Fachhochschule Jena University of Applied Sciences Jena Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik	**Elektrische Meß- und Prüftechnik** Laborpraktikum	Versuch D ET(BA) WS 2010/2011

Messungen an passiven Vierpolen

Set:	3.08	**Testat:**	
Studienrichtung	KMT	Verantwortlicher:	Niebel
Teilnehmer:	Michael, Goldbach Jürgen, Döllinger	Datum:	10.01.2011 28.6.11 Niebel
			Unterschrift

EINGEGANGEN
13. JAN. 2011
Erled.: ....

Bitte beachten
2.1 a) b) c)
2.2 – 2. Bspl.
3.1 – Hilfswiderstand
3.3 – R_1, R_2, R_3

1 Theoretische …

1.1 Problemstell…

Die Vierpoltheorie (Th… … Nachrichtentechnik wichtig, da ohne die Kenntnis ihre… …richtenverbindungen nur sehr schwer möglich ist. Be… …ei Fernsprechteilnehmern sind eine Vielzahl von zwischen… …gsglieder, Entzerrer, Modulatoren enthalten, erforderlich. … Eigenschaften aufeinander abgestimmt sein.

Die Vierpoltheorie bild… …u dimensionieren, daß sie sich störungsfrei in die Ges… …r ein umfangreiches Gerät kann nur dann einwandfrei und … …nschaften der Einzelteile in einheitlicher Weise du… …t. Unzweckmäßig ist die Benutzung unterschiedlicher Kenn… …widerstände, logarithmische Übertragungsmaße, a… …ältnisse), zumal z.B. die Ein- und Ausgangswiderstände … …ffenden Vierpols sind, sondern von den Abschlußverhältni…

Die Aufgaben der Vier… …n:

1. Aufstellen von Kenn… …en Aufbauelementen des Vierpols abhängig sind

2. Klärung des Zusammenhanges zwischen den Kenngrößen und den Aufbauelementen sowie den allgemeinen Eigenschaften des Vierpols

3. Experimentelle Ermittlung der Kenngrößen durch äußere Messung am Vierpol.

4. Aufzeigen von Möglichkeiten des Überganges von einem Kenngrößensystem des Vierpols in ein anderes.

Das Prinzipschaltbild eines Vierpols zeigt die nebenstehende Abbildung. (Bild 1)

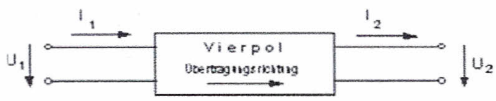


Bild **1**

1.2 Einteilung der Vierpole

Die Vierpole können hinsichtlich unterschiedlicher Kriterien eingeteilt werden, z.B. in :

- akive und passive Vierpole
- lineare und nichtlineare Vierpole
- symmetrische und unsymmetrische Vierpole

Vierpole können beliebig kompliziert aufgebaut sein. Werden sie für eine bestimmte Aufgabe konzipiert und berechnet. So wird die Anzahl der Schaltelemente minimiert. Folgende Grundschaltungen sind üblich :

a) Stern- oder T-Schaltung
b) überbrückte T-Schaltung
c) Dreieck oder - π -Schaltung
d) Brücken- oder X-Schaltung

1.3 Grundgleichungen des linearen Vierpols

Zur Beschreibung der Übertragungseigenschaften eines Vierpols benötigt man i.a. zwei Gleichungen, welche die Spannungen und Ströme am Eing- und Ausgang des Vierpols miteinander verknüpfen. Die auftretenden Proportionalitätsfaktoren werden Vierpolparameter genannt.
Für die T - Schaltung (siehe Bild 2) ergeben sich mittels der Kirchhoff'schen Sätze :

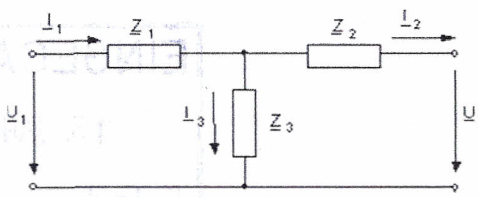


Bild 2

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_2 + \underline{I}_3\\ \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 + \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3\\ \underline{U}_2 &= -\underline{I}_2 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{I}_3 \cdot \underline{Z}_3\end{aligned} \qquad \text{(Gl 1)}$$

folgende Vierpolgleichungen :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{A} \cdot \underline{U}_2 + \underline{B} \cdot \underline{I}_2\\ \underline{I}_1 &= \underline{C} \cdot \underline{U}_2 + \underline{D} \cdot \underline{I}_2\end{aligned} \qquad \text{(Gl 2)}$$

mit :

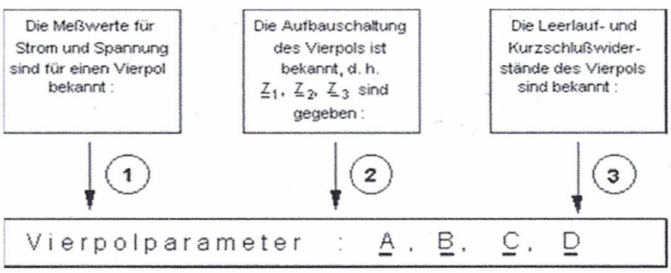
$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$
$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} \qquad \text{(Gl 3)}$$

Die Parameter $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ und $\underline{D}$ heißen „Kettenparameter". Neben diesen Parametern sind auch auch noch folgende üblich :

- Z - Parameter
- Y - Parameter
- h - Parameter

1.4 Die Kettenparameter des Vierpols

Die Kettenparameter sind aufgrund der Linearität des Vierpols spannungs- und stromunabhängig, verändern sich jedoch häufig mit der Frequenz.
Da mittels der Vierpoltheorie die Übertragungseigenschaften (Übertragungsmaß g und Wellenwiderstand Z_W) eines Vierpols ermittelt werden können, bieten sich je nach Problemstellung drei Arbeitsmethoden zur Ermittlung der Kettenparameter an :



1.4.1 Aus dem Gleichungssystem Gl. 2 folgen die Meßbedingungen zur Ermittlung der Kettenparameter aus Kurzschluß- und Leerlaufmessungen :

$\underline{I}_2 = 0$ Realisierung Leerlauf am Ausgang des Vierpols

$\underline{U}_2 = 0$ Realisierung Kurzschluß am Ausgang des Vierpols

$$\underline{A} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \text{ bei } \underline{I}_2 = 0 \qquad \underline{B} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \text{ bei } \underline{U}_2 = 0$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \text{ bei } \underline{I}_2 = 0 \qquad \underline{D} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \text{ bei } \underline{U}_2 = 0 \qquad (\text{Gl.4})$$

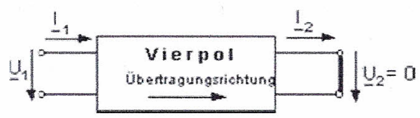
1.4.2 Sind die Aufbauwiderstände $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ des Vierpols bekannt, so können die Kettenparameter z.B. mittels des Gleichungssystems Gl. 3 bestimmt werden.

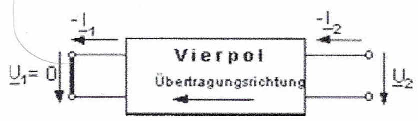
1.4.3 Bestimmt man die Eingangs- und Ausgangswiderstände des Vierpols bei Leerlauf und Kurzschluß, so ergibt sich folgender Zusammemhang mit den Kettenparametern :

1.4.3.1 Leerlauf :

$$\underline{W}_{1L} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \text{ bei } \underline{I}_2 = 0 \qquad \underline{W}_{2L} = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \text{ bei } -\underline{I}_1 = 0$$

1.4.3.2 Kurzschluß :





$$\underline{W}_{1K} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \text{ bei } \underline{U}_2 = 0 \qquad \underline{W}_{2K} = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \text{ bei } \underline{U}_1 = 0$$

1.4.3.3 Zusammenhang mit den Kettenparametern :

$$\underline{W}_{1L} = \frac{A}{C} \qquad \underline{W}_{2L} = \frac{D}{C} \qquad \underline{W}_{1K} = \frac{B}{D} \qquad \underline{W}_{2K} = \frac{B}{A} \qquad (\text{Gl. 5})$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung AD - BC = 1 können die Kettenparameter wie folgt aus den Leerlauf- und Kurzschlußwiderständen bestimmt werden :

$$A = \frac{\underline{W}_{1L}}{\sqrt{\underline{W}_{2L} \cdot (\underline{W}_{1L} - \underline{W}_{1K})}} \qquad B = \underline{W}_{1K} \cdot \sqrt{\frac{\underline{W}_{2L}}{\underline{W}_{1L} - \underline{W}_{1K}}} \qquad (\text{Gl. 6})$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{\underline{W}_{2L} \cdot (\underline{W}_{1L} - \underline{W}_{1K})}} \qquad D = \sqrt{\frac{\underline{W}_{2L}}{\underline{W}_{1L} - \underline{W}_{1K}}}$$

1.5 Einführung des Übertragungsmaßes g und des Wellenwiderstandes

In der Leitungstheorie haben sich das Übertragungsmaß g = a + jb und der Wellenwiderstand $\underline{Z}_W$ als die Größen erwiesen, welche sich am besten zur Charakterisierung der Übertragungseigenschaften von Fernleitungen eignen. Mit ihnen können in übersichtlicher Weise der Spannungs- und Stromverlauf sowie die sonstigen Eigenschaften einer Leitung beschrieben werden. Da Vierpole ihre stärkste Anwendung innerhalb der Nachrichtenübertragungstechnik auf Leitungen gefunden haben, liegt es nahe, zwecks Vereinheitlichung der Beschreibung zu versuchen, die Vierpolkonstanten A, B und C und D durch Größen zu ersetzen, welche eine den Leitungskonstanten g und Z ähnliche Bedeutung haben. Für eine Leitung mit der Länge l nehmen die aus der Leitungstheorie stammenden Übertragungsgleichungen folgende Form an:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \cdot \cosh(g) + \underline{Z}_W \cdot \sinh(g)$$
$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2 \cdot \frac{\sinh(g)}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_2 \cdot \cosh(g) \qquad (\text{Gl. } 7)$$

Vergleicht man dieses Gleichungssystem mit Gl.2 , so stellt man fest, daß für den Fall eines symmetrischen Vierpols gilt:

$$\underline{A} = \cosh(g) \qquad \underline{B} = \underline{Z}_W \cdot \sinh(g) \qquad \underline{C} = \frac{\sinh(g)}{\underline{Z}_W}$$

bzw.: $g = \operatorname{arcosh}(\underline{A})$ und $\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{\underline{B}}{\underline{C}}}$

1.6 Einführung des Reflexionsfaktors

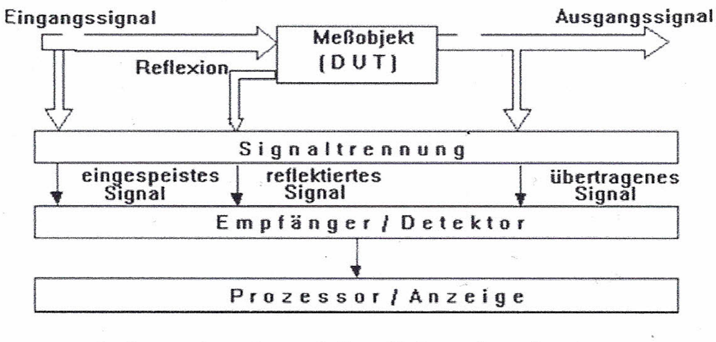
Wird eine HF-Leitung mit einem Widerstand abgeschlossen welcher nach Betrag und Phase gleich dem Wellenwiderstand der Leitung ist, so bildet sich ein Wellenfeld wie längs einer unendlich langen Leitung aus, d.h. es existiert nur eine vom Generator zur Last sich fortpflanzende Welle. Es gibt keine reflektierte Welle. Ist dagegen der Abschlußwiderstand $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_W$, so entsteht am Leitungsende eine reflektierte Welle. Der Reflexionsfaktor $\underline{r}$ - oftmals auch mit Γ bezeichnet - läßt sich berechnen aus :

$$\underline{r} = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_W}{\underline{Z}_A + \underline{Z}_W} \qquad (\text{Gl. } 8)$$

Aus dieser Gesetzmäßigkeit läßt sich leicht ein meßtechnisches Verfahren zur Bestimmung unbekannter komplexer Widerstände ableiten welches sowohl im Hoch- als auch im Höchstfrequenzbereich geeignet ist. Unter Annahme eines bekannten reellen Wellenwiderstandes $\underline{Z}_W$ der Meßanordnung (z.B. $Z_W = 50\ \Omega$) kann über eine Messung des Reflektionsfaktors der unbekannte komplexe Widerstand $\underline{Z}_X = \underline{Z}_A$ bestimmt werden :

$$\underline{Z}_X = \underline{Z}_W \cdot \frac{1+\underline{r}}{1-\underline{r}} \qquad (\text{Gl. } 9)$$

Meßgeräte die sowohl Reflexionsmessungen an Zwei- und Vierpolen als auch die Messung der Übertragungseigenschaften (an Netzwerken und Vierpolen) gestatten, heißen Netzwerkanalysatoren. Das Blockschaltbild eines derartigen Netzwerkanalysators ist im folgenden Bild dargestellt.



Aufbau eines kompletten Netzwerkanalysators

Zur Messung werden am Netzwerkanalysator die Betriebsarten „Reflexion" oder „Transmission" (Übertragung) eingestellt; nach der rechentechnischen Auswertung liefert der Netzwerkanalysator dann die Ergebnisse in der geeigneten Darstellung der Meßwerte (Kartesische Koordinaten, Polarkoordinaten, Smith-Diagramm).

2 Versuchsvorbereitung

Aufgabe 2.1 :
Welche Unterscheidungsmerkmale besitzen
a) aktive und passive Vierpole,
b) lineare und nichtlineare Vierpole,
c) symmetrische und unsymmetrische Vierpole ?

Aufgabe 2.2 :
Nennen Sie drei Anwendungsfälle für praktisch vorkommende Vierpole !
Skizzieren Sie die Grundstruktur der Innenschaltung des Vierpols !

Aufgabe 2. 3 :
Leiten Sie das Gleichungssystem Gls.3 mittels Gls.1 und Gls.2 her !

Aufgabe 2.4 :
Bestimmen Sie die Y- und Z- Parameter für einen Vierpol in T-Form !
(Hinweis : $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$, sind bekannt !)

Aufgabe 2.5 :
Welche Vereinfachungen ergeben sich für das Gleichungssystem Gls.6, wenn der Vierpol symmetrisch ist ?

Aufgabe 2.6 :
Bestimmen Sie die Z-Parameter aus den Kettenparametern !

Aufgabe 2. 7 :
Die Messung der Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände eines unbekannten Vierpols ergab, unabhängig von der Frequenz, von beiden Seiten aus die gleichen Werte, nämlich :

$$\underline{W}_{1L} = \underline{W}_{2L} = 90\,\Omega \qquad \text{und} \qquad \underline{W}_{1K} = \underline{W}_{2K} = 80\,\Omega$$

a) Wie sieht die diesem unbekannten Vierpol gleichwertige T-Ersatzschaltung aus ?
b) Bestimmen Sie aus den obigen Angaben die Kettenparameter des Vierpols !
c) Rechnen Sie die Kettenparameter in die Z-Parameter des unbekannten Vierpols um !

Aufgabe 2. 8 :
Was versteht man unter Übertragungsmaß $\underline{g}$ und Wellenwiderstand $\underline{Z}_W$?
Für welches Gebiet der Nachrichtentechnik sind diese Kenngrößen besonders wichtig ?

3 Versuchsdurchführung und Auswertung

Aufgabe 3.1 :
Untersuchen Sie meßtechnisch durch Bestimmung der Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände, ob der zu untersuchende Vierpol symetrisch ist !
Welche Schlußfolgerungen können Sie für die folgenden Messungen ziehen, falls dies der Fall ist ?

Hinweis : Die Messungen (Betrag und Phase) sind mittels Oszilloskop durchzuführen !
Strommessungen sind indirekt über den eingetragenen Meßwiderstand vorzunehmen !

Aufgabe 3. 2 :
Ermitteln Sie für das Versuchobjekt die komplexen Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände (Angabe in der Exponentialform und arithmetischen Form) bei zwei verschiedenen Frequenzen.
Folgende Richtwerte sind günstig:

Vierpol 1 und Vierpol 4 : 1 kHz ; 100 kHz

Vierpol 2 und Vierpol 5 :	1 kHz ;	10 kHz
Vierpol 3 und Vierpol 6 :	0,5 kHz ;	5 kHz

Hinweis : Stellen Sie die Amplitude der Eingangsspannung so ein, daß die Spannung über dem Meßwiderstand möglichst unverzerrt ist !

Aufgabe 3.3. :
Bestimmen Sie für den vorgegebenen Vierpol die komplexen Aufbauwiderstände für die T-Form !
Ermitteln Sie daraus die entsprechenden Bauelemente und geben Sie das Schaltbild des Vierpols (T-Schaltung) an !

Hinweis : Zur Bestimmung der Aufbauwiderstände ist es günstig, den Zusammenhang zwischen Bild 2, Gleichung 3 und Gleichung 6 zu betrachten.

Aufgabe 3.4 :
Kontrollieren Sie (soweit dies möglich ist) mit der RLC-Meßbrücke die Richtigkeit Ihres Meßergebnisses !

Aufgabe 3.5 :
Bestimmen Sie die Parameter des Vierpols in der Kettenform und in der Widerstandform !

Versuchsvorbreitung

2.1.

a) Ein Vierpol ist passiv, wenn er keine Energie zuführt. (In diesem Fall ist die Impedanzmatrix Z beziehungsweise Admitanzmatrix Y stets symmetrisch.) ?

b) Lineare Vierpole sind Schaltungen mit strom- und spannungsunabhängigen ohmschen Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten usw., deren Kennlinie in Bereichen linear angenommen werden. nur Teil! Es gibt noch mehr lineare VP! *)

c) Ein Vierpol heißt symmetrisch, wenn bei Vertauschung von Ein- und Ausgang die Quelle die gleiche Belastung erfährt wie vorher. Dazu ist nicht unbedingt eine symmetrische Vierpolstruktur erforderlich, umgekehrt sind jedoch symmetrische Strukturen stets symmetrische Vierpole.

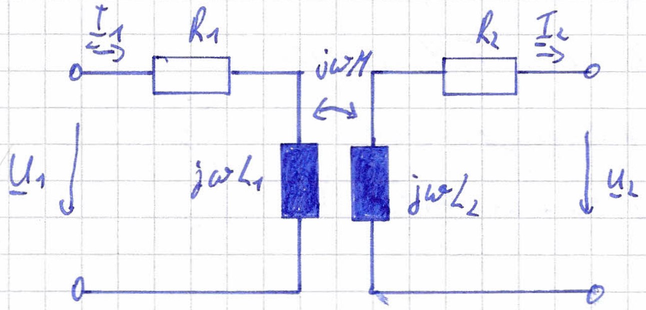
Reicht nicht! Was ist mit den anderen Eigenschaften?

*) Beschreiben Sie doch das Verhalten mit den von außen zugänglichen Größen! Was in einem VP drinsteckt, ist oft nicht bekannt!

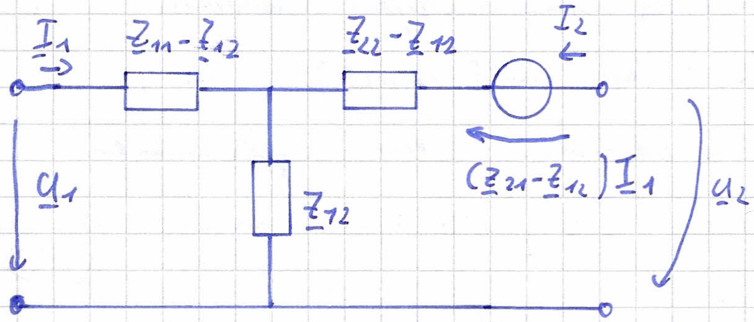
2.2.

1. Beispiel

(Transformator)



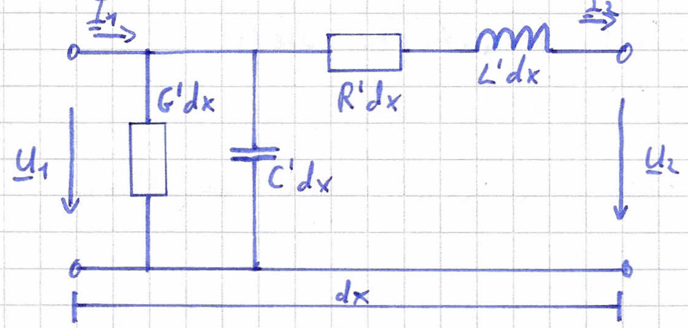
Ersatzschaltung in T-Form:



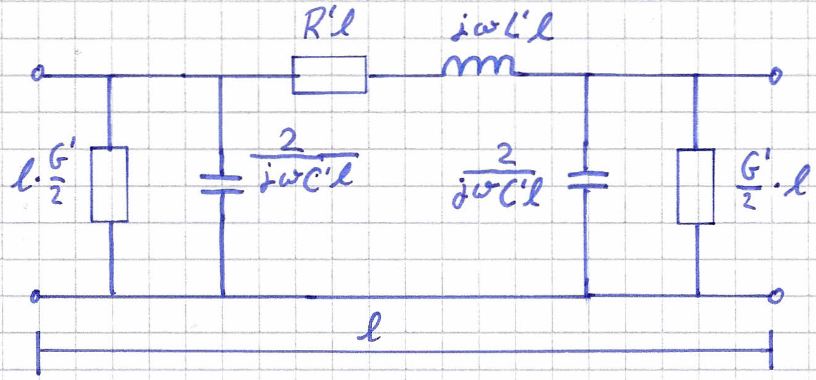
2. Beispiel

(Leitung)

Ersatzschaltung auf differenziell kleine Leitungslänge bezogen



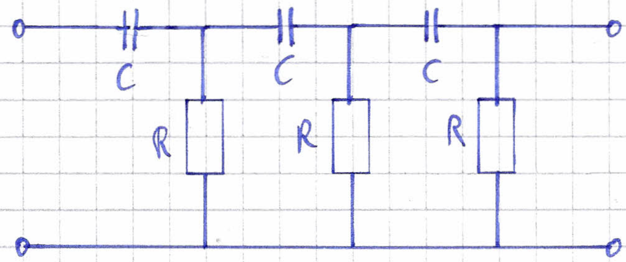
als Π-Schaltung:



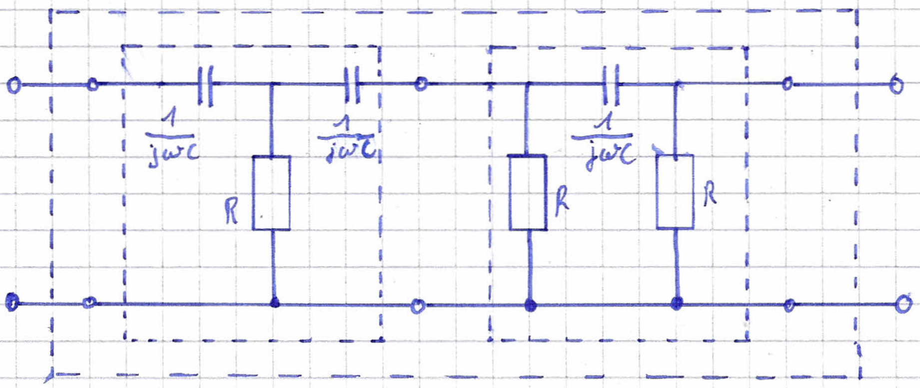
Gibt nicht die Eigenschaften der Leitung wieder

<u>3. Beispiel</u>

(Phasenschieberkette)



als Kettenschaltung eines T-Vierpols und eines Π-Vierpols:



2.3.

(I) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

(II) $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3$

(III) $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3$

(IV) $\underline{U}_1 = \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2$

(V) $\underline{U}_2 = (\underline{I}_1 - \underline{D}\,\underline{I}_2)\left(\frac{1}{\underline{C}}\right)$ $\quad \underline{I}_1 = \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2$

(I) in (II)

(VI) $\underline{U}_1 = (\underline{I}_2 + \underline{I}_3)\underline{Z}_1 + \underline{I}_3 \underline{Z}_3 = \underline{I}_2(\underline{Z}_1) + \underline{I}_3(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3)$

(III) in (IV)

$\underline{U}_1 = -\underline{A}\,\underline{I}_2 \underline{Z}_2 + \underline{A}\,\underline{I}_3 \underline{Z}_3 + \underline{B}\,\underline{I}_2$

(VII) $\underline{U}_1 = \underline{I}_2(\underline{B} - \underline{A}\,\underline{Z}_2) + \underline{I}_3(\underline{A}\,\underline{Z}_3)$

Koeffizientenvergleich (VI) (VII)

$\underline{I}_2 \Rightarrow \underline{B} - \underline{A}\,\underline{Z}_2 = \underline{Z}_1$

$\underline{I}_3 \Rightarrow \underline{A}\,\underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \quad \leadsto \underline{A} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{\underline{1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \underline{A}}}$

$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\left(\frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3}\right) = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{\underline{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \underline{B}}}$

(III) in (V)

$\underline{I}_1 = -\underline{I}_2 \underline{C}\,\underline{Z}_2 + \underline{I}_3 \underline{C}\,\underline{Z}_3 + \underline{D}\,\underline{I}_2$

(VIII) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2(-\underline{C}\,\underline{Z}_2 + \underline{D}) + \underline{I}_3(\underline{C}\,\underline{Z}_3)$

Koeffizientenvergleich (I) (VIII)

$\underline{C}\,\underline{Z}_3 = 1 \qquad \underline{\underline{\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3}}}$

$\underline{D} - \underline{C}\,\underline{Z}_2 = 1 \qquad \underline{\underline{\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}}$

2.4. Z-Parameter

(I) $\underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\, \underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\, \underline{I}_2$

(II) $\underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\, \underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\, \underline{I}_2$

(III) $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

(IV) $\underline{U}_1 = \underline{I}_1\, \underline{Z}_1 + \underline{I}_3\, \underline{Z}_3$

(V) $\underline{U}_2 = -\underline{I}_2\, \underline{Z}_2 + \underline{I}_3\, \underline{Z}_3$

aus (I) $\underline{Z}_{11} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\Rightarrow$ aus (III) $\left.\underline{I}_3 = \underline{I}_1\right|_{\underline{I}_2=0}$

$\Rightarrow$ aus (IV) $\left.\underline{U}_1 = \underline{I}_1\, \underline{Z}_1 + \underline{I}_1\, \underline{Z}_3\right|_{\underline{I}_3=\underline{I}_1}$

$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3) \rightsquigarrow \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$$

aus (I) $\underline{Z}_{12} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1=0}$ $\Rightarrow$ aus (III) $\left.\underline{I}_3 = -\underline{I}_2\right|_{\underline{I}_1=0}$

$\Rightarrow$ aus (IV) $\underline{U}_1 = 0 \cdot \underline{Z}_1 + (-\underline{I}_2) \cdot \underline{Z}_3$

$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = -\underline{Z}_3$

$$\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_3$$

aus (II) $\underline{Z}_{21} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2=0}$ $\Rightarrow$ aus (III) $\left.\underline{I}_3 = \underline{I}_1\right|_{\underline{I}_2=0}$

$\Rightarrow$ aus (V) $\underline{U}_2 = 0 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{I}_1\, \underline{Z}_3$

$\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_3$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3$$

aus (II)

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2}\Bigg|_{I_1 = 0} \Rightarrow$$

aus (III) $I_3 = -I_2$

aus (V)

$$U_2 = -I_2 Z_2 - I_2 Z_3$$

$$\frac{U_2}{I_2} = -Z_2 - Z_3$$

$$\underline{\underline{Z_{22} = -Z_2 - Z_3}}$$

$$Z_T = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & -Z_3 \\ Z_3 & -Z_2 - Z_3 \end{bmatrix}$$

$$\det Z_T = (Z_1 + Z_3)(-Z_2 - Z_3) - Z_3 \cdot (-Z_3)$$

$$= -Z_1 Z_2 - \cancel{Z_3^2} + \cancel{Z_3^2} - Z_2 Z_3 - Z_1 Z_3$$

$$\det Z_T = -Z_1 Z_2 - Z_2 Z_3 - Z_1 Z_3$$

2.4. Y-Parameter

(I) $\underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2$

(II) $\underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2$

(III) $\underline{U}_1 = \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2$

(IV) $\underline{I}_1 = \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2$

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

aus (I)

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\bigg|_{\underline{U}_2 = 0}$$

(III) $\underline{U}_1 = \underline{B}\,\underline{I}_2\Big|_{\underline{U}_2 = 0} \Rightarrow \underline{I}_2 = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{B}}$

(IV) $\underline{I}_1 = \underline{D}\,\underline{I}_2\Big|_{\underline{U}_2 = 0} \Rightarrow \underline{I}_1 = \dfrac{\underline{D}}{\underline{B}}\underline{U}_1$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{D}}{\underline{B}}$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{\underline{D}}{\underline{B}} = \frac{\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}} = \underline{\underline{\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2} = \underline{Y}_{11}}}$$

$$\underline{Y}_{11} = \frac{-\underline{Z}_{22}}{-\det \underline{Z}_T} = \frac{\underline{Z}_{22}}{\det \underline{Z}_T}$$

aus I

$$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\Big|_{\underline{U}_1=0}$$

III $\quad 0 = \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{I}_2\,\underline{B}\Big|_{\underline{U}_1=0} \qquad \underline{I}_2 = -\frac{\underline{A}}{\underline{B}}\underline{U}_2$

IV $\quad \underline{I}_1 = \underline{C}\,\underline{U}_2 + \underline{D}\,\underline{I}_2 \qquad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = \underline{C}\,\underline{U}_2 + \left(-\frac{\underline{A}\,\underline{D}}{\underline{B}}\underline{U}_2\right)$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} = \underline{C} - \frac{\underline{A}\,\underline{D}}{\underline{B}} = \underline{Y}_{12}$$

$$\underline{Y}_{12} = \frac{1}{\underline{Z}_3} - \frac{\frac{\underline{Z}_3+\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\cdot\frac{\underline{Z}_3+\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}{\frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\cancel{\underline{Z}_3}}}$$

$$= \frac{1}{\underline{Z}_3} - \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_3^2}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$$

$$= \frac{\cancel{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}+\cancel{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}+\cancel{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}-\cancel{\underline{Z}_1\underline{Z}_3}-\cancel{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}-\cancel{\underline{Z}_2\underline{Z}_3}-\underline{Z}_3^2}{\cancel{\underline{Z}_3}\left(\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2\right)}$$

$$\underline{Y}_{12} = -\frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{12} = -\frac{-\underline{Z}_{12}}{-\det\underline{Z}_T} = -\frac{\underline{Z}_{12}}{\det\underline{Z}_T}$$

aus II $\quad \underline{Y}_{21} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\Big|_{\underline{U}_2=0}$

III $\quad \underline{U}_1 = \underline{B}\,\underline{I}_2\Big|_{\underline{U}_2=0}$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} = \underline{B}^{-1}$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{1}{\underline{B}} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{21} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3+\underline{Z}_2\underline{Z}_3+\underline{Z}_1\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Y}_{21} = -\frac{\underline{Z}_{21}}{\det\underline{Z}_T}$$

aus (II)

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\bigg|_{\underline{U}_1 = 0}$$

(III) $0 = \underline{A}\,\underline{U}_2 + \underline{B}\,\underline{I}_2$

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = -\frac{\dfrac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}}{\dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}}$$

$$\underline{\underline{\underline{Y}_{22} = -\frac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}{\underline{Z}_1\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1\underline{Z}_3}}}}$$

$$\underline{Y}_{22} = \frac{\underline{Z}_{11}}{\det \underline{Z}_T}$$

$$\underline{Y}_T = \begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2}{-\det \underline{Z}_T} & \dfrac{+\underline{Z}_3}{-\det \underline{Z}_T} \\ \dfrac{\underline{Z}_3}{-\det \underline{Z}_T} & \dfrac{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1}{-\det \underline{Z}_T} \end{bmatrix}$$

2.5.

aus Symmetriebedingung ergibt sich:

$$\underline{W}_{1L} = \underline{W}_{2L} = \underline{W}_L \quad \text{und} \quad \underline{W}_{1K} = \underline{W}_{2K} = \underline{W}_K$$

$$\underline{A} = \frac{\underline{W}_L}{\sqrt{\underline{W}_L(\underline{W}_L - \underline{W}_K)}} = \frac{\underline{W}_L}{\sqrt{\underline{W}_L^2 - \underline{W}_L\underline{W}_K}} = \frac{\cancel{\underline{W}_L}\sqrt{\underline{W}_L^2 - \underline{W}_L\underline{W}_K}}{\cancel{\underline{W}_L}(\underline{W}_L - \underline{W}_K)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\underline{W}_L(\underline{W}_L - \underline{W}_K)}}{\underline{W}_L - \underline{W}_K} = \frac{\sqrt{\underline{W}_L}\cdot\sqrt{\underline{W}_L - \underline{W}_K}}{\underline{W}_L - \underline{W}_K} = \frac{\sqrt{\underline{W}_L}\cancel{\sqrt{\underline{W}_L - \underline{W}_K}}}{\cancel{\sqrt{\underline{W}_L - \underline{W}_K}}\sqrt{\underline{W}_L - \underline{W}_K}} =$$

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{W}_L}{\underline{W}_L - \underline{W}_K}} = \underline{D}$$ ✓

Vereinfachungen für Symmetrie ergeben weiterhin aus Gl. 6)

B und C sollten doch explizit angegeben werden!

$$\underline{\underline{\underline{A} = \underline{D} = \frac{\underline{B}}{\underline{W}_K} = \underline{C}\underline{W}_L}}$$ (✓)

2.6.

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \qquad \underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_3 \qquad \underline{B} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 \qquad \underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{Z}_{22} = -\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_{12}$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}$$

$$\underline{Z}_2 = -\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{12}$$

I $$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{12}}{-\underline{Z}_{12}}$$ II $$\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{22}}{-\underline{Z}_{12}}$$

III $$\underline{C} = \frac{1}{-\underline{Z}_{12}} = \frac{1}{\underline{Z}_{21}}$$

aus III

IV $\underline{Z}_{12} = -\frac{1}{\underline{C}}$ $\underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}}$

IV in II

$$\underline{D} = 1 + \frac{-\frac{1}{\underline{C}} - \underline{Z}_{22}}{\frac{1}{\underline{C}}} = 1 + \frac{\frac{-1 - \underline{Z}_{22}\underline{C}}{\cancel{\underline{C}}}}{\cancel{\frac{1}{\underline{C}}}} =$$

$$\underline{D} = -\underline{Z}_{22}\underline{C} \qquad \underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}}$$

IV in I

$$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_{11} - \frac{1}{\underline{C}}}{\frac{1}{\underline{C}}} = 1 + \frac{\frac{\underline{Z}_{11}\underline{C} - \cancel{1}}{\cancel{\underline{C}}}}{\cancel{\frac{1}{\underline{C}}}}$$

$$\underline{A} = \underline{Z}_{11}\underline{C} \qquad \underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}}$$

2.7.

b) $\underline{W}_{1L} = \underline{W}_{2L} = 90\,\Omega = \underline{W}_L$

$\underline{W}_{1k} = \underline{W}_{2k} = 80\,\Omega = \underline{W}_k$

Aus gegebenen Werten erkennt man, dass der Vierpol Symmetrie aufweist. ⇝ Vereinfachte Gleichungen aus 2.5. können verwendet werden.

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{W}_L}{\underline{W}_L - \underline{W}_k}} = \underline{D} = \frac{\underline{B}}{\underline{W}_k} = \underline{C}\,\underline{W}_L$$

$$\underline{\underline{\underline{A} = \underline{D} = \sqrt{\frac{90\,\Omega}{90\,\Omega - 80\,\Omega}} = 3}}$$

$$\underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{W}_k = 3 \cdot 80\,\Omega = \underline{\underline{240\,\Omega = \underline{B}}}$$

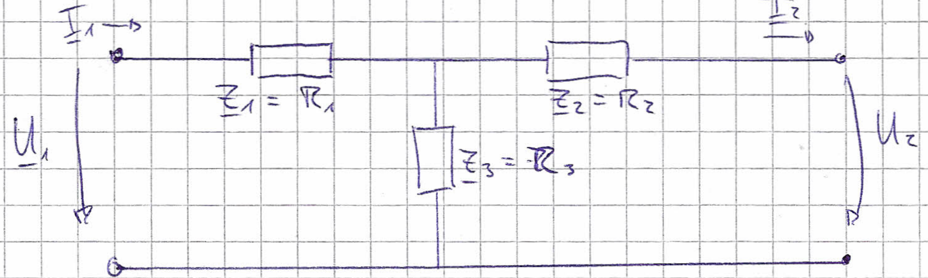
$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{W}_L^{-1} = \frac{3}{90\,\Omega} = \underline{\underline{\frac{1}{30\,\Omega} = \underline{C}}}$$

c) $\underline{\underline{\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{A}}{\underline{C}} = 90\,\Omega}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\underline{Z}_{22} = -\frac{\underline{D}}{\underline{C}} = -\frac{3}{\frac{1}{30\,\Omega}} = -90\,\Omega}}$

$\underline{\underline{\underline{Z}_{12} = -\frac{1}{\underline{C}} = -30\,\Omega}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\underline{Z}_{21} = \frac{1}{\underline{C}} = 30\,\Omega}}$

a) $\underline{\underline{\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{11} - \underline{Z}_{21} = 60\,\Omega}}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{21} = 30\,\Omega}}$

$\underline{\underline{\underline{Z}_2 = -\underline{Z}_{22} - \underline{Z}_{21} = 60\,\Omega}}$



Für Versuch:

$\underline{C} = \frac{1}{\underline{Z}_3} \rightsquigarrow \underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{C}}$

$\underline{A} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\frac{1}{\underline{C}}} = 1 + \underline{Z}_1 \underline{C} \rightsquigarrow \underline{Z}_1 = \frac{\underline{A} - 1}{\underline{C}}$

$\underline{D} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$ → wie bei $\underline{A}$ → $\underline{Z}_2 = \frac{\underline{D} - 1}{\underline{C}}$

2.8.

Der Wellenwiderstand gibt den Abschluss widerstand einer Leitung an, bei dem keine stehenden Wellen auftreten. Hat eine Leitung beispielsweise folgende Werte: $L = 1{,}6\,\mu H$ und $C = 28\,pF$ so ergibt sich folgender Wellenwiderstand:

$$Z_W = \sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{1{,}6\,\mu H}{28\,pF}} = 239\,\Omega$$

Gilt nur für ~~für~~ für hohe Frequenzen!

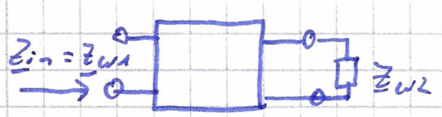
In der Vierpoltheorie werden Wellenwiderstände an passiven und symmetrischen Vierpolen betrachtet.

Wellenwiderstand passiver Vierpole

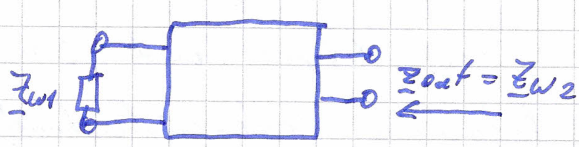
Für einen linearen passiven Vierpol gibt es die beiden charakteristischen komplexen Widerstände:

- Eingangs-Wellenwiderstand Z_{W1}
- Ausgangs-Wellenwiderstand Z_{W2}

Wird ein passiver Vierpol am Ausgang mit dem Ausgangswellenwiderstand belastet, dann ist sein Eingangswiderstand Z_{in} gleich dem Eingangswellenwiderstand:



Wird an den Eingang dieses Vierpols der Eingangswellenwiderstand geschaltet, dann ist sein Ausgangswiderstand $\underline{Z}_{out}$ gleich dem Ausgangswellenwiderstand:



Diese Definition der Wellenwiderstände ist nur für passive Vierpole sinnvoll. *)

Beide Wellenwiderstände können wie folgt berechnet werden:

$$\underline{Z}_{in} = \frac{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_{a}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_{a}} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{a} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{a} + \underline{A}_{22}} = \frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{w2} + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{w1}$$

$$\underline{Z}_{out} = \frac{\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_{i}}{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11} \cdot \underline{Y}_{i}} = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{Z}_{i} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{i} + \underline{A}_{11}} = \frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_{w1} + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_{w2}$$

daraus ergibt sich:

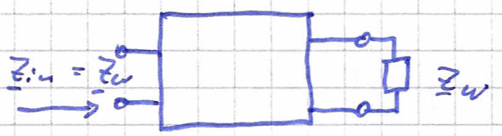
$$\underline{Z}_{w1} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{22}}} \qquad \underline{Z}_{w2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22} \cdot \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$$

Auch aktive VP haben Wellenwiderstände

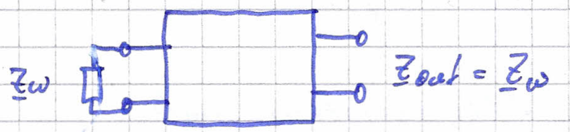
Wellenwiderstand symmetrischer Vierpole

Da ein symmetrischer Vierpol vorwärts und rückwärts die gleichen Übertragungseigenschaften hat, hat er auch nur einen Wellenwiderstand $\underline{Z}_w$.

Wird ein symmetrischer Vierpol am Ausgang mit dem Wellenwiderstand belastet, dann ist der Eingangswiderstand $\underline{Z}_{in}$ gleich diesem Wellenwiderstand und umgekehrt:



Wird an den Eingang eines symmetrischen Vierpols der Wellenwiderstand geschaltet, dann ist der Ausgangswiderstand $\underline{Z}_{out}$ gleich diesem Wellenwiderstand:



Mit den Bedingungen für symmetrische Vierpole

$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$ und $\det(A) = 1$

ergibt sich für die Wellenwiderstände

$$\underline{Z}_{w1} = \underline{Z}_{w2} = \underline{Z}_w = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}$$

womit sich bestätigt, dass es bei symmetrischen Vierpolen nur einen Wellenwiderstand gilt.

Übertragungsmaß:

Die Übertragungseigenschaften eines passiven Vierpols, der mit dem Ausgangswellenwiderstand $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{w2}$ abgeschlossen ist, können durch das Wellenübertragungsmaß beschrieben werden:

Spannungs-Wellenübertragungsmaß

$$g_u = \ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)$$

Strom-Wellenübertragungsmaß

$$g_i = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)$$

mittleres Wellenübertragungsmaß

$$g = \frac{1}{2} \cdot (g_u + g_i) = a + j\,b$$

mit $a = \mathrm{Re}\{g\}$ Wellendämpfungsmaß

und $b = \mathrm{Im}\{g\}$ Wellenphasenmaß (Winkelmaß)

Das mittlere Wellenübertragungsmaß g kann wie folgt berechnet werden:

passive Vierpol:

I: $e^{2g} = e^{g_u + g_i} = e^{g_u} \cdot e^{g_i} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$

II: $e^{g_u} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{\underline{V}_{uf}} = \underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \cdot \underline{Y}_a = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_a}$

III: $e^{g_i} = \frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2} = \frac{1}{-\underline{V}_{if}} = \frac{\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22} \cdot \underline{Y}_a}{\underline{Y}_a} = \underline{A}_{21} \cdot \underline{Z}_a + \underline{A}_{22}$

mit $\underline{Z}_a = \underline{Z}_{W2} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\,\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{21} \cdot \underline{A}_{11}}}$

II': $e^{g_u} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \underline{A}_{11} + \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{Z}_{W2}} = \underline{A}_{11} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}$

$e^{g_i} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \underline{A}_{22} + \underline{Z}_{W2}\,\underline{A}_{21} = \underline{A}_{22} \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}$

$\rightsquigarrow e^{2g} = \left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}\right)\left(\underline{A}_{22} + \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}\right)$

$e^{2g} = \underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22} + \sqrt{\underline{A}_{11}^2 \frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}} + \sqrt{\underline{A}_{22}^2 \frac{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}\,\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}$
$+ \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}^2\,\underline{A}_{21}^2\,\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}}$

$e^{2g} = \left(\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}}\right)^2 + 2\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}\,\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}} + \left(\sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}\right)^2$

$e^{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}$

$g = a + jb = \ln\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\,\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\,\underline{A}_{21}}\right)$

Symmetrischer Vierpol

Hier wird die Gleichung durch

$\det(\underline{A}) = 1$; $A_{11} = A_{22}$ einfacher und lautet

$$g = a + jb = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{12} \cdot \underline{A}_{21}}\right) = \ln\left(\underline{A}_{11} + \sqrt{\underline{A}_{11}^2 - 1}\right)$$

Das mittlere Wellenübertragungsmaß g ist gleich dem Spannungs- und Strom-Wellenübertragungsmaß

$$g = g_u = g_i = \ln\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right) = \ln\left(\frac{\underline{I}_1}{-\underline{I}_2}\right)$$

Die Kenngrößen Übertragungsmaß und Wellenwiderstand spielen in der Leitungstheorie eine große Rolle, denn hiermit kann das Übertragungsverhalten einer Leitung beschreiben. So lässt sich damit auch das Dämpfungsmaß ermitteln.

3.1.13.2.

Versuchsobjekt: 1

W_{1L}: $f = 1kHz$

$U_{1L} = 6{,}6V$ $R = 10\Omega$

$\underline{I}_{1L} = \frac{U_I}{R} = \frac{0{,}25V}{10\Omega} = 0{,}025A = 25mA$

$\varphi = -16{,}9°$ $|\underline{Z}_{1L}| = \frac{6{,}6V}{25mA} = 264\Omega$

W_{1K}: $f = 1kHz$

$U_{1K} = 7V$ $I_{1K} = \frac{0{,}46V}{10\Omega} = 0{,}046A = 46mA$

$\varphi = -75{,}6°$ Betrag?

W_{2L}: $f = 1kHz$

$U_{2L} = 6{,}7V$ $I_{2L} = \frac{0{,}26V}{10\Omega} = 0{,}026A = 26mA$

$\varphi = -18°$

W_{2K}: $f = 1kHz$

$U_{2K} = 7{,}1V$ $I_{2K} = \frac{0{,}46V}{10\Omega} = 0{,}046A = 46mA$

$\varphi = -75{,}6°$

$W_{1L} \approx W_{2L}$ $W_{1K} \approx W_{2K}$

daraus folgt

der Vierpol ist symmetrisch

$\underline{W_{1L} / W_{2L}:}$ $f = 100\,kHz$

$U_{1L} / U_{2L} = 6{,}5\,V$ $I_{2L} / I_{1L} = 0{,}026\ A = 26\ mA$

$\varphi = 0°$ ✓ nur Realanteil

$\underline{W_{2K} / W_{1K}:}$ $f = 100\,kHz$

$U_{1K} / U_{2K} = 1{,}31\,V$ $I_{1K} / I_{2K} = \dfrac{1{,}22\,V}{10\,\Omega} = 0{,}122\,A = 122\,mA$

$\varphi = 0°$ nur Realteil (✓)

ermittelte widerstände aus der Messung mit f = 1kHz

$$\underline{\underline{Z_{1L} = 254\,\Omega\, e^{-j\,17{,}6^\circ}}}$$

$$\underline{\underline{Z_{1L} = 242{,}6\,\Omega - j\,76{,}75\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{Z_{2L} = 248\,\Omega\, e^{-j\,18{,}7^\circ}}}$$

$$\underline{\underline{Z_{2L} = 235{,}4\,\Omega - j\,79{,}7\,\Omega}}$$

$\underline{Z}_{1L} \approx \underline{Z}_{2L} \rightsquigarrow$ Vierpol ist symmetrisch

$$\underline{\underline{Z_{1K} = 27{,}8\,\Omega - j\,147{,}4\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{Z_{1K} = 150\,\Omega\, e^{-j\,79{,}3^\circ}}}$$

$$\underline{\underline{Z_{2K} = 28{,}4\,\Omega - j\,149{,}5\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{Z_{2K} = 152{,}2\, e^{-j\,79{,}25^\circ}}}$$

$\underline{Z}_{2K} \approx \underline{Z}_{1K} \rightsquigarrow$ Vierpol ist symmetrisch

Wo haben Sie den Hilfswiderstand von 10 Ω herausgerechnet ?

ermittelte Widerstände aus den Messwerten mit $f = 100\,kHz$

$\underline{Z}_{1L} = \underline{Z}_{2L} = 240\,\Omega$

$\underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_{2K} = 0{,}73\,\Omega \approx 0\,\Omega$

3.3. / 3.5.

3.3.

$$\underline{A} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1L}}{\underline{Z}_{1L} - \underline{Z}_{1K}}} = \sqrt{\frac{238\,\Omega - j\,77{,}5\,\Omega}{238\,\Omega - j\,77{,}5 - (28\,\Omega - j\,148\,\Omega)}}$$

$$\underline{A} = \sqrt{0{,}91 - 0{,}67j} = \sqrt{1{,}13\,e^{-36{,}6j}}$$

$$\underline{A} = 1{,}06\,e^{-18{,}3j} = 1 - 0{,}33j$$

$$\underline{C} = \frac{\underline{A}}{\underline{Z}_{1L}} = \frac{1 - 0{,}33j}{238\,\Omega - j\,77{,}5\,\Omega}$$

$$\underline{C} = \left(4{,}21 \cdot 10^{-3} - 1{,}66 \cdot 10^{-5} \cdot j\right) \frac{1}{\Omega}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{C}} = \left(\frac{1}{4{,}21 \cdot 10^{-3} - 1{,}66 \cdot 10^{-5} \cdot j}\right) \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = 237{,}7\,\Omega + j\,0{,}94\,\Omega$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{A - 1}{C} = \left(\frac{1 - 0{,}33j - 1}{4{,}21 \cdot 10^{-3} - 1{,}66 \cdot 10^{-5} \cdot j}\right) \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 0{,}31\,\Omega - 78{,}4j\,\Omega$$

Würde der Messwiderstand von 10 Ω herausgerechnet?

$R_3 = Re\{\underline{Z}_3\}$ $X_3 = Im\{\underline{Z}_3\}$

$\underline{\underline{R_3 = 237{,}7\,\Omega}}$ (✓) $\underline{\underline{X_3 = +0{,}94\,\Omega}}$

Aufgrund des positive Phasenwinkel

$\varphi = 0{,}23^\circ$

scheint ein induktive Anteil vorhanden zu sein.

$X_3 = \omega L_3 = 2\pi f L_3 \Rightarrow L_3 = \frac{X_3}{\omega} = \frac{X_3}{2\pi f}$

$L_3 = \frac{0{,}94\,\Omega}{2\cdot\pi\cdot 1\,kHz} = 0{,}15\,mH$

Es gilt nun zwei Möglichkeiten. Entweder liegt eine Induktivität in Form einer Spule vor oder ein Drahtwiderstand, welcher auch einen induktiven Anteil hat.

$R_1 = R_2 = Re\{\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2\}$ $X_1 = X_2 = Im\{\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2\}$

$\underline{\underline{R_1 = R_2 = 0{,}31\,\Omega}}$ ✓ $\underline{\underline{X_1 = X_2 = 78{,}4\,\Omega}}$

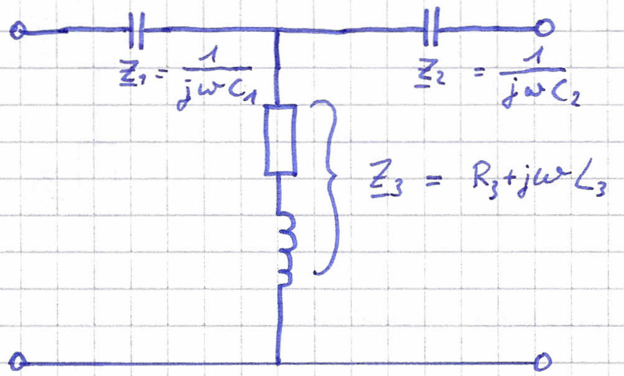
Aufgrund des Phasenwinkels $\varphi = -89{,}8$ ergibt sich ein stark kapazitiver Anteil. Davon ausgehend das $-89{,}8$ rund -90° sind, kann man davon ausgehen das es sich bei $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ und reine Kapazitäten, also Kondensatoren handelt.

$X_{1,2} = \frac{1}{\omega C_{1,2}} = \frac{1}{2\pi f C_{1,2}} \Rightarrow C_{1,2} = \frac{1}{2\pi f X_{1,2}}$

$C_{1,2} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot 1\,kHz\cdot 78{,}4\,\Omega}$ ✓

$\underline{\underline{C_1 = C_2 = 2\,\mu F}}$

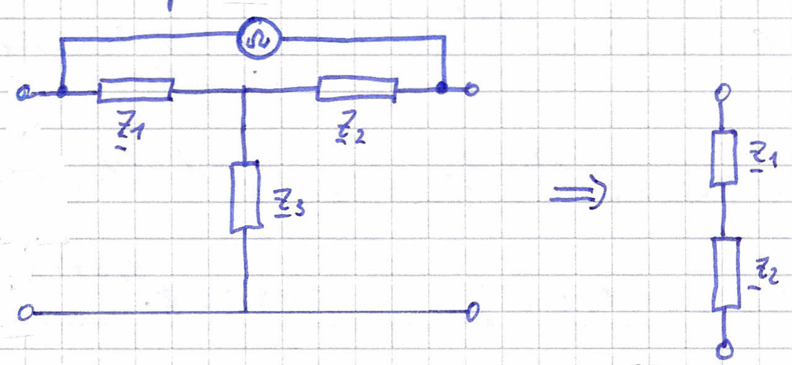
Aus den zuvor ermittelten Werten ergibt sich folgendes Schaltbild für den Vierpol in T-Form:



Wo sind hier R_1 und R_2 ?

3.4.

erste Messung:



$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = 243{,}3\ \Omega\ e^{-18^\circ j}$$

$R = 0{,}52\ \Omega \qquad C = 1{,}1\ \mu F$ } gemessen

Da bereits bekannt ist, dass der Vierpol symmetrisch ist kann folgendes ausgesagt werden:

$$\underline{\underline{R_1 = R_2 = \frac{R}{2} = \frac{0{,}52\ \Omega}{2} = 0{,}26\ \Omega}}$$

$$\underline{\underline{C_1 = C_2 = 2 \cdot C = 2 \cdot 1{,}1\ \mu F = 2{,}2\ \mu F}}$$

R_2 gemessen $\approx$ R_2 ermittelt

R_1 gemessen $\approx$ R_1 ermittelt

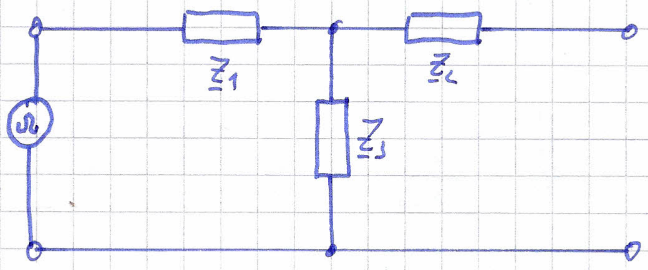
$\underline{\underline{0{,}26\ \Omega \approx 0{,}31\ \Omega}}$

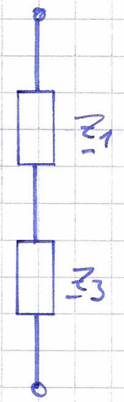
C_2 gemessen $\approx$ C_2 ermittelt

C_1 gemessen $\approx$ C_1 ermittelt

$\underline{\underline{2{,}2\ \mu F \approx 2\ \mu F}}$

2. Messung





$\underline{Z}_1$ aus vorherigen Messungen ermittelt:

$$\underline{Z}_1 = R_1 - \frac{j}{\omega C_1} = 0{,}26\,\Omega - \frac{j}{2\pi \cdot 1kHz \cdot 2{,}2\,\mu F}$$

$$\underline{Z}_1 = (0{,}26 - 72{,}34j)\,\Omega = 72{,}34\,e^{-89{,}8° j}\,\Omega$$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 231{,}4\,e^{-18°}\,\Omega$$ → mit Meßbrücke ermittelt

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z} - \underline{Z}_1 = 231{,}4\,e^{-18j}\,\Omega - 72{,}34\,e^{-89{,}8j}\,\Omega$$

$$\underline{\underline{\underline{Z}_3 = 219{,}82\,\Omega + 0{,}833j\,\Omega = 219{,}82\,e^{0{,}217j}\,\Omega}}$$

$$\underline{\underline{R_3 = Re\{\underline{Z}_3\} = 219{,}82\,\Omega \approx 237{,}7\,\Omega}}$$ → ermittelt

$$\varphi > 0 \rightsquigarrow X_3 = \omega L \rightarrow L = \frac{X_3}{\omega} \qquad X_3 = Im\{\underline{Z}_3\}$$

$$\underline{\underline{L = \frac{0{,}833\,\Omega}{2\pi\, 1kHz} = 0{,}133\,mH \approx 0{,}15\,mH}}$$ → ermittelt

3.5.

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = 78{,}4\, e^{-89{,}77 j}\ \Omega$$

$$\underline{Z}_3 = 237{,}7\, e^{0{,}227 j}\ \Omega$$

Kettenparameter:

$A = A_{11}$ $\quad C = A_{21}$

$B = A_{12}$ $\quad D = A_{22}$

$$\underline{A}_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3} = 1 + \frac{78{,}4\, e^{-89{,}77 j}\ \Omega}{237{,}7\, e^{+0{,}227 j}\ \Omega}$$

$$\underline{A}_{11} = 1 - 0{,}33 j = 1 e^{-18{,}26 j}$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}$$

$$\underline{A}_{12} = 78{,}4\, e^{-89{,}77 j} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 78{,}4\, e^{-89{,}77 j}}{237{,}7\, e^{0{,}227 j}}$$

$$\underline{A}_{12} = -25{,}23\ \Omega - j\, 156{,}9\ \Omega = 158{,}92\, e^{-99{,}13 j}\ \Omega$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{237{,}7\, e^{0{,}227 j}\ \Omega}$$

$$\underline{A}_{21} = 4{,}21 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1} - 1{,}67 \cdot 10^{-5} j\ \Omega^{-1} = 4{,}21 \cdot 10^{-3} e^{-0{,}227 j}\ \Omega^{-1}$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} = 1 - 0{,}33 j = 1 e^{-18{,}26 j}$$ da $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2$

Widerstandsparameter:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 78{,}4\,e^{-89{,}77j}\,\Omega + 237{,}7\,e^{0{,}227j}\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{11} = 238{,}01\,\Omega - j\,77{,}46\,\Omega = 250{,}3\,e^{-18j}\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{12} = -\underline{Z}_3 = -237{,}7\,\Omega - 0{,}942\,j\,\Omega = 237{,}7\,e^{-179{,}8j}\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{21} = \underline{Z}_3 = 237{,}7\,e^{j0{,}227}\,\Omega = 237{,}7\,\Omega + 0{,}94\,j\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{22} = -\underline{Z}_2 - \underline{Z}_3 = -78{,}4\,e^{-89{,}77j}\,\Omega - 237{,}7\,e^{0{,}227}\,\Omega$$

$$\underline{Z}_{22} = -238\,\Omega + 77{,}46\,j\,\Omega = 250{,}3\,e^{161{,}97}\,\Omega$$