

3.1

Bei einem digitalen Messerfassungssystem, wie dem Digitaloszilloskop, wird eine zu messende Größe X in eine elektrische Größe umgewandelt. Dies erfolgt im Messumwandler. Mithilfe der analogen Signalverarbeitung (ASV) wird das elektrische Signal in eine primäre elektrische Größe, wie der Spannung umgeformt. Diese Spannung wird anschließend dem Analog-Digital-Umsetzer (ADU) zugeführt, welcher die Spannung in ein digitales Signal einer bestimmten Codierung wandelt. Zur Auswertung der digitalen Signale, werden diese in der digitalen Signalverarbeitung (DSV) zu Messwerten verarbeitet. Diese Messwerte können dann gespeichert, weiterverarbeitet oder angezeigt werden.

Die Signalabtastung kann dabei nach folgenden Verfahren stattfinden:

- Echtzeitabtastung
 - einzelner AD-Wandler
 - verschachtelter AD-Wandler (interleaved ADC)
- Äquivalenzzeitabtastung
 - sequenzielle Abtastung (sequential sampling)
 - Zufallsabtastung (random-repetitive sampling)

Die AD-Wandler können dabei nach folgenden Verfahren arbeiten.

- Parallelumsetzung
- Stufenumsetzung (sukzessive Approximation)
- Kaskadenumsetzung

Durch die Speicherung ist eine Pretriggerung und eine Posttriggerung möglich. Dabei werden die gespeicherten Daten so aufbereitet, dass das Signal vor bzw. nach einem bestimmten Zeitpunkt dargestellt werden kann.

3.2

Damit ein digitalisiertes Signal wieder rekonstruiert werden kann, müssen die Voraussetzungen des Shannon-Theorems erfüllt werden. Dieses besagt:

Ein bandbreitenbegrenztes Signal mit einer maximalen Frequenz f_{max} muss mit einer Abtastfrequenz f_a , welche der Bedingung

$$f_a \geq 2 \cdot f_{max} \quad (1)$$

entspricht abgetastet werden. Die Abtastzeitpunkte müssen äquidistant zueinander liegen.¹

3.3

Mit FFT ist die Fast-Fourier-Transformation (schnelle Fouriertransformation) gemeint. Grundlage für die FFT ist die diskrete Fourier-Transformation (DFT).

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (2)$$

Cooley und Turkey haben 1965 erstmals gezeigt, daß die Berechnung der DFT mit viel weniger Einzeloperationen ausgeführt werden kann. Den von ihnen verwendeten Algorithmus nannten sie FFT. Die FFT verringert den Aufwand an komplexen Operationen, die zur Berechnung der Spektrallinien der DFT erforderlich sind, etwa N^2 auf $N \cdot \ln N$ und schafft durch diese drastische Verringerung die Voraussetzung für die breite Anwendung der Frequenzanalyse in Echtzeit.

¹Prof. Dr. rer. nat. Alexander Richter: Script Messtechnik I, Kapitel 7, S.10

Da die Idee der FFT darin besteht, daß die Zahl der zu transformierenden Abtastwerte schrittweise halbiert wird, bis elementare Transformationen von jeweils 2 Abtastwerten übrig bleiben, setzt ihre Anwendung zwingend voraus, daß die Zahl N der zu transformierenden Abtastwerte eine Zweierpotenz ist.

Für die FFT gibt es mehrere Wege, die Anzahl der mathematischen Teiloperationen einzuschränken. Zwei dieser Methoden sind:

- Decimation in time
- Decimation in frequency

Bei der Methode Decimation in Time (DIT) erfolgt die erforderliche Zerlegung der DFT von N Werten in zwei Transformationen von jeweils $N/2$ Werten derart, dass die Summe in (2) in zwei Teilsummen aufgeteilt wird, von denen die erste alle Abtastwerte mit geradzahligem Index, die zweite alle Abtastwerte mit ungeradzahligem Index erfaßt:

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (3)$$

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k \text{ gerade}} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} + \sum_{k \text{ ungerade}} x(k) e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \right] \quad (4)$$

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-j2\pi \frac{2nk}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-j2\pi \frac{n(2k+1)}{N}} \right] \quad (5)$$

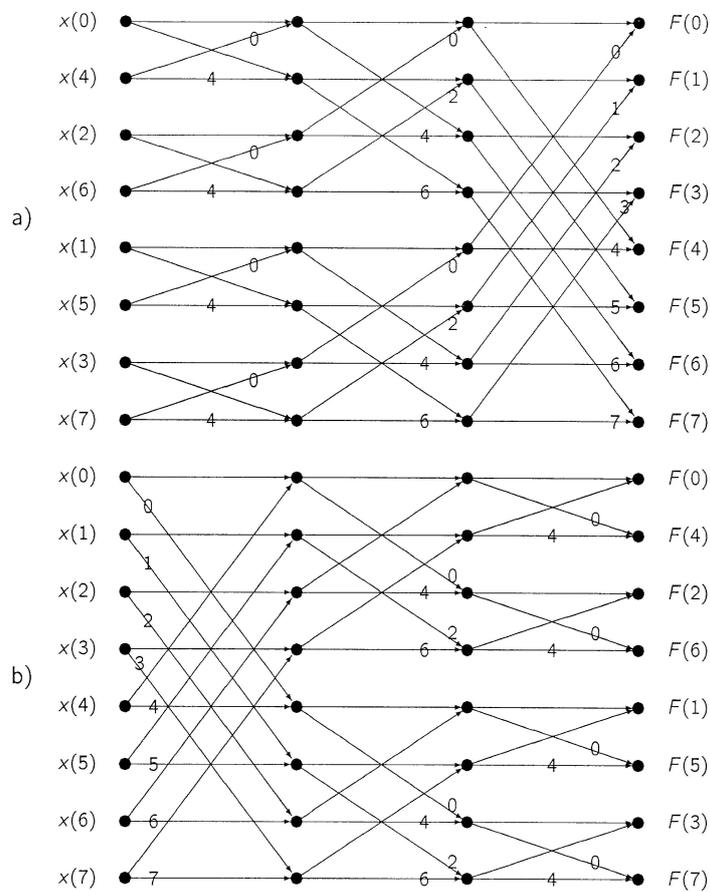
$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k) e^{-j2\pi \frac{nk}{(N/2)}} + e^{-j2\pi \frac{n}{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} x(2k+1) e^{-j2\pi \frac{nk}{(N/2)}} \right] \quad (6)$$

Bei der Methode Decimation in Frequency (DIF, Frequenzumordnung) teilt man die N-gliedrige Summe der DFT in eine untere und eine obere Hälfte ein. Das heißt, dass die Gleichung (5) in

$$\underline{X}(n) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N/2-1} x(k)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} + \sum_{k=N/2}^{N-1} x(k)e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \right] \quad (7)$$

zu ändern ist.

Das folgende Bild zeigt in a) das Schema der DIT und in b) das Schema der DIF.



[Hoffmann(2001), S.51]

3.4

Ein Unterschied zwischen FFT-Analysatoren und Spektrumanalysatoren ist, dass der FFT-Analysator digital und der Spektrumanalysator analog arbeitet. Der aber augenscheinlichste Unterschied besteht im Frequenzbereich der von FFT-Analysatoren reicht von DC bis ca. 100 kHz - bei Spezialgeräten bis 10 MHz - und der von Spektrumanalysatoren von einigen Hertz bis über 1 THz.

FFT-Analysatoren arbeiten nach einem Abtastverfahren ähnlich dem einer parallelen Bank von Filtern und eignen sich daher besonders zur Analyse transienter Signale. Spektrumanalysatoren tasten den Frequenzbereich sequentiell ab und können deswegen nur periodische Signale fehlerfrei analysieren. Eine Erhöhung der Selektivität bedingt beim Spektrumanalysator eine Verkleinerung der Auflösungsbandbreite, hingegen beim FFT-Analysator eine Vergrößerung des Meßfensters bzw. Reduzierung der Abtastrate.²

Weitere Unterschiede können der Tabelle der Versuchsanleitung unter 1. entnommen werden.

3.5

Aliasing tritt durch Unterabtastung des analogen Signals auf.

$$f_a < 2f_s \quad (8)$$

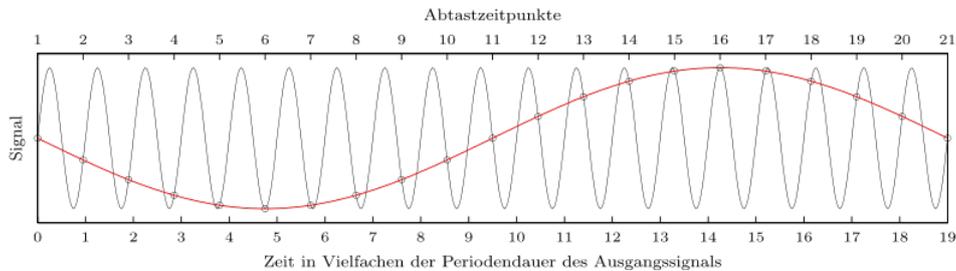
Dabei ist die Frequenz des abgetasteten Signals (Ergebnis der Abtastung) kleiner als die des Signals selbst.

$$f_{aliasing} < f_s \quad (9)$$

Aliasing kann auch durch Anteile hoher Frequenzen im abgetasteten Signal auftreten, da diese meist der Unterabtastung unterliegen, daher sollte jedes digitale Messgerät einen Anti-Aliasing-Filter der Abtastung vorschalten.

²[Schnorrenberg(1990), S.40]

Der Aliasing-Effekt hat zur Folge, dass ein falsches Spektrum an Frequenzen dargestellt wird. Die Frequenzanteile welche das Abtasttheorem nicht erfüllen, werden als niedrigere Frequenzen dargestellt. Es entstehen sozusagen "Geisterfrequenzen".

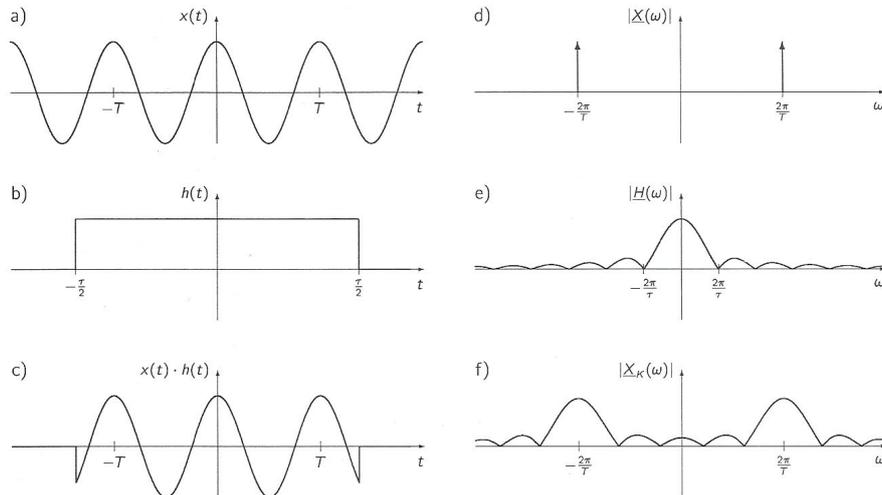


Die im obigen Bild dargestellte Veranschaulichung des Alias-Effekts zeigt ein kontinuierliches Ausgangssignal (schwarze Linie) und wird mit einer ungeeigneten Abtastfrequenz, die kleiner als vom Abtasttheorem gefordert ist, diskretisiert. Aus den erhaltenen Messwerten (Kreise) entsteht durch Interpolation ein verfälschtes Signal mit viel zu großer Periode (rote Linie).

3.6

Oft ist es erforderlich, anstelle eines längeren Signals nur Ausschnitte aus diesem Signal der Analyse zu unterwerfen. Der Vorgang des Ausschneidens entspricht mathematisch der Multiplikation der Originalfunktion x beispielsweise mit einer Rechteckfunktion, die nur für die Dauer des Analysezeitfensters den Wert 1 annimmt. Sie wird daher auch als Fensterfunktion $h(t)$ bezeichnet. Der Fourier-Transformation wird folglich nur das Produkt $x(t) \cdot h(t)$ zugeführt. Die im Zeitbereich durchzuführende Multiplikation entspricht im Bildbereich der Faltung $X(j\omega) * H(j\omega)$.

Das folgende Bild zeigt das Signal und die Fensterfunktion (hier Rechteckfunktion) im Zeit- und Bildbereich, sowie das Ergebnis der Multiplikation im Zeitbereich bzw. der Faltung im Bildbereich. Als Signal wurde hier eine Cosinusfunktion gewählt.

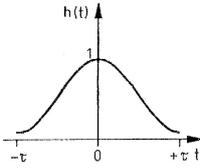
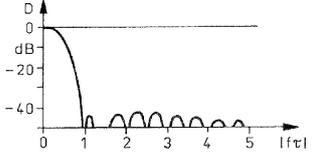
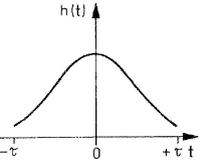
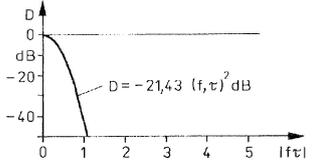
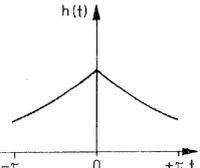
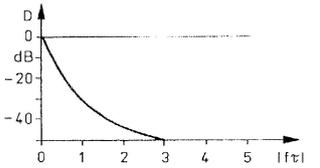


Es ist zu erkennen, dass an der Stelle der beiden Spektrallinien je eine Kopie des Spektrums des Rechteckfensters, also der Spaltfunktion, zu finden ist. Allgemein kann somit gesagt werden:

Wird aus einem Signal, das ein Linienspektrum besitzt, ein Analysezeitfenster ausgeschnitten, bekommt das entstehende Kurzzeitspektrum überall dort, wo sich ursprünglich eine Linie befand, eine Kopie des Spektrums der Fensterfunktion.³

³[Hoffmann(2001), S.34]

Es ist zu erkennen, dass das zeitliche Ausschneiden die Spektrallinien zu Frequenzbändern "verschmiert". Je länger man die Dauer des Zeitfensters macht, desto schärfer bleiben die Linien erhalten. Um ein zu starkes "verschmieren" zu verhindern, ist es nicht günstig eine Rechteckfunktion als Fensterfunktion zu verwenden, daher verwendet man Funktionen, welche gar keine oder stärker bedämpfte spektrale Nebenmaxima haben. Folgendes Bild zeigt eine Auswahl.

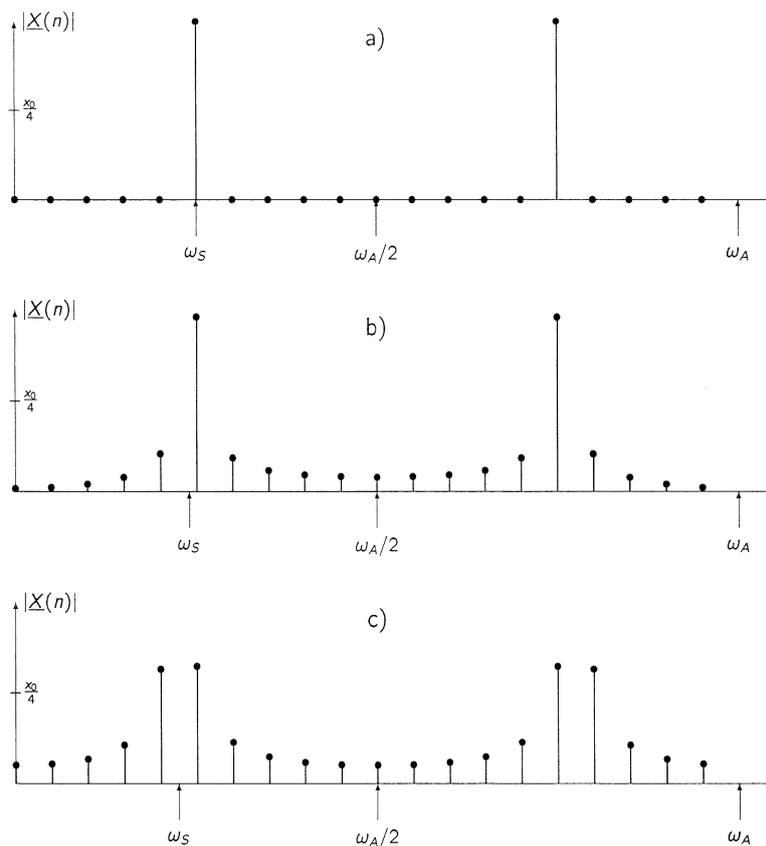
Zeitverlauf	Frequenzverlauf
<p>HAMMING-Fenster</p>  $h(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{\tau} & \text{für } -\tau \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	 $ H(f) = 2\tau \operatorname{si}(2\pi f\tau) \frac{0,54 - 0,08(2f\tau)^2}{1 - (2f\tau)^2}$
<p>GAUSS-Fenster (Zeitverlauf an HAMMING-Fenster angenähert)</p>  $h(t) = e^{-2(t/\tau)^2}$	 $ H(f) = \tau \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\pi f\tau)^2}$
<p>Symmetrisches Exponentialfenster</p>  $h(t) = e^{- t /\tau}$	 $ H(f) = \frac{2\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2}$

[Hoffmann(2001), S.136]

3.7

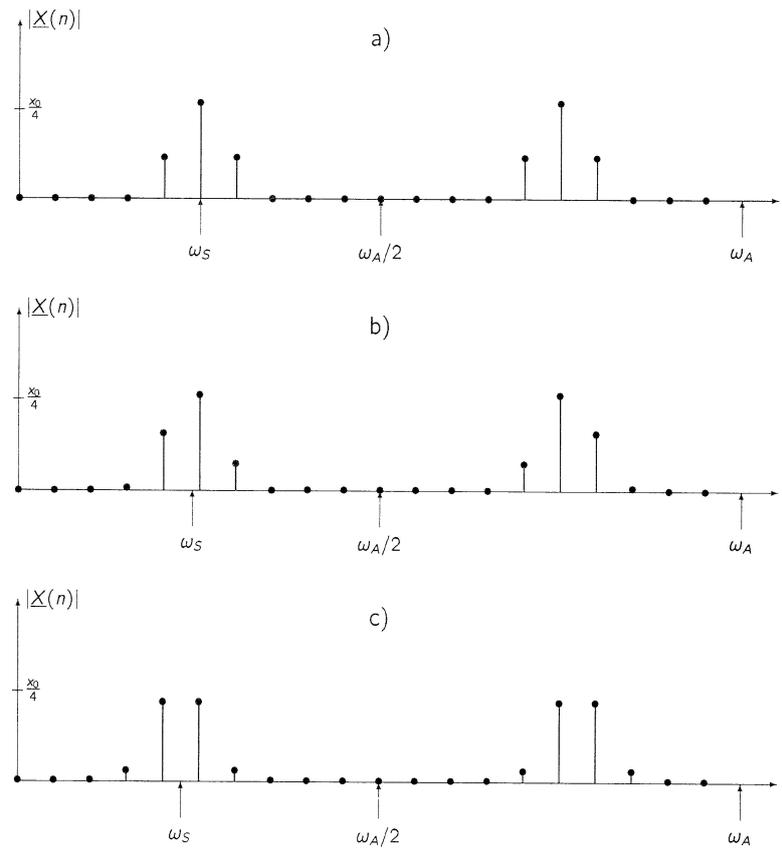
Leakage-Effekt oder auch Leck- bzw. Lattenzauneffekt tritt auf, wenn die Abtastfrequenz kein ganzzahliges Vielfaches der Signalfrequenz ist. Dadurch entstehen die Spektrallinien nicht an der Stelle der Signalfrequenz, sondern werden durch benachbarte Linien, mit dem Abstand ω_A/N , dargestellt.

Das folgende Bild illustriert dieses Verhalten. Die Frequenzanalyse eines Cosinussignals soll mit Hilfe einer DFT mit $N=20$ erfolgen. In einem ersten Fall wird angenommen, dass gerade fünf Signalperioden in das Zeitfenster passen. Damit wird periodensynchron abgetastet, und man erhält die korrekte Beschreibung des Cosinus in a). Das Bild ändert sich, wenn man die Abtastfrequenz verändert. In b) wurde sie etwas erhöht, so daß das Zeitfenster noch 4,8 Cosinusperioden umfaßt, während in c) noch weiter erhöht wurde, so dass das Zeitfenster 4,5 Cosinusperioden umfaßt. Dabei treten an den Zeitfenstergrenzen maximale Diskontinuitäten auf, und die Signalfrequenz liegt genau in der Mitte zwischen zwei DFT-Spektrallinien.

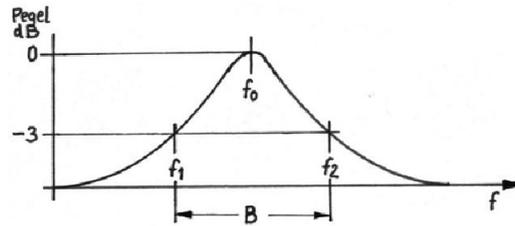


[Hoffmann(2001), S.54]

Das nächste Bild zeigt das Gleiche, aber unter Verwendung eines HAMMING-Fensters. Es fällt auf, dass in diesem Fall die drei Teilbilder einander deutlich ähnlicher werden. Bei periodensynchroner Abtastung a) werden die korrekten Cosinus-Linien leider verunschärft, jedoch in dem praktisch bedeutsamen Fall der nicht periodensynchronen Abtastung, der durch b) und c) repräsentiert wird, erkennt man den Nutzen der Anwendung der Fensterfunktion zur Dämpfung der fernab der Signalfrequenz befindlichen Linien.



[Hoffmann(2001), S.55]



B bezeichnet die absolute Bandbreite und wird durch

$$B = f_2 - f_1 \quad (10)$$

berechnet. f_2 ist hierbei die obere- und f_1 die untere Grenzfrequenz. Neben der absoluten Bandbreite gibt es auch noch eine relative Bandbreite. Diese bezieht sich auf die Resonanzfrequenz.

$$b = \frac{B}{f_{res}} = \frac{f_2 - f_1}{f_{res}} \quad (11)$$

Oktave bezeichnet den Frequenzbereich bei dem f_2 und f_1 ein Verhältnis von 2 haben. Bei einer 1/3 Oktav-Bandbreite (Terzbandbreite) ist dieses Verhältnis 1,26.

$$f_2 = \sqrt[3]{2} \cdot f_1 = 1,2599 \cdot f_1 \quad (12)$$

Bandbreite in Oktaven N		$y = f_2/f_1$	f_0 [Hz]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	$B = f_2 - f_1$	$Q = f_0/B$	B [%]
Grundton =	Prime	1,00000	1000	1000,00	1000,00	0,00	∞	0,00
Ganzton =	1/6 Oktave	1,12246	1000	943,87	1059,46	115,59	8,651	11,56
1 Terz gr. =	1/3 Oktave	1,25992	1000	890,90	1122,46	231,56	4,318	23,16
	1 Quinte v. =	1,41421	1000	840,90	1189,21	348,31	2,871	34,83
2 Terzen =	2/3 Oktave	1,58740	1000	793,70	1259,92	466,22	2,145	46,62
3 Terzen =	2 Quinten =	2,00000	1000	707,10	1414,21	707,10	1,414	70,71
4 Terzen =	1 1/3 Oktaven	2,51984	1000	629,96	1587,40	957,44	1,044	95,74
	3 Quinten =	2,82843	1000	594,60	1681,79	1087,19	0,920	108,70
5 Terzen =	1 2/3 Oktaven	3,17480	1000	561,23	1781,80	1220,57	0,819	122,20
6 Terzen =	4 Quinten =	4,00000	1000	500,00	2000,00	1500,00	0,667	150,00
7 Terzen =	2 1/3 Oktaven	5,03968	1000	445,45	2244,92	1799,47	0,557	179,90
	5 Quinten =	5,65685	1000	420,45	2378,41	1957,97	0,511	195,80
8 Terzen =	2 2/3 Oktaven	6,34962	1000	396,85	2519,84	2122,99	0,471	212,30
9 Terzen =	6 Quinten =	8,00000	1000	353,55	2828,43	2474,87	0,404	247,50

Beispiel für $f_0 = 1000\text{Hz}$

Eine Dekade bezeichnet ein Intervall, dessen Grenzen sich um den Faktor 10 unterscheiden. Anwendung findet sie z.B. bei der logarithmischen Darstellung mit dem dekadischen Logarithmus.

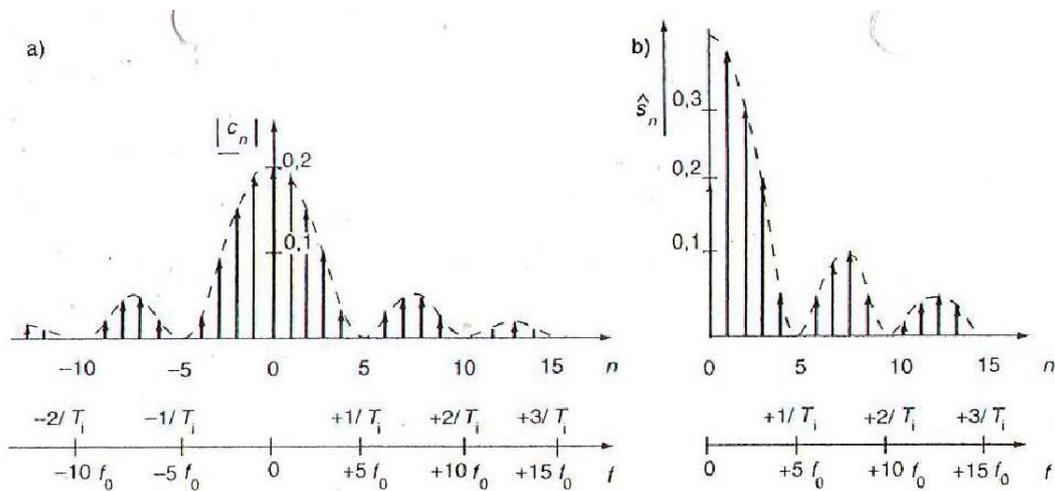
Im Gegensatz zur linearen Frequenzdarstellung, bei welcher die jeweiligen Werte ohne weitere mathematische Bearbeitung angetragen werden, wird bei der logarithmischen Darstellung der Logarithmus des Zahlenwertes an die Achsen angetragen. Hilfreich wird diese Art der Darstellung wenn der Wertebereich viele Größenordnungen überstreicht.

3.9

Das komplexe Spektrum erhält man durch die Fouriertransformation eines reellen Zeitsignals. Das Spektrum besteht aus positiven und negativen Frequenzen. Hierbei ist der Realteil spiegelsymmetrisch $\text{Re}(-f) = \text{Re}(f)$ und der Imaginärteil Punkt-zu-Punkt-symmetrisch $\text{Im}(-f) = -\text{Im}(f)$. Aus Real- und Imaginärteil lassen sich infolge Amplitude und Phase bestimmen.

Das Leistungsdichtespektrum ist die Verteilung der spektralen Anteile einer Schwingungsleistung über ein betrachtetes Frequenzspektrum. Das Integral über alle Frequenzanteile ergibt die komplette Leistung des Signals.

Das einseitige Spektrum entsteht durch hinüberklappen des zweiseitigen Spektrums. Als Klapplinie dient der Nullpunkt. Hierdurch verdoppelt sich dargestellte Amplitude.



[Eberhard Herter(2004), S.53]

3.10

Bei einem Histogramm handelt es sich um eine Häufigkeitsverteilung. Die darzustellenden Daten werden in Klassen eingeteilt und durch aneinandergrenzende Rechtecke mit konstanter oder variabler Breite dargestellt. Üblich ist es an der Abszisse die Variable (den Messwert) abzutragen und an der Ordinate die Häufigkeit, bzw. relative Häufigkeit.

Literatur

[Eberhard Herter(2004)] Wolfgang Lörchner Eberhard Herter. *Nachrichtentechnik*. Carl Hanser Verlag, 2004.

[Hoffmann(2001)] Rüdiger Hoffmann. *Grundlagen der Frequenzanalyse*. expert Verlag, 2001.

[Schnorrenberg(1990)] Werner Schnorrenberg. *Spektrumanalyse*. Vogel Verlag und Druck KG, 1990.