Versuchsvorbereitung

2.1.

a) Ein Vierpol ist passiv, wenn er keine Energie zuführt. In diesem Fall ist die Impedanzmatrix Z beziehungsweise Admitanzmatrix Y stets symmetrisch.

b)
Lineare Vierpole sind Schaltungen mit strom- und spannungsunabhängigen ohmschen Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten usw., deren Kennlinie in Bereichen linear angenommen werden.

c) Ein Vierpol heißt symmetrisch, wenn bei Vertauschung von Ein- und Ausgang die Quelle die gleiche Belastung erfährt wie vorher. Dazu ist nicht unbedingt eine symmetrische Vierpolstruktur erforderlich, umgekehrt sind jedoch symmetrische Strukturen stets symmetrische Vierpole.

2.8.

Der Wellenwiderstand gibt den Abschlusswiderstand einer Leitung an, bei dem keine stehenden Wellen auftreten. Hat eine Leitung beispielsweise folgende Werte: $L = 1{,}6\,\mu H$ und $C = 28\,pF$ so ergibt sich folgender Wellenwiderstand:

$$Z_w = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1{,}6\,\mu H}{28\,pF}} = 239\,\Omega$$

In der Vierpoltheorie werden Wellenwiderstände an passiven und symmetrischen Vierpole betrachtet.

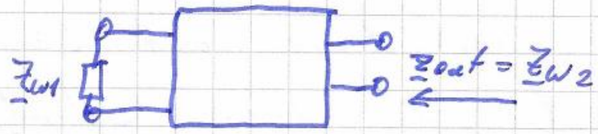
Wellenwiderstand passiver Vierpole

Für einen linearen passiven Vierpol gibt es die beiden charakteristischen komplexen Widerstände:

- Eingangs-Wellenwiderstand Z_{w1}
- Ausgangs-Wellenwiderstand Z_{w2}

Wird ein passiver Vierpol am Ausgang mit dem Ausgangswellenwiderstand belastet, dann ist sein Eingangswiderstand Z_{in} gleich dem Eingangswellenwiderstand:

Wird an den Eingang dieses Vierpols der Eingangswellenwiderstand geschaltet, dann ist sein Ausgangswiderstand $\underline{Z}_{out}$ gleich dem Ausgangswellenwiderstand:



Diese Definition der Wellenwiderstände ist nur für passive Vierpole sinnvoll.

Beide Wellenwiderstände können wie folgt berechnet werden:

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{22}} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{W2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{W2} + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{W1}$$

$$\underline{Z}_{out} = \frac{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_i}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_i} = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{Z}_i + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_i + \underline{A}_{11}} = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{Z}_{W1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{W1} + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_{W2}$$

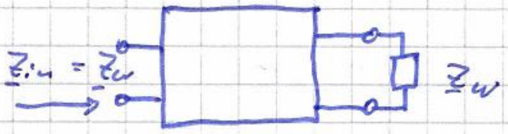
daraus ergibt sich:

$$\underline{Z}_{W1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}} \qquad \underline{Z}_{W2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$$

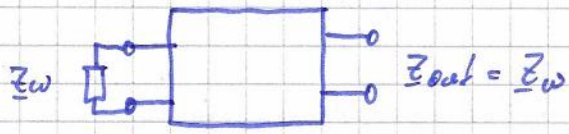
Wellenwiderstand symmetrischer Vierpole

Da ein symmetrischer Vierpol vorwärts und rückwärts die gleichen Übertragungseigenschaften hat, hat er auch nur einen Wellenwiderstand $\underline{Z}_w$.

Wird ein symmetrischer Vierpol am Ausgang mit dem Wellenwiderstand belastet, dann ist der Eingangswiderstand $\underline{Z}_{in}$ gleich diesem Wellenwiderstand und umgekehrt:



Wird an den Eingang eines symmetrischen Vierpols der Wellenwiderstand geschaltet, dann ist der Ausgangswiderstand $\underline{Z}_{out}$ gleich diesem Wellenwiderstand:



Mit den Bedingungen für symmetrische Vierpole

$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ und $\det(A) = 1$

ergibt sich für die Wellenwiderstände

$$\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2} = \underline{Z}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$$

womit sich bestätigt, dass es bei symmetrischen Vierpolen nur einen Wellenwiderstand gilt.

Übertragungsmaß:

Die Übertragungseigenschaften eines passiven Vierpols, der mit dem Ausgangswellenwiderstand $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{w2}$ abgeschlossen ist, können durch das Wellenübertragungsmaß beschrieben werden:

Spannungs-Wellenübertragungsmaß

$$g_u = \ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)$$

Strom-Wellenübertragungsmaß

$$g_i = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)$$

mittleres Wellenübertragungsmaß

$$g = \frac{1}{2} \cdot (g_u + g_i) = a + j\,b$$

mit $a = \mathrm{Re}\{g\}$ Wellendämpfungsmaß

und $b = \mathrm{Im}\{g\}$ Wellenphasenmaß (Winkelmaß)

Das mittlere Wellenübertragungsmaß g kann wie folgt berechnet werden:

passive Vierpol:

$$\text{I:} \quad e^{2g} = e^{g_u + g_i} = e^{g_u} \cdot e^{g_i} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$$

$$\text{II:} \quad e^{g_u} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{\underline{V}_{uf}} = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_a}$$

$$\text{III:} \quad e^{g_i} = \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} = \frac{1}{-\underline{V}_{if}} = \frac{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Y}_a} = \underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{22}$$

mit $\quad \underline{Z}_a = \underline{Z}_{w2} = \sqrt{\dfrac{\underline{A}_{22}\,\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$

$$\text{II}': \quad e^{g_u} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{w2}} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}$$

$$e^{g_i} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{22} + \underline{Z}_{w2}\,\underline{A}_{21} = \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}$$

$$\rightsquigarrow \quad e^{2g} = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}\right)\left(\underline{A}_{22} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}\right)$$

$$e^{2g} = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} + \sqrt{\underline{A}_{11}^2 \frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} + \sqrt{\underline{A}_{22}^2 \frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}^2\,\underline{A}_{21}^2\,\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}}$$

$$e^{2g} = \left(\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}\right)^2 + 2\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}\,\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}} + \left(\sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}\right)^2$$

$$e^{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}$$

$$g = a + jb = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}\right)$$

Symmetrischer Vierpol

Hier wird die Gleichung durch

$det(\underline{A}) = 1$; $A_{11} = A_{22}$ einfacher und lautet

$$g = a + jb = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}\right) = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{11}^2 - 1}\right)$$

Das mittlere Wellenübertragungsmaß g ist gleich dem Spannungs- und Strom-Wellenübertragungsmaß

$$g = g_u = g_i = \ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right) = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2}\right)$$

Die Kenngrößen Übertragungsmaß und Wellenwiderstand spielen in der Leitungstheorie eine große Rolle, denn hiermit kann das Übertragungsverhalten einer Leitung beschreiben. So lässt sich damit auch das Dämpfungsmaß ermitteln.