Grundlagen Elektrotechnik I

Laborversuch I-2.0 (vorläufige „Nullversion“)

Die Wheatstone-Brücke als Abgleich- und Ausschlagbrücke

Dipl.-Ing. Ralf Schmidt, Dr. Andreas Seifert

Ideen, Ergänzungen, Kritik ausdrücklich erwünscht. Bitte an uns persönlich oder via E-Mail an: a.m.seifert@gmx.net

Berufsakademie Mosbach, Fachrichtung Mechatronik

Inhalt

Ausstattung

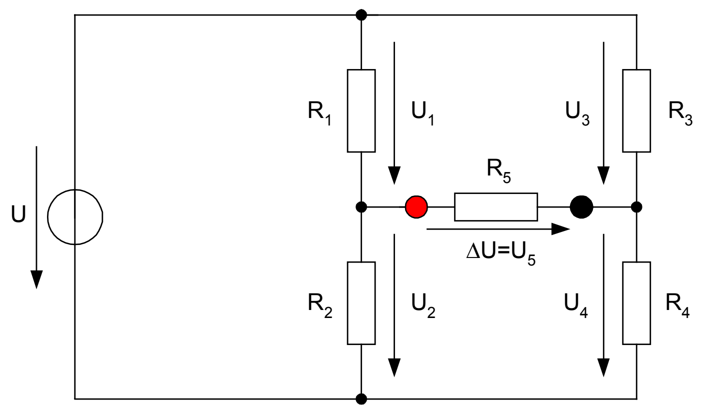
Folgende Geräte mit Zubehör stehen Ihnen zur Verfügung:

- Labornetzgerät mit einstellbarer Spannung und Strombegrenzung
- Digitalmultimeter
- Experimentierbrett und Widerstände
- 10-Gang-Wendelpotentiometer
- Widerstandsdekade (1 Ω -11 MΩ, 1 Watt)
- Messleitungen

1. Motivation, Vorüberlegungen

1.1 Die Wheatstone-Brücke

Die erstmals von Wheatstone verwendete und nach ihm benannte Brückenschaltung ermöglicht die Widerstandsmessung durch einen Vergleich mit bekannten Widerständen. Sie eignet sich zur Messung von Festwiderständen in der Form der Abgleichbrücke und zur Messung von Widerstandsänderungen als Ausschlagbrücke.



1.2 Wheatstone-Brücke als Abgleichbrücke

1.2.1 Abgleichbedingung

Die Wheatstone-Brücke kann als „Doppel-Spannungsteiler" aufgefasst werden, der aus einem Spannungsteiler mit den Widerständen R_1 und R_2 und aus einem Spannungsteiler mit den Widerständen R_3 und R_4 besteht.
Die „Brückenspannung" $\Delta U \equiv U_5$ ist im Leerlauf ($R_5 = \infty$) die Differenz der Spannungen $\frac{R_2}{R_1 + R_2} U$ und $\frac{R_4}{R_3 + R_4} U$, es ist also

▶▶▶ $$\Delta U = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right] U \, .$$

Für beliebige Versorgungsspannungen U wird $\Delta U = 0$, wenn die **Abgleichbedingung**

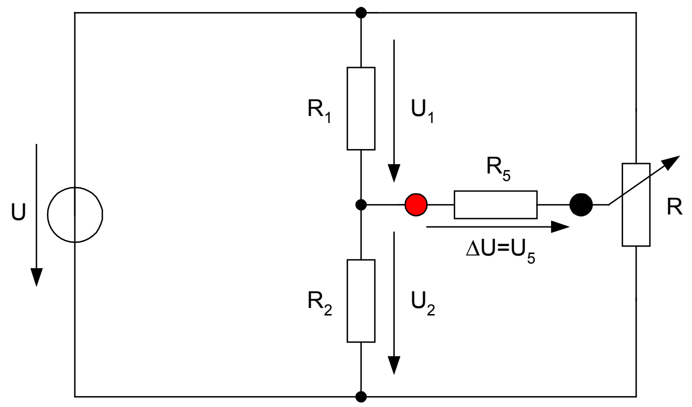
▶▶▶ $$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$

erfüllt ist. Der Wert des Widerstands R_5 hat in diesem Fall keinen Einfluss.

1.2.2 Messung eines unbekannten Widerstands

Ist ein unbekannter Widerstandswert R_1 zu bestimmen, so kann dieser im Fall der abgeglichenen Brücke gemäß $R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}$ ermittelt werden, wenn die Widerstandswerte R_2, R_3 und R_4 bekannt sind. Verwendet man als „rechten Spannungsteiler" ein Potentiometer mit präzise ablesbarer Skala (zum Beispiel $0 \le x \le 1$), so folgt mit $R_3 = (1-x)\,R$ und $R_4 = x\,R$ und dem Gesamtwiderstand R des Potentiometers:

▶▶▶ $$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4} = R_2 \frac{(1-x)\,R}{x\,R} = R_2 \frac{1-x}{x}$$



Nullindikator:

In jeder Abgleichbrücke wird ein Nullindikator benötigt. Häufig hat man Drehspulinstrumente mit dem Nullpunkt in der Skalenmitte verwendet. Dabei ist es sinnvoll, eine Umschaltung der Empfindlichkeit vorzusehen, um zunächst einen Grobabgleich mit nachfolgendem Feinabgleich in der Nähe des Abgleichpunkts durchführen zu können. Schließlich bietet die Elektronik mit dem Operationsverstärker sogar die Möglichkeit eines automatischen Brückenabgleichs. Ein Servomotor verstellt den Potentiometerschleifer so lange, bis die Ausgangsspannung des Differenzverstärkers Null wird und damit die Abgleichbedingung erfüllt ist.

Wir verwenden bei unseren Experimenten ein **Digitalvoltmeter als Nullindikator**.

1.2.3 Genauigkeit

Bei der Brückenschaltung gehen weder die Versorgungsspannung der Brücke, noch der Innenwiderstand R_5 des Nullindikators in die Bestimmungsgleichung für den unbekannten Widerstand ein. Allerdings besteht ein indirekter Einfluss: Je größer die Versorgungsspannung gewählt wird, desto größer ist natürlich auch die Brückenspannung in der Nähe des Abgleichpunkts. Diese reagiert somit empfindlicher auf Veränderungen der Abgleichwiderstände, und der Abgleich kann mit größerer Genauigkeit durchgeführt werden.

Das Nullinstrument muss den Nulldurchgang der Brückenspannung mit großer Präzision anzeigen. Diese Forderung ist grundsätzlich leicht zu erfüllen, da der Nullpunkt durch Kurzschließen des Instruments schnell und einfach kontrolliert werden kann. Bei Zeigerinstrumenten kann der Reibungsfehler zu Problemen führen. Je nach dem, von welcher Seite man sich dem Abgleichpunkt nähert (Brückenspannung positiv oder negativ), können sich auf Grund der Reibung Unterschiede im Ergebnis zeigen.

Widerstandstoleranzen des Potentiometers wirken sich nicht auf die Genauigkeit des Messergebnisses aus. Unmittelbaren Einfluss auf die Genauigkeit haben allerdings der Fehler ΔR_2 des Referenzwiderstands und der Fehler Δx des abgelesenen Skalenwerts. Sind diese Fehler zufällig, so findet man für den relativen Fehler des Messergebnisses

►►► $$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \sqrt{\frac{(\Delta R_2)^2}{R_2^2} + \frac{(\Delta x)^2}{x^2(1-x)^2}}\,.$$

Die Herleitung dieser Gleichung ist in Anhang A1 ausführlich dargestellt. Der relative Fehler $\frac{\Delta R_1}{R_1}$ ist immer größer als der relative Fehler $\frac{\Delta R_2}{R_2}$ des Referenzwiderstands. Bei ungünstiger Wahl des Referenzwiderstands ($R_2 >> R_1$ oder $R_2 << R_1$) liegt der Ablesewert von x nahe bei $x = 0$ oder $x = 1$. Hier liefert dann der zweite Term unter der Wurzel einen sehr großen Beitrag. (Aufgabe dazu im Anhang A1)

1.3 Wheatstone-Brücke als Ausschlagbrücke

Die **abgeglichene Messbrücke** ermöglicht eine sehr genaue Messung des Absolutbetrags von Widerstandswerten. Will man jedoch Änderungen des Werts erfassen, dann ist es wesentlich einfacher, diese Widerstandsänderungen aus den Änderungen der Brückenspannung zu ermitteln als durch ständig neues Abgleichen mit nachfolgender Berechnung aus den Abgleichwerten.
Damit kommt man zur **Ausschlagbrücke**, die häufig zur Temperaturmessung mit Widerstandsthermometern oder zur Auswertung von Dehnungsmessungen (Dehnungsmessstreifen) verwendet wird.

1.3.1 Ausschlagbrücke im unbelasteten Zustand

Wir untersuchen hier zunächst eine Ausschlagbrücke im unbelasteten Zustand: Dieser Fall liegt vor, wenn der Widerstand R_5 sehr groß ist, also „kein“ bzw. ein vernachlässigbarer „Querstrom“ I_5 fließt. Diese Annahme ist realistisch, wenn wir die Brückenspannung mit einem hochohmigen Digitalvoltmeter messen (Innenwiderstand des Voltmeters $\approx 10\ \text{M}\Omega$).

Wir betrachten kleine Änderungen des Widerstands R_1 und nehmen an, dass sich dieser Widerstand zusammensetzt aus einem festen (Anfangs-) Wert R_{10} und der Änderung ΔR_1. Dann ist

►►► $$R_1 = R_{10} + \Delta R_1\,.$$

Wir nehmen weiterhin an, dass die Brücke vor Beginn des Experiments für $R_1 = R_{10}$ bzw. für $\Delta R_1 = 0$ abgeglichen wurde. Dann ist die bereits bekannte Abgleichbedingung gegeben als

►►► $$\frac{R_{10}}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

und für die Brückenspannung erhalten wir jetzt

►►► $$\Delta U = \left[\frac{R_2}{(R_{10} + \Delta R_1) + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right] U .$$

Diese Gleichung ist zwar exakt, aber wenig aussagekräftig.

■ **Aufgabe (Vorbereitung):**

Betrachten Sie diese Gleichung, und machen Sie sich zunächst unbedingt klar, dass die Brückenspannung im Fall $\Delta R_1 = 0$ verschwindet.

Üblicherweise werden kleine Widerstandsänderungen ΔR_1 gemessen. In diesem Fall kann man die oben stehende Gleichung durch eine wesentlich einfachere und übersichtlichere Gleichung ersetzen. Im weiteren Verlauf der Rechnung führen wir die Versorgungsspannung U der Brücke auf der linken Seite mit (Division durch U). Das ist bequemer. Im Nenner des ersten Bruches auf der rechten Seite klammern wir $R_{10} + R_2$ aus und erhalten:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{R_2}{(R_{10} + R_2)\left[1 + \frac{\Delta R_1}{R_{10} + R_2}\right]} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Ist ΔR_1 sehr klein gegenüber $R_{10} + R_2$, dann ist auch der Quotient $\frac{\Delta R_1}{R_{10} + R_2}$ sehr klein. In diesem Fall dürfen wir die Näherungsformel $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ (Anhang A2) anwenden, die für „hinreichend kleine x“ gut erfüllt ist. An die Stelle von x tritt nun $\frac{\Delta R_1}{R_{10} + R_2}$:

$$\frac{1}{1 + \frac{\Delta R_1}{R_{10} + R_2}} \approx 1 - \frac{\Delta R_1}{R_{10} + R_2},$$

so dass wir insgesamt erhalten:

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \frac{R_2}{R_{10}+R_2}\left[1-\frac{\Delta R_1}{R_{10}+R_2}\right]-\frac{R_4}{R_3+R_4}$$

Ausmultiplizieren liefert

$$\frac{\Delta U}{U} \approx \underbrace{\frac{R_2}{R_{10}+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}}_{0}-\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}\Delta R_1 .$$

Da wir gefordert haben, dass die Brücke für $R_1 = R_{10}$ abgeglichen ist, verschwinden die ersten beiden Terme. Machen Sie sich das unbedingt klar.

Es bleibt also

▶▶▶ $$\frac{\Delta U}{U} \approx -\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}\Delta R_1$$

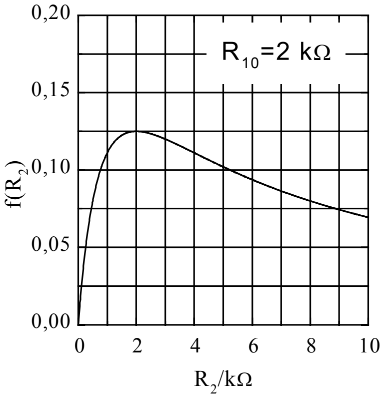
Im Rahmen unserer Näherung ist die Brückenspannung also unmittelbar proportional zur Widerstandsänderung ΔR_1!

Wie empfindlich ΔU auf ΔR_1 reagiert, hängt ab von der Versorgungsspannung U und von den Widerstandswerten R_{10} und R_2. Dabei ist R_{10} in der Regel vorgegeben: Beispielsweise ist bei einer Temperaturmessung mit einem Platinfühler „Pt 100“ $R_{10} = 100\,\Omega$ bei T=0 C°.

Prinzipiell erhalten wir einen großen Messeffekt, wenn wir die Spannung U groß wählen.

Aufgabe (Vorbereitung):

Warum kann U nicht ohne Bedenken möglichst groß gewählt werden? Beantworten Sie diese Frage insbesondere auch im Hinblick auf die Temperaturmessung mit einem Widerstandsthermometer.



Auf der Suche nach einem geeigneten Wert für R_2 ergibt sich eine interessante Beobachtung. Nebenstehend finden Sie den Vorfaktor $\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}$ für einen Widerstandswert $R_{10} = 2\,k\Omega$ als Funktion $f(R_2)$ dargestellt.

Der Faktor $\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}$ durchläuft ein Maximum bei Gleichheit von R_2 und R_{10}.

Aufgabe (Vorbereitung):

Zeigen Sie, dass $f(R_2) = \frac{R_2}{(R_{10} + R_2)^2}$ für $R_2 = R_{10}$ ein Maximum hat.

Es ist mit $R_2 = R_{10}$

$$\frac{R_{10}}{(R_{10} + R_{10})^2} = \frac{1}{4\,R_{10}}.$$

Die Brückenspannung ist mit $R_2 = R_{10}$

►►► $$\frac{\Delta U}{U} \approx -\frac{1}{4}\frac{\Delta R_1}{R_{10}}.$$

Dieser lineare Zusammenhang gilt nur für hinreichend kleine ΔR_1. Für größere Widerstandsänderungen muss die verwendete Näherungsformel um weitere Beiträge erweitert werden:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2 \mp ...$$

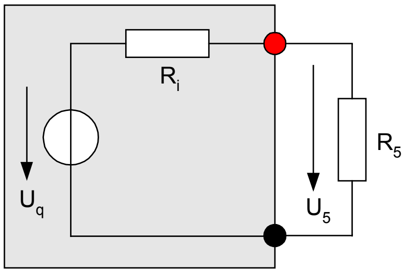
(vgl. Anhang A2).

Aufgabe (Vorbereitung für „Rechenfreaks"):

Leiten Sie eine „verbesserte Gleichung" für $\frac{\Delta U}{U}$ her, indem Sie auch den quadratischen Beitrag berücksichtigen. Schreiben Sie die resultierende Gleichung für den Fall $R_2 = R_{10}$ auf, und schätzen Sie ab, ab welchem ΔR_1 die lineare Näherung mit einem Fehler von 5% behaftet ist.

Können Sie diesen Befund später in Ihren Messergebnissen wiederfinden?

1.3.2 Ausschlagbrücke im belasteten Zustand



Im Fall eines endlichen Widerstands R_5 bleibt die Abgleichbedingung unverändert gültig. Allerdings ist nun die Berechnung der Brückenspannung im Fall der „verstimmten“ Brücke ($\Delta R_1 > 0$) deutlich aufwendiger. Wichtig ist die Betrachtung dieser Situation, wenn Anzeigeinstrumente mit nicht vernachlässigbar großem Innenwiderstand verwendet werden müssen.

Der Strom durch den Widerstand R_5 kann berechnet werden, wenn man sich diesen Widerstand aus der Schaltung herausgelöst denkt und die verbleibende Schaltung als Ersatzspannungsquelle auffasst. Diese Ersatzspannungsquelle hat die Quellspannung

►►► $$U_q = \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right] U$$

und den Innenwiderstand

►►► $$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}\,.$$

Für den Strom I_5 durch R_5 folgt dann

$$I_5 = \frac{U_q}{R_i + R_5}$$

und daher für die Spannung

►►► $$\Delta U \equiv U_5 = R_5 I_5 = \frac{R_5 U_q}{R_i + R_5} = \frac{R_5 \left[\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right]}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + R_5} U$$

■ **<u>Aufgabe (Vorbereitung):</u>**

Welche Gleichung ergibt sich für ΔU, wenn $R_5 \to \infty$?

Man kann von der oben stehenden Gleichung ausgehend genauso verfahren wie im Fall der unbelasteten Ausschlagbrücke und insbesondere für kleine ΔR_1 einen linearen Zusammenhang zwischen ΔU und ΔR_1 formulieren. Diese Vorgehensweise ist hier jedoch aufwendiger. Sie finden sie im Anhang A3 ausführlich dargestellt. Lassen Sie sich bitte nicht erschrecken!

Für hinreichend kleine ΔR_1 findet man

▶▶▶ $$\frac{\Delta U}{U} \approx -\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}\Delta R_1\left[1-\frac{R_{10}R_2(R_{10}+R_2+R_3)+R_2^2R_3}{(R_{10}+R_2)^2}\frac{1}{R_5}\right],$$

und setzt man wieder $R_2 = R_{10}$ so folgt:

▶▶▶ $$\frac{\Delta U}{U} \approx -\frac{\Delta R_1}{4R_{10}}\left[1-\frac{R_{10}+R_3}{2}\frac{1}{R_5}\right].$$

Aufgabe (Vorbereitung):

Welche Gleichungen ergeben sich hier für ΔU, wenn $R_5 \to \infty$? Wie sollte R_3 gewählt werden? Und R_4?

2 Laborversuche

2.1 Allgemeines

Aufgabe (Vorbereitung, Labor):

Weisen Sie für alle Schaltungen, die von Ihnen aufgebaut und untersucht werden, nach, dass die beteiligten Bauteile und Geräte (hier insbesondere: Widerstände, Potentiometer, Widerstandsdekade) nicht überlastet werden.

Machen Sie sich vor der Versuchsdurchführung unbedingt mit der Funktionsweise der Widerstandsdekade vertraut!

2.2 Experiment: Abgleichbrücke

Bauen Sie aus den Ihnen zur Verfügung stehenden Geräten und Zubehör eine Abgleichbrücke auf. Skizze!

Verwenden Sie als Referenzwiderstände R_2 die Widerstandsdekade. Als „unbekannten Widerstand" R_1 verwenden Sie einen Widerstand des Stecksystems (Experimentierbrett).

Messen Sie mit der Brücke 5 Widerstände R_1 Ihrer Wahl (siehe auch 2.2) aus. Führen Sie für jeden einzelnen unbekannten Widerstand den Abgleich mit 5 verschiedenen Referenzwiderständen R_2 durch, so dass Sie das komplette Skalenspektrum $0 < x < 1$ abdecken.

Beachten Sie unbedingt die maximale Belastbarkeit der Widerstände.

Führen Sie für jede Einzelmessung eine Fehlerabschätzung durch.

2.3 Experiment: Ausschlagbrücke ohne Belastung

Bauen Sie aus den Ihnen zur Verfügung stehenden Geräten und Zubehör eine Ausschlagbrücke auf. Skizze!

Verwenden Sie als R_{10} und R_2 Widerstände, deren Werte sie zuvor mit der Abgleichbrücke ermittelt haben. Um einen veränderlichen Widerstand R_1 zu erhalten, schalten Sie R_{10} in Reihe mit der Widerstandsdekade. Die dort eingestellten Werte repräsentieren dann die Widerstandsänderungen ΔR_1.

Vor Beginn der eigentlichen Messung wird im Fall $\Delta R_1 = 0$ (alle Widerstände der Dekade „ausgeschaltet“) die Brücke am Präzisionspotentiometer möglichst genau abgeglichen.

Dann beginnt die Messung: Sie variieren ΔR_1 und ermitteln die dazugehörigen Brückenspannungen ΔU. Ist der Zusammenhang linear? Ab wann treten in der grafischen Darstellung die ersten sichtbaren Abweichungen vom linearen Verhalten auf? Messen Sie in jedem Fall so weit, dass Sie eine deutliche Krümmung der Kurve beobachten können?

Stimmen Experiment und Theorie für den linearen Bereich überein? Versuchen Sie mit Hilfe von Anhang A4 die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 der quadratischen Funktion

$$\Delta U = a_0 + a_1 \Delta R_1 + a_2 (\Delta R_1)^2$$

zu bestimmen.

Führen Sie die beschriebene Prozedur für die folgenden drei Situationen durch:

$$R_2 \cong R_{10}, \quad R_2 < R_{10}, \quad R_2 > R_{10}$$

2.4 Experiment: Ausschlagbrücke mit Belastung

Wiederholen Sie die unter 2.3 beschriebene Prozedur. Schalten Sie parallel zum Voltmeter nun aber einen Widerstand R_5, der nicht zu klein gewählt werden sollte. Wird er zu groß gewählt, werden Sie jedoch keine Abweichungen von den bereits durchgeführten Messungen beobachten. (Richtwert 50 kΩ, vergleiche mit theoretischer Vorhersage, Abschnitt 1.3.2)

Anhang

A1 Fehlerbetrachtung

Ist ein Messergebnis eine Funktion

$$y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

einer oder mehrerer Messgrößen $x_1, x_2, ..., x_n$, so ist der Fehler des Messergebnisses nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz** zu ermitteln. Die Fehlerfortpflanzung ist für die erfassten systematischen Fehler anders zu behandeln, als für zufällige Fehler.

Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler:

Der systematische Fehler Δy einer Funktion $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ist aus den systematischen Fehlern $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ der Einzelgrößen $x_1, x_2, ..., x_n$ zu berechnen gemäß

►►► $$\Delta y = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n \,.$$

Es handelt sich bei dieser Gleichung im Prinzip um das totale Differential der Funktion F. Es wird angenommen, dass die Fehler $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ hinreichend klein sind, so dass eine Linearisierung der Funktion F angemessen ist.

In die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ werden die eigentlichen Messgrößen eingesetzt.

Die Vorzeichen der Ableitungen sind hier unbedingt zu beachten: Es kann also durchaus vorkommen, dass sich zwei in entgegengesetzter Richtung wirkende Fehlerbeiträge kompensieren.

Fehlerfortpflanzung für zufällige Fehler:

Der zufällige Fehler Δy einer Funktion $y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ist aus den zufälligen Fehlern $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ der Einzelgrößen $x_1, x_2, ..., x_n$ zu berechnen gemäß

►►► $$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i\right]^2} = \sqrt{\left[\frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1\right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2\right]^2 + ... + \left[\frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n\right]^2} \,.$$

In die Ausdrücke für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ werden die eigentlichen Messgrößen eingesetzt, $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ sind die geschätzten Fehler.

(Liegen für jede Einzelgröße mehrere Messergebnisse vor, so setzt man in die partiellen Ableitungen die Mittelwerte $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ ein und für $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ die Standardabweichungen.)

Mit

►►► $$R_1 = F(R_2, x) = R_2\left[\frac{1}{x} - 1\right] \text{ und } \frac{\partial F}{\partial R_2} = \frac{1}{x} - 1\,, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -R_2 \frac{1}{x^2}$$

folgt

$$\Delta R_1 = \sqrt{\left[\frac{1}{x} - 1\right]^2 (\Delta R_2)^2 + \frac{R_2^2}{x^4}(\Delta x)^2}\ .$$

Der relative Fehler von R_1 ist dann

$$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{1}{R_2\left[\frac{1}{x} - 1\right]}\sqrt{\left[\frac{1}{x} - 1\right]^2 (\Delta R_2)^2 + \frac{R_2^2}{x^4}(\Delta x)^2}$$

und kompakter

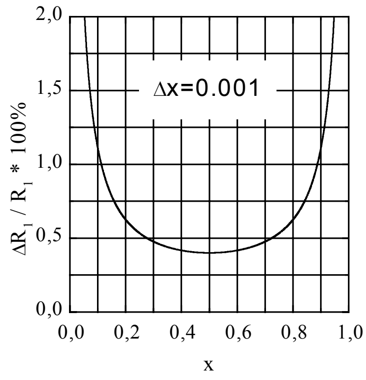
►►► $$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \sqrt{\frac{(\Delta R_2)^2}{R_2^2} + \frac{(\Delta x)^2}{x^2(1-x)^2}}$$

Lassen wir einmal den Fehlerbeitrag des (im Normalfall hochpräzisen) Referenzwiderstands außer acht, so bleibt der diskussionswürdige Fehlerbeitrag

►►► $$\frac{\Delta R_1}{R_1} = \frac{\Delta x}{x(1-x)}$$

■ **Aufgabe (Vorbereitung):**

Wie sollte man den Referenzwiderstand wählen, um optimale Mesergebnisse zu erzielen? Erklärung?



A2 Potenzreihenentwicklung von Funktionen: Linearisierung

Häufig ist es zweckmäßig, Funktionen $f(x)$ in der Nähe eines bestimmten Wertes $x = x_0$ durch einfachere Funktionen (hier: Polynome) anzunähern bzw. zu ersetzen. Den Wert $x = x_0$ nennt man Entwicklungspunkt. Unter gewissen Voraussetzungen kann man die Annäherung durch Polynome durch Berücksichtigung (unendlich) vieler Glieder beliebig genau machen. In der Praxis ist man aber meist an möglichst einfachen „Ersatzfunktionen“ interessiert. Die unten allgemein darstellte sogenannte **MacLaurinsche Reihe** ($x_0 = 0$) wird daher nach wenigen Gliedern abgebrochen:

►►► $$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)\,x^2 + ... = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\,x^k$$

wobei mit $f^{(k)}(0)$ die k-te Ableitung der Funktion f(x) an der Stelle $x = 0$ gemeint ist. Dabei ist die „nullte Ableitung“ $f^{(0)}(0) = f(0)$, also die Funktion selbst.

Will man die „Originalfunktion“ durch eine Gerade annähern, so benötigt man nur die ersten beiden Glieder der Reihe:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x$$

Geometrisch interpretiert bedeutete dies: Die Funktion $f(x)$ wird an der Stelle $x_0 = 0$ durch eine Tangente, also durch eine Gerade ersetzt.

Im Zusammenhang mit diesem Laborversuch interessiert besonders die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

mit den Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \text{ etc.}$$

und damit

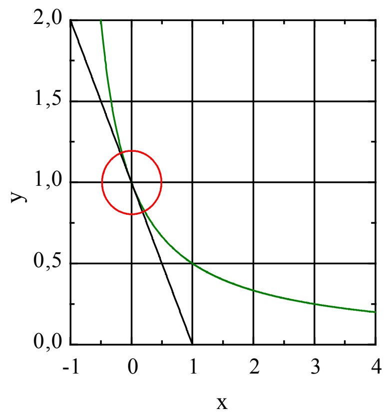
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = -\frac{1}{6} \text{ etc..}$$

Setzt man diese Werte in $f(x) \approx f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \frac{1}{6} f'''(0)\,x^2 + ...$ ein, so folgt

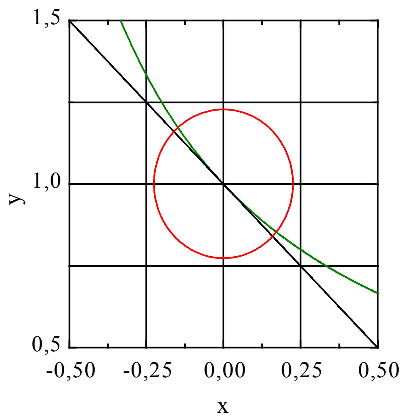
►►► $$\frac{1}{1+x} \cong 1 - x + x^2 - x^3 \pm ...$$

Diese und andere Reihenentwicklungen häufig verwendeter Funktionen findet man in Formelsammlungen zusammengestellt.

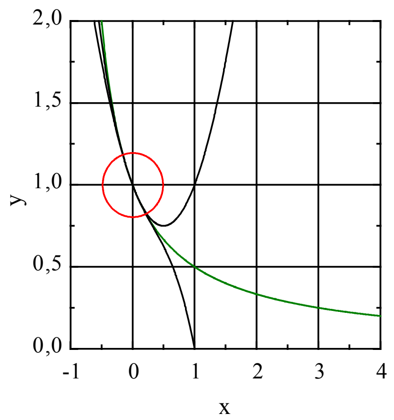
Die folgenden Abbildungen sagen Ihnen vermutlich mehr als tausend Worte:



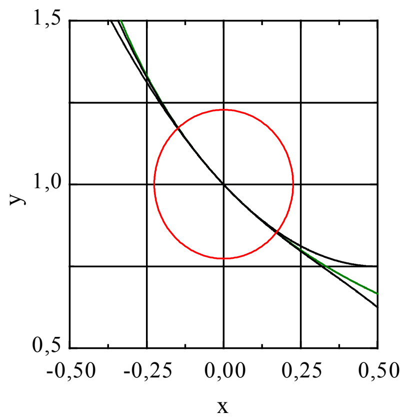
$f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $1 - x$



wie links, anderer Maßstab



$f(x) = \frac{1}{1+x}$, $1 - x + x^2$ und $1 - x + x^2 - x^3$



wie links, anderer Maßstab

In der Praxis hat man häufig Ausdrücke der Form $\frac{1}{a+x}$, die zunächst umgeformt werden müssen:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$

An die Stelle von x in $\frac{1}{1+x}$ tritt nun $\frac{x}{a}$:

$$\frac{1}{1+\frac{x}{a}} \cong 1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}-\frac{x^3}{a^3}\pm\ldots,$$

so dass insgesamt

▶▶▶ $$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x}{a}} \cong \frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}\pm\ldots$$

A3 Linearisierung der Brückenspannung im belasteten Fall

Häufig finden Sie in Lehrbüchern die Formulierung „Wie man leicht zeigen kann ...“ Seien Sie misstrauisch, wenn Ihnen eine solche Floskel begegnet. In der Regel kommt man nämlich nicht aus eigener Kraft zum gewünschten Ergebnis. So ist das sicher auch im vorliegenden Fall. Vielleicht wollen Sie aber trotzdem einmal versuchen, den Rechenweg nachzuvollziehen. Viel Spaß!

Wir starten mit

▶▶▶ $$\Delta U=\frac{R_5 U_q}{R_i+R_5}=\frac{R_5\left[\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right]}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}+R_5}U,$$

eliminieren die Doppelbrüche und klammern im Nenner R_1 aus:

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{R_5(R_2R_3-R_1R_4)}{R_1\{R_2(R_3+R_4)+R_3R_4+(R_3+R_4)R_5\}+R_2R_3R_4+(R_3+R_4)R_2R_5}$$

Mit $R_1=R_{10}+\Delta R_1$ erhalten wir

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{R_5\{R_2R_3-(R_{10}+\Delta R_1)R_4\}}{(R_{10}+\Delta R_1)\{R_2(R_3+R_4)+R_3R_4+(R_3+R_4)R_5\}+R_2R_3R_4+(R_3+R_4)R_2R_5}$$

Nach einer Umformung des Zählers zeigt sich, wie dort die Abgleichbedingung eingearbeitet werden kann:

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{R_5(\overbrace{R_2R_3-R_{10}R_4}^{0}-R_4\Delta R_1)}{(R_{10}+\Delta R_1)\{R_2(R_3+R_4)+R_3R_4+(R_3+R_4)R_5\}+R_2R_3R_4+(R_3+R_4)R_2R_5}.$$

Dann bleibt zunächst

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-R_4 R_5 \Delta R_1}{(R_{10} + \Delta R_1)\{R_2(R_3 + R_4) + R_3 R_4 + (R_3 + R_4)R_5\} + R_2 R_3 R_4 + (R_3 + R_4)R_2 R_5}$$

Nun werden Zähler und Nenner durch R_4 dividiert:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-R_5 \Delta R_1}{(R_{10} + \Delta R_1)\{R_2(\frac{R_3}{R_4} + 1) + R_3 + (\frac{R_3}{R_4} + 1)R_5\} + R_2 R_3 + (\frac{R_3}{R_4} + 1)R_2 R_5}$$

Im Nenner ersetzen wir dann $\frac{R_3}{R_4}$ durch $\frac{R_{10}}{R_2}$ (Abgleichbedingung):

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-R_5 \Delta R_1}{\underbrace{(R_{10} + \Delta R_1)}_{\approx R_{10}}\{R_2(\frac{R_{10}}{R_2} + 1) + R_3 + (\frac{R_{10}}{R_2} + 1)R_5\} + R_2 R_3 + (\frac{R_{10}}{R_2} + 1)R_2 R_5}$$

Für kleine ΔR_1 ist $R_{10} + \Delta R_1 \approx R_{10}$ und damit

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-R_5 \Delta R_1}{R_{10}\{R_{10} + R_2 + R_3 + (\frac{R_{10}}{R_2} + 1)R_5\} + R_2 R_3 + (\frac{R_{10}}{R_2} + 1)R_2 R_5}.$$

Nun wird der Nenner so umgeformt, dass R_5 nur einmal erscheint:

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-R_5 \Delta R_1}{R_{10}\{R_{10} + R_2 + R_3\} + R_2 R_3 + (\frac{R_{10}}{R_2} + 1)(R_{10} + R_2)R_5}$$

Mit

$$(\frac{R_{10}}{R_2} + 1)(R_{10} + R_2) = \frac{(R_{10} + R_2)^2}{R_2}$$

und Kürzen mit R_5 haben wir dann

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{-\Delta R_1}{\frac{(R_{10} + R_2)^2}{R_2} + \frac{R_{10}(R_{10} + R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_5}}$$

Wir klammern $\frac{(R_{10}+R_2)^2}{R_2}$ aus und erhalten

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{-\Delta R_1}{\frac{(R_{10}+R_2)^2}{R_2}\left[1+\frac{R_{10}(R_{10}+R_2+R_3)+R_2R_3}{R_5\frac{(R_{10}+R_2)^2}{R_2}}\right]}$$

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{-R_2\Delta R_1}{(R_{10}+R_2)^2}\frac{1}{1+\frac{R_{10}R_2(R_{10}+R_2+R_3)+R_2^2R_3}{(R_{10}+R_2)^2}\frac{1}{R_5}}$$

Für hinreichend große R_5 verwenden wir wieder $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$ und erhalten

►►► $$\frac{\Delta U}{U}\approx-\frac{R_2}{(R_{10}+R_2)^2}\Delta R_1\left[1-\frac{R_{10}R_2(R_{10}+R_2+R_3)+R_2^2R_3}{(R_{10}+R_2)^2}\frac{1}{R_5}\right].$$

Das war es! Vielleicht kommt man auch einfacher zu diesem Ergebnis. Entsprechende Tipps werden dankbar entgegengenommen!!!

A4 Ausgleichsrechnung, Regressionsanalyse

Wollen Sie statt einer Geraden (Laborversuch I-1.0) eine Parabel an einen Messwertesatz „anfitten“, so gehen Sie aus von der allgemeinen Gleichung

►►► $$y=f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$$

Die Parameter a_0, a_1, a_2 sind so zu bestimmen, dass für Ihren Datensatz (x_i, y_i) mit $i=1,...,n$ die Summe der Fehlerquadrate minimal wird (**Methode der kleinsten Fehlerquadrate**).

Die Fehler sind $y_i-a_0-a_1x-a_2x^2$, die quadrierten Fehler sind dann $(y_i-a_0-a_1x-a_2x^2)^2$. Für die Summe der Fehlerquadrate erhalten wir

$$S=(y_1-a_0-a_1x_1-a_2x_1^2)^2+(y_2-a_0-a_1x_2-a_2x_2^2)^2+...+(y_n-a_0-a_1x_n-a_2x_n^2)^2$$

oder kompakter

►►► $$S(a_0,a_1,a_2)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a_0-a_1x_i-a_2x_i^2)^2 .$$

Die Fehlerquadratsumme ist also eine Funktion der unabhängigen Variablen a_0, a_1, a_2. Das Minimum dieser Funktion ergibt sich im Fall verschwindender partieller Ableitungen:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$$

Diese Bedingungen führen auf ein lineares Gleichungssystem für a_0, a_1, a_2:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i^3 & \sum_{i=1}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{bmatrix},$$

das am besten mit dem PC oder Taschenrechner gelöst wird. Viele Taschenrechner lösen sogar das komplette Ausgleichsproblem.

Rechenschema:

Mit dem folgenden Schema können Sie die Elemente der Koeffizientenmatrix und der rechten Seite des Gleichungssystems ermitteln:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\ y_i$	$x_i\ y_i^2$
1							
2							
$\vdots$							
n							
$\sum_{i=1}^{n}$							