in einem Kalibrierschein o. ä.), so ist dieser mit den zugehörigen Varianzen bzw. Standartabweichungen zu übernehmen. Falls keine derartigen Angaben vorliegen, muss die Varianz aus der Erfahrung abgeschätzt werden. Die Verantwortung für eine realistische Abschätzung lässt sich in solchen Fällen auf keine Art in die mathematische Auswertung verlagern.

- Kann eine bestimmte Verteilung für eine Einflussgröße angenommen werden, so ist die dieser Verteilung entsprechende Varianz anzusetzen. Sind nur obere und untere Grenzwerte bekannt oder abschätzbar (z. B. Temperaturbereich oder Fehlergrenzen eines Messgerätes), so wird die gleiche Wahrscheinlichkeit für alle Werte innerhalb dieses Intervalls angenommen, also eine Rechteckverteilung. Für den Schätzwert x_i ist dann der Mittelwert der beiden Grenzwerte nach Gl. (5) anzusetzen:

$$x_i = \frac{1}{2}(a_{o,i} + a_{u,i}) \qquad (5)$$

Die Varianz wird nach den Gl. (6) bzw. (7) berechnet, je nachdem, ob die Grenzwerte als oberer und unterer Wert oder nur einseitig bezüglich x_i angegeben sind.

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{12}\left(a_{o,i} - a_{u,i}\right) \tag{6}$$

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{3} a_i^2 \tag{7}$$

- Mögliche Verteilungen, denen die Eingangsgrößen unterliegen können, sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt (KESSEL 2001):

Verteilungsform	**Parameter der Verteilung**	**u^2 (x)**
normal	Standardabweichung σ	σ^2
trapezförmig	Halbweite Δa Formfaktor β	$\frac{1}{6}(\Delta a)^2 \cdot (1+\beta^2)$
rechteckförmig	Halbweite Δa	$\frac{(\Delta a)^2}{3}$
dreieckförmig	Halbweite Δa	$\frac{(\Delta a)^2}{6}$
U - förmig	Halbweite Δa	$\frac{(\Delta a)^2}{2}$

- In der Tabelle wird hier erstmals das Symbol *u* für die *Standardmessunsicherheit* einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (hier von Eingangsgrößen) verwendet; sie ist identisch mit der Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

3. Berechnung der Ausgangsdaten bei unkorrelierten, voneinander unabhängigen Eingangsgrößen

- Das Messergebnis y stellt einen Schätzwert für den wahren Wert der Ausgangsgröße Y nach Gl. (1) dar. Es errechnet sich aus
-

$$y = G\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_v\right) \tag{8}$$

- Die Varianz der Ausgangsgrößen bei voneinander unabhängigen (unkorrelierten) Eingangsgrößen ist gleich der Summe der einzelnen Varianzen, jeweils multipliziert mit den Quadraten der zugehörigen partiellen Ableitungen der Funktion G (quadratische Addition)

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)^2 s_{xi}^2 \tag{9}$$

(Besteht die Funktion G – wie häufig in der Elektrotechnik üblich – nur aus Produkten und Quotienten, so werden die Quadrate der partiellen Ableitungen alle gleich 1, dann können einfach die relativen Varianzen addiert werden. Diese relativen Varianzen sind auf die jeweilige Größe bezogenen Varianzen $(s_{xi} / x_i)^2$ bzw. $(s_y / y)^2$. Das trifft aber nicht für Summen oder Differenzen zu!)

- Die Angabe der Varianz s_y^2 bzw. der Standartabweichung s_y als Maß für die Unsicherheit eines Messergebnisses wird im Allgemeinen als ausreichend angesehen. Bei dieser Angabe wird der wahre Wert mit einer Wahrscheinlichkeit von 68,3% überdeckt.
  Ist jedoch eine Unsicherheitsangabe gefordert, die mit einer höheren Wahrscheinlichkeit den wahren Wert überdeckt (z. B. bei Kalibrierungen im industriellen Bereich), so ist als Gesamtunsicherheit u die mit dem Faktor k = 2 multiplizierte Standartabweichung anzugeben. Für eine Normalverteilung bedeutet k = 2, dass der wahre Wert mit einem Vertrauensniveau von 95% innerhalb des Unsicherheitsbereiches liegt (vgl. auch DIN 1319, Teil 3).

4. Berechnung der Ausgangsdaten bei korrelierten, voneinander abhängigen Eingangsgrößen

- **Grad der Korrelation** zwischen x_i und x_j wird durch geschätzten Korrelationskoeffizienten charakterisiert

$$r(x_i,\ x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)\cdot u(x_j)} = \frac{geschätzte\ Kovarianz\ von\ x_i\ und\ x_j}{Produkt\ der\ Unsicherheiten\ von\ x_i, x_j} \quad (10)$$

$$-1 \le r(x_i, x_j) \le +1$$

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot u(x_i, x_j) \quad (11)$$

$u(x_i, x_j)$ $= u(x_j, x_i)$ geschätzte Kovarianz von x_i und xj

$u_c^{\,2}(y)$ = kombinierte Varianz + Kovarianz

$$u_c^{\,2}(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^{\,2}\ u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} c_i\, c_j\ u(x_i)\, u(x_j)\cdot r(x_i \cdot x_j) \quad (12)$$

- **Sonderfall:** $r(x_i, x_j) = +1$

<u>für 2 Eingangsgrößen</u>

$$u_c^{\,2}(y) = c_1^{\,2} + u^2(x_1) + 2\, c_1 c_2\ u(x_1) u(x_2)\cdot 1 = [c_1\, u(x_1) + c_2\, u(x_2)]^2 \quad (13)$$

<u>allgemein</u>

$$u_c^{\,2}(y) = \left(\sum_{i=1}^{N} c_1\, u(x_i)\right)^2 \quad (14)$$

$$u_c(y) = \sum_{i=1}^{N} c_1\, u(x_i) = \sum_{i=1}^{N} u_i(y) \quad (15)$$

5. Tabellarische Übersicht (nach MELCHERT 1990)

Wiederholt gemessene Größen

Messwerte $v_{i,j}$ (j = 1, 2, ..., n)

Mittelwert

$$x_i = \bar{v} = \frac{1}{n} \overset{n}{\underset{j=1}{}} v_{i,j} \tag{16}$$

Standardabweichung

$$s_v = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (v_i - \bar{v})^2} \tag{17}$$

Varianz des Mittelwertes

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{n} s_v^2 \tag{18}$$

Größen, bei denen nur äußere Grenzwerte bekannt sind

Mittelwert

$$x_i = \frac{1}{2}(a_{o,i} + a_{u,i}) \tag{19}$$

Varianz

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{12}\left(a_{o,i} - a_{u,i}\right) \tag{20}$$

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{3} a_i^2 \tag{21}$$

Berechnung der Ausgangsdaten

Messergebnis

$$y = G\left(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_v\right) \tag{22}$$

Varianz für **unkorrelierte** Eingangsgrößen

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial X_i}\right)^2 s_{xi}^2 \tag{23}$$

Varianz für **korrelierte** Eingangsgrößen

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 s_{xi}^2 + \sum_{i,k=1}^{v} \frac{\partial G}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial G}{\partial X_k} \cdot s_{x,ik} \tag{24}$$

mit

$$s_{x,ik} = s_{xi} \cdot s_{xk} \cdot r_{x,ik} \tag{25}$$

wobei

$i \neq k$ und $-1 \leq r \leq 1$

Sonderfall positive Korrelation mit r = +1

$$s_P{}^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial X_i} s_{xi} \right)^2 \rightarrow s_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G}{\partial X_i} s_{xi} \tag{26}$$

6. Literatur

ADUNKA, F.:
Messunsicherheiten: Theorie und Praxis
Essen: Vulkan-Verlag,1998

-
Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen
Hrsg.: DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Berlin; Wien; Zürich: Beuth, 1995

HARRIS, I. A.; WARNER, F. L.
Re-Examination of mismatch uncerttainy when measuring microwave power and attenuation
IEE Proc. Vol. 128 pt H No. 1, Febr. 1981

KESSEL, W.
Messunsicherheit – einige Begriffe und Folgerungen für die messtechnische Praxis
PTB – Mitteilungen 111. Jahrgang, Heft 3, September 2001

KOSE, V.; MELCHERT, F.
Quantenmaße in der elektrischen Messtechnik
Weinheim; New York; Basel; Cambridge: VCH, 1991

MELCHERT, F.
Ermittlung der Messunsicherheiten bei Kalibrierungen
In:
MELCHERT, F; STUMPER, U. (Hrsg.)
Fortschritte in der Hochfrequenztechnik, Vorträge des 86. PTB-Seminares
PTB-Bericht E – 38,
Physikalisch-Technische Bundesanstalt Braunschweig
Braunschweig, Juli 1990

7. Ermittlung von Messunsicherheiten – Beispiel für unkorrelierte Eingangsgrößen

Quelle: Kose, Melchert (1991)

Messung der Stromstärke I als Spannungsabfall am Messwiderstand R:

$I = 10A$ $\qquad R = 0{,}01\Omega$

Digitalvoltmeter mit $\qquad R_i > 10^9\,\Omega$

Raumtemperatur innerhalb $\qquad (23 \pm 3)°C$

Eingangsdaten:

- 12 Einzelmessungen $\qquad \bar{u} = 100{,}03\,mV;\ s_{x1} = 9{,}9\ 10^{-5}V$

  Varianz $\qquad s_{x1}^2 = \frac{98}{12}\cdot 10^{-10}V;$

  relative Varianz $\qquad (s'_{x1})^2 = \frac{8{,}6\quad 10^{\ 10}}{0{,}1^2} = 8{,}2\cdot 10^{-2}$

- Digitalvoltmeter

  Fehlergrenze für Messbereich 200 mV und für Temperaturbereich
  10° C ... 35° C:

  ± (0,025 % der Messgröße +0,01 % des Bereiches) für Messwert 100 mV:
  0,045 % **Annahme Rechteckverteilung!**

  Schätzwert für relative Varianz: $\qquad (s'_{x2})^2 = \frac{4{,}5^2}{3}\bullet 10^{-8} = 6.75\bullet 10^{-8}$

- Messwiderstand $\qquad$ R = 0,010018 Ω bei 10 A; 23° C

  relative Messunsicherheit: $\qquad 6\cdot 10^{-4}, k = 2$

  relativer Temperaturkoeffizient: $\qquad 5\cdot 10\ ^{5}/K$ zwischen 15°C...25°C

  relative Standardabweichung $\qquad 3\cdot 10^{-4}$ $\qquad$ wegen k = 2

  relative Varianz $\qquad (s'_{x4})^2 = 9\cdot 10^{-8}$

- Temperaturbereich $\qquad \pm 3K;$

  relativer Temperaturkoeffizient. $\qquad 5\cdot 10^{-5}/K$ bei Rechteckverteilung

  relative Varianz $\qquad (s'_{x4})^2 = \frac{1}{3}\ (3\cdot 5)^2\cdot 10^{\ -10} = 0{,}7510^{-8}$

Messergebnis und Gesamt - Messunsicherheit:

OHMsches Gesetz

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0{,}010003}{0{,}010018} = 9{,}985\ \text{A} \quad \text{(Messergebnis)}$$

relative Varianzen als arithmetische Summe:

$$(s'_y)^2 = (8{,}2 + 6{,}75 + 9 + 0{,}75) \cdot 10^{-8} = 24{,}7 \cdot 10^{-8}$$

relative Standardabweichung bzw. relative Gesamt-Messunsicherheit (1σ)

$$s'_y \approx 5 \cdot 10^{-4}, \quad k = 1$$

also: der gemessene elektrische Strom hat einen Wert von

$$\mathbf{(9{,}985 \pm 8{,}8 \cdot 10^{-3})\ A \qquad (k = 2)}$$