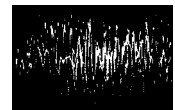
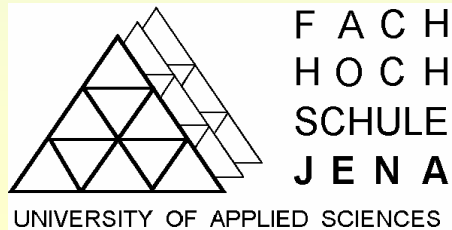


# Elektrische Messtechnik (6)

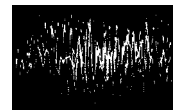
SS 2009

Prof. Dr. sc. nat. Manfred Schmidt  
Fachhochschule Jena  
Fachbereich Elektrotechnik/  
Informationstechnik



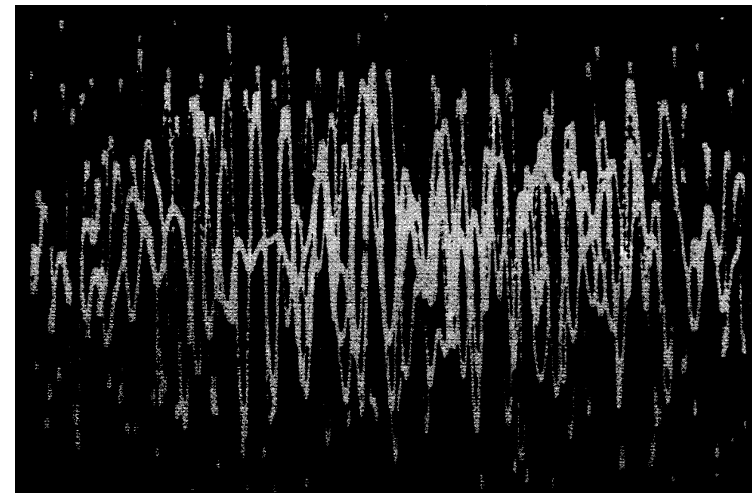
Dieses Material wurde ausschließlich für Lehrveranstaltungen am Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik der Fachhochschule Jena im SS 2003 konzipiert und zusammengestellt.

Die verwendeten Abbildungen sind zum Teil aus den angegebenen Literaturstellen entnommen.



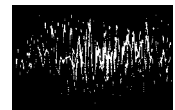
# Signale und Rauschen, SNR

- Signale und Rauschen
- Rauschen als stochastischer Prozess
- Rauschursachen, Rauschquellen
- Signal-Rausch-Verhältnis, SNR
- Übertragung von Rauschen
- Rauschfaktor, Rauschzahl
- Meßsignalverarbeitung zur Verbesserung des SNR

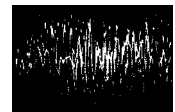
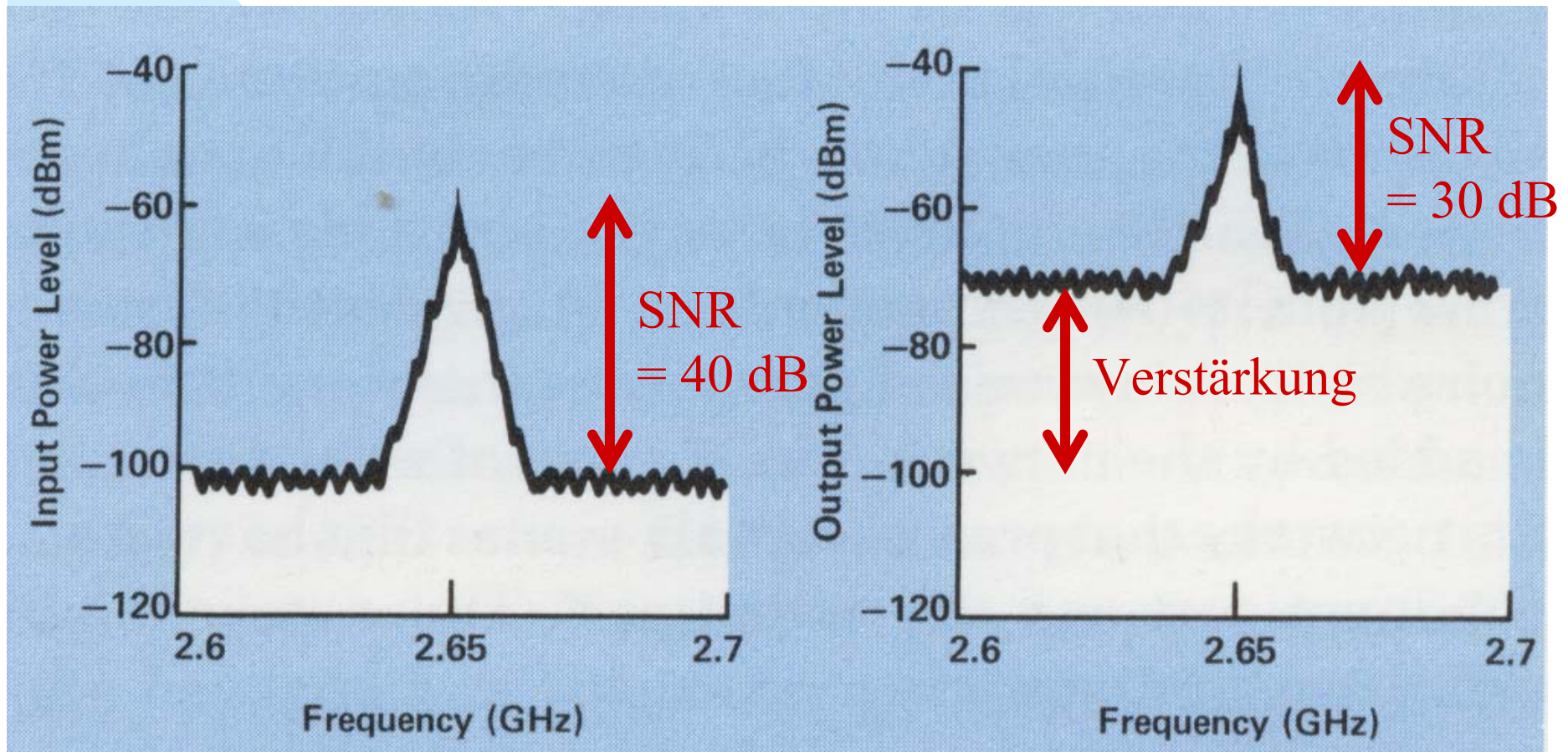


# Messung kleinster Signale

- Kleinste nachweisbare physikalische Wirkung  
 $\Delta H_{\min}$
- $\Delta H_{\min} \approx h$   
h - PLANCKsches Wirkungsquantum  
 $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
- kleinste nachweisbare Energie bzw. Leistung  
 $\Delta E_{\min} = \Delta H_{\min} \cdot \Delta f$   
 $\Delta P_{\min} = \Delta E_{\min} \cdot \Delta f$
- für  $\Delta f = 1 \text{ Hz}$ :  $\Delta P_{\min} \approx 10^{-33} \text{ W}$
- Verstärkung ?

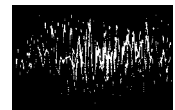


# Verstärkung kleiner Signale

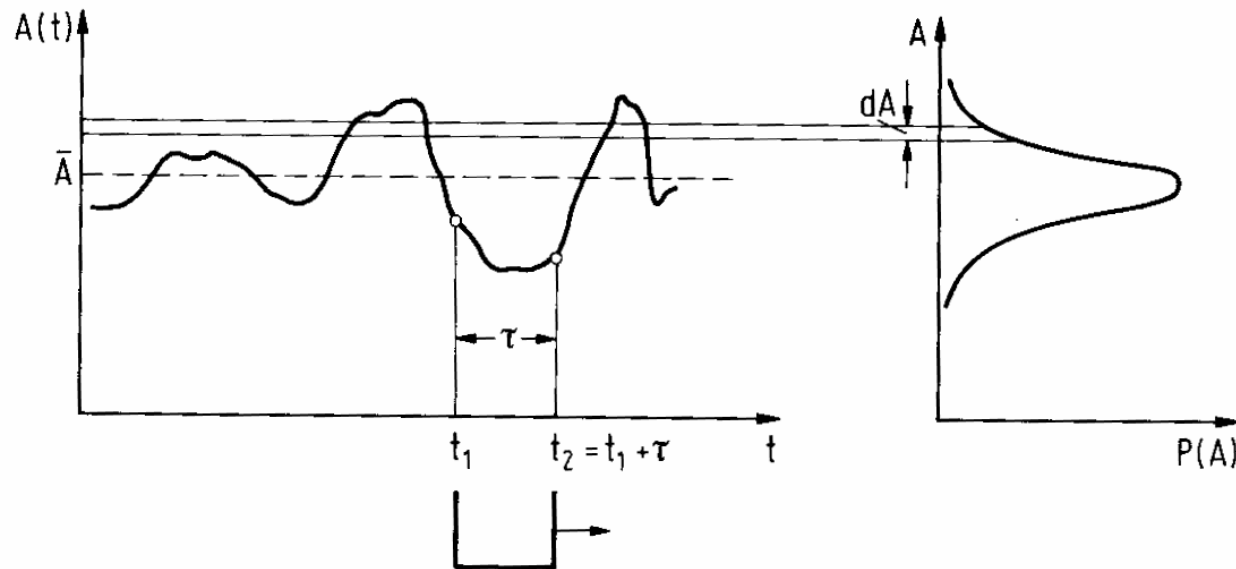


# Signalunterscheidung deterministisch - stochastisch

- Gesetzmäßigkeit, mathematische Formel
- nach Ablauf einer Periode ist weiterer Signalverlauf (Vergangenheit, Zukunft) bestimmt
- einfach zu beschreiben, einfach zu erzeugen
- Zufallssignale, nicht vorhersagbarer Verlauf
- Beschreibung durch statistische Kenngrößen: Mittelwert, Amplitudenverteilung, ...
- Stationäres Zufallssignal, wenn statistische Kennwerte konstant
- Rauschen

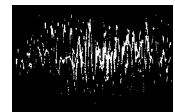


# Rauschen im Zeitbereich

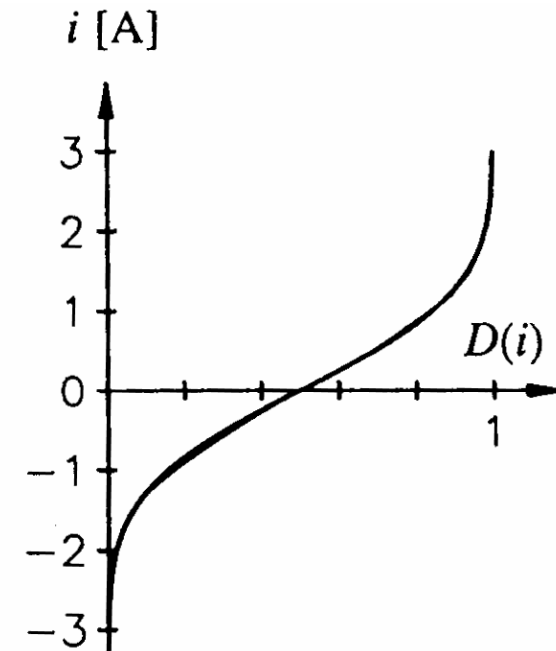
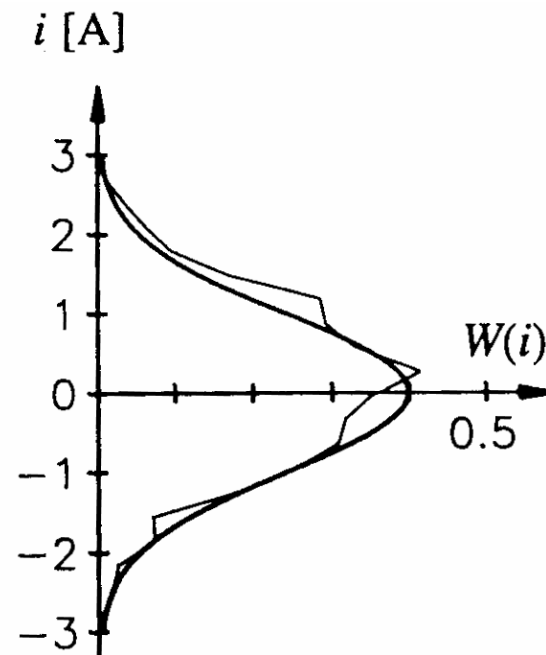
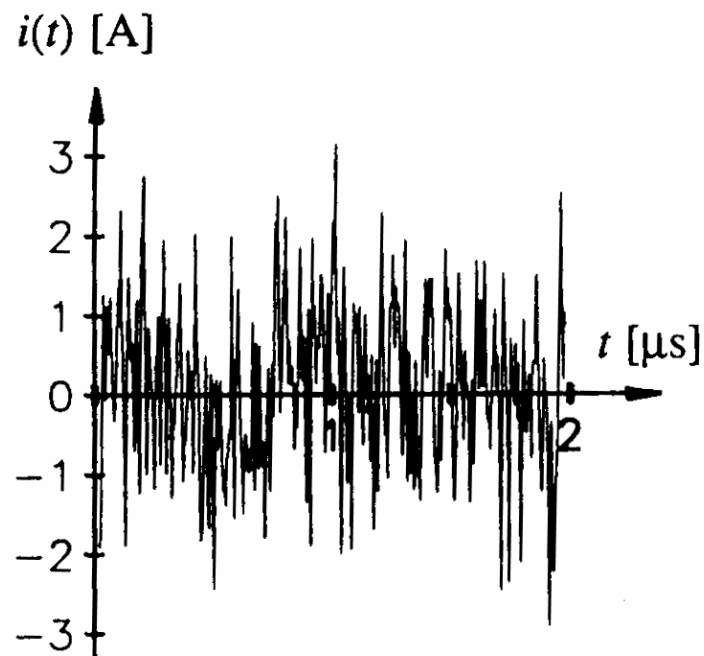


$$\bar{A} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A(t) dt.$$

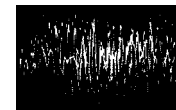
$$a(t) = A(t) - \bar{A}, \quad \overline{a(t)} = 0.$$



# Rauschen im Zeitbereich



— für endlich lange Sequenz  
— für unendlich lange Sequenz





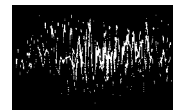
# Rauschen im Zeitbereich: Schwankungsquadrat

$$\sigma^2 = \overline{a(t)^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} [a(t)]^2 dt.$$

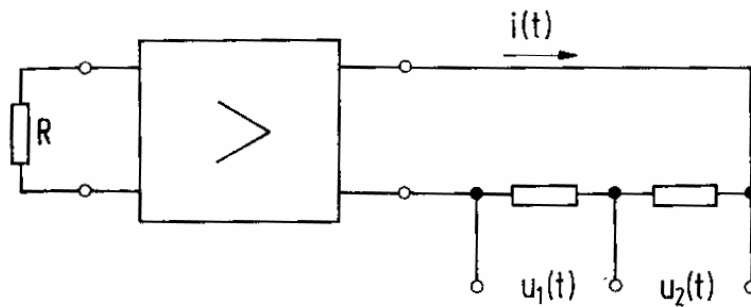
$$\begin{aligned} \sigma^2 = \overline{a^2} &= \overline{(A - \bar{A})^2} = \overline{A^2} - 2\overline{A\bar{A}} + \bar{A}^2 = \\ &= \overline{A^2} - 2\bar{A}^2 + \bar{A}^2 = \overline{A^2} - \bar{A}^2. \end{aligned}$$

Zeitmittel - Scharmittel:

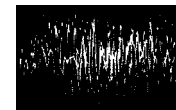
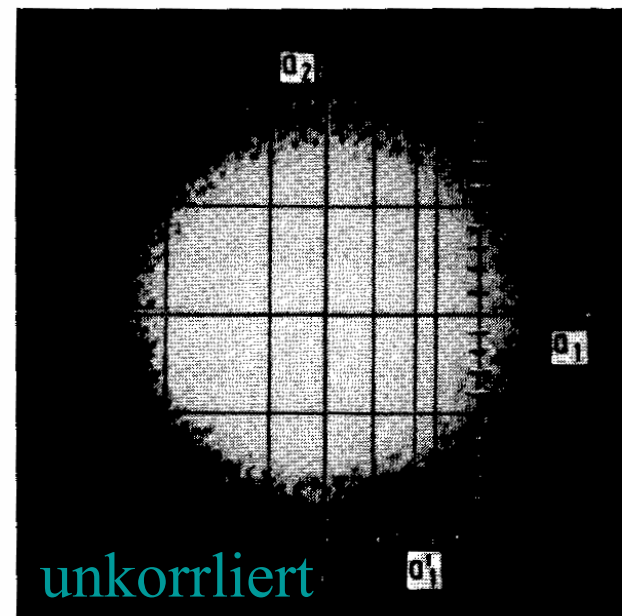
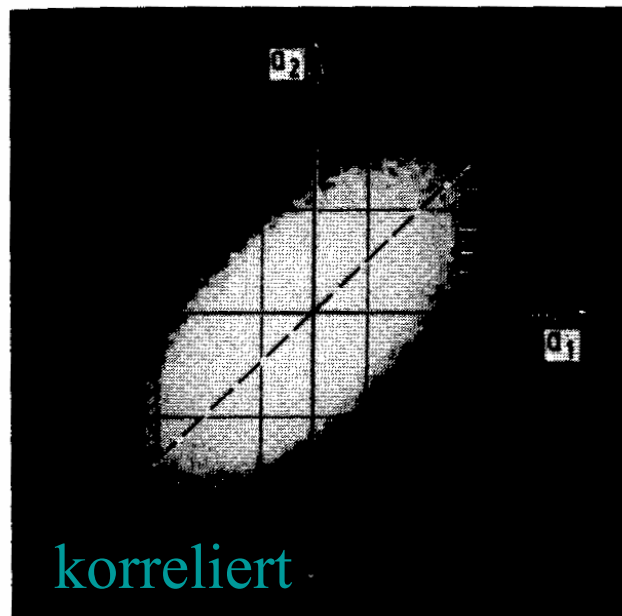
$$\langle A \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum A$$



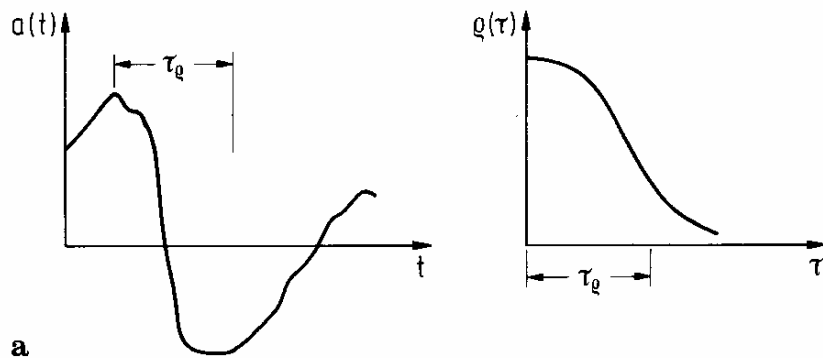
# Rauschen im Zeitbereich: Korrelation



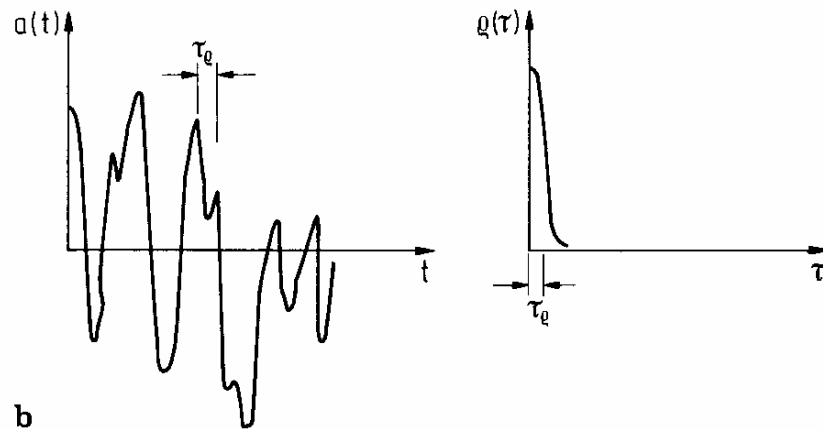
Simulation mittels  
DCSS, FH Darmstadt



# Autokorrelationsfunktion

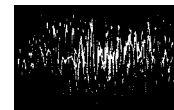


a) langsam veränderliche  
Rauschgrösse



b) rasch veränderliche  
Rauschgrösse

$$\rho_a(0) = \overline{a^2} = \sigma^2.$$



# Autokorrelationsfunktion

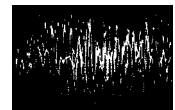
Reine Schwankungsgrösse  $a(t)$ :

$$\tau = 0$$

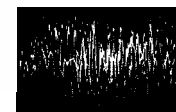
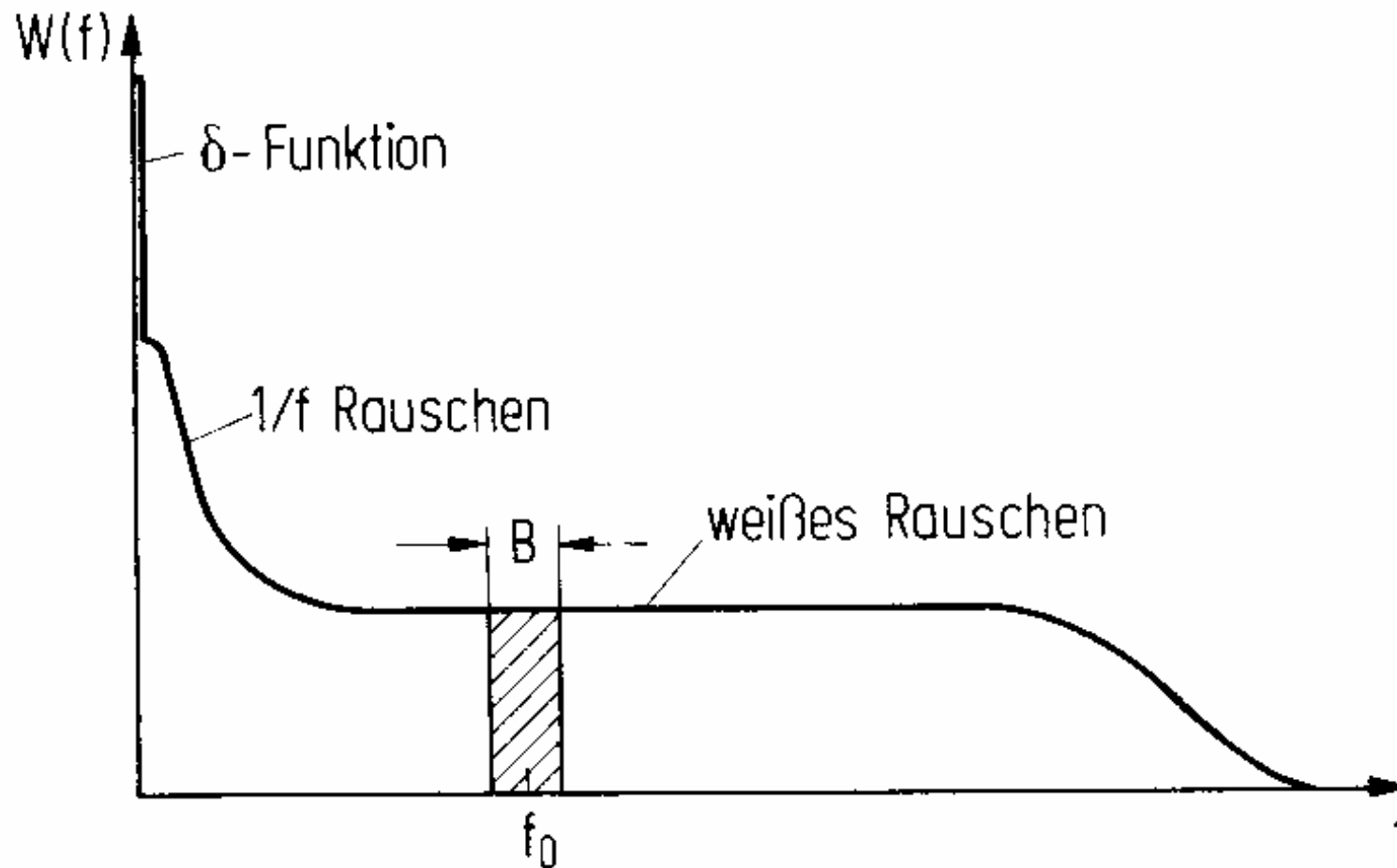
$$\varrho_a(0) = \overline{a^2} = \sigma^2 .$$

$$\tau \rightarrow \infty$$

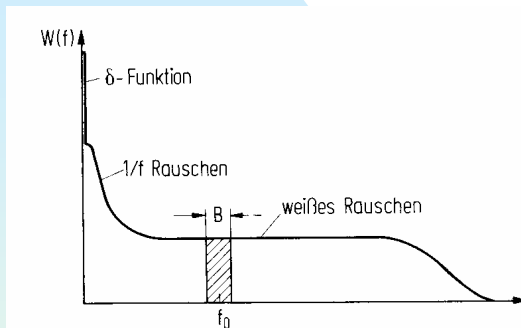
$$\varrho_a(\infty) = 0 .$$



# Rauschen im Frequenzbereich



# Rauschen im Frequenzbereich



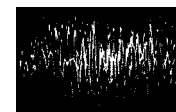
$$\int_0^{\infty} W(f) df = \overline{a^2}.$$

$$\int_0^{\infty} W(f) df = \overline{A^2}.$$

$$\overline{a^2}|_B = \int_B W(f) df = W(f_0) B.$$

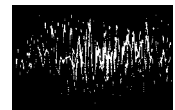
Beschreibt  $a(t)$  beispielsweise eine Spannungsschwankung so hat  $\overline{a^2} = \int W(f) df$  die Dimension  $V^2$  und  $W(f)$  die Dimension  $V^2/\text{Hz}$ .

Analog ist die Dimension von  $W(f)$  gleich  $A^2/\text{Hz}$ , wenn Stromschwankungen beschrieben werden. Weitere übliche Dimensionen für  $W(f)$  sind  $\text{Hz}^2/\text{Hz}$  (Frequenzschwankungen) oder  $1/\text{Hz}$  (Phasenschwankungen). In allen Fällen spricht man jedoch von „Leistungsdichte“.

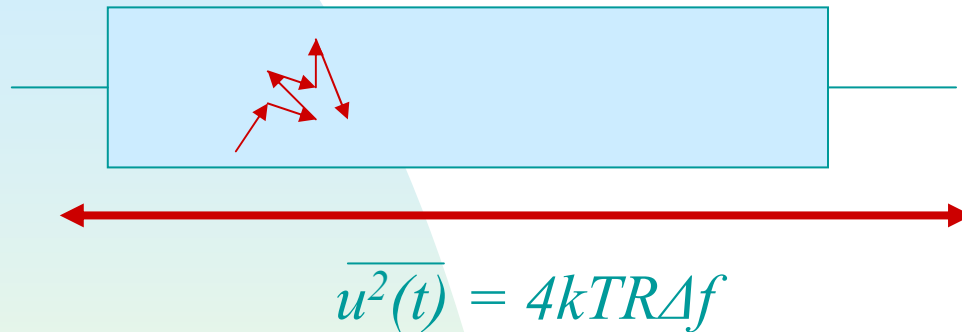


# Rauschursachen, Rauschquellen (Auswahl)

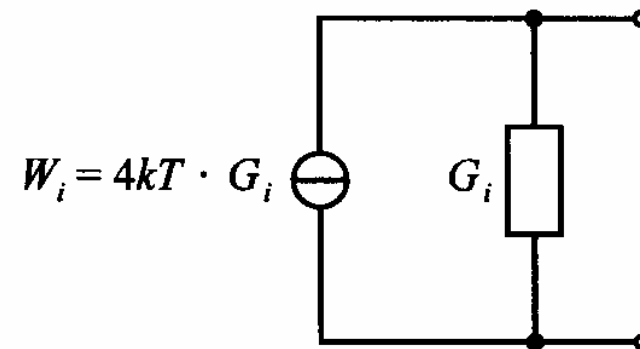
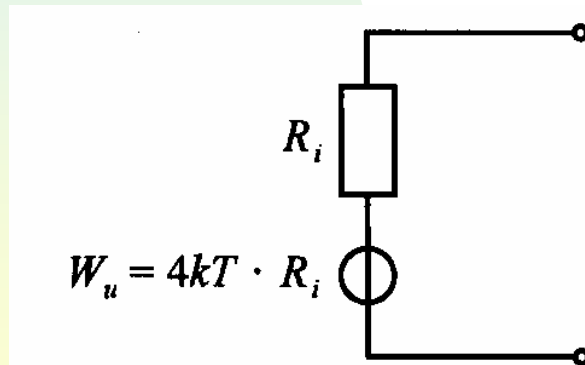
- Thermisches Rauschen
- Schrotrauschen
- $1/f$  - Rauschen
- Quantisierungsrauschen



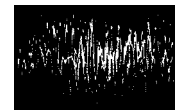
# Thermisches Rauschen



Thermische Bewegung der Ladungsträger als Ursache einer Spannung an den Enden des Leiters



Ersatzschaltbild mit Rauschspannungsquelle bzw. Rauschstromquelle  
( $W$  - spektrale Rauschleistungsdichte)





# Thermisches Rauschen

Rauschleistung von Temperatur abhängig

verfügbare Rauschleistung (Anpassung!):

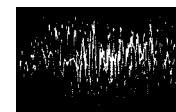
$$P = \overline{u^2} \frac{R_L}{(R + R_L)^2}$$

$$R = R_L$$

$$P_V = k T \Delta f$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

$$kT_0 = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ WHz}^{-1} \quad T = T_0 = 300 \text{ K}$$



# Umrechnungen

## USEFUL WHITE NOISE CONVERSION FORMULAS

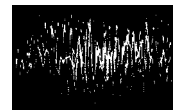
$$\text{dBm} = \text{dBm/Hz} + 10\log(\text{BW})$$

$$\text{dBm} = 20\log(V_{\text{RMS}}) - 10\log(R) + 30 \text{ dB}$$

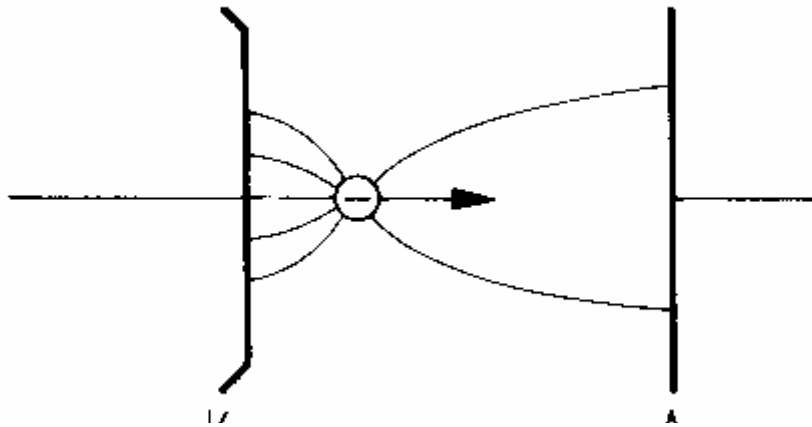
$$\text{dBm} = 20\log(V_{\text{RMS}}) + 13 \text{ dB} \quad \text{for } R = 50 \text{ ohms}$$

$$\text{dBm/Hz} = 20\log(\mu\text{V}_{\text{RMS}}/\sqrt{\text{Hz}}) - 10\log(R) - 90 \text{ dB}$$

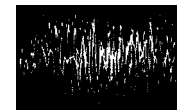
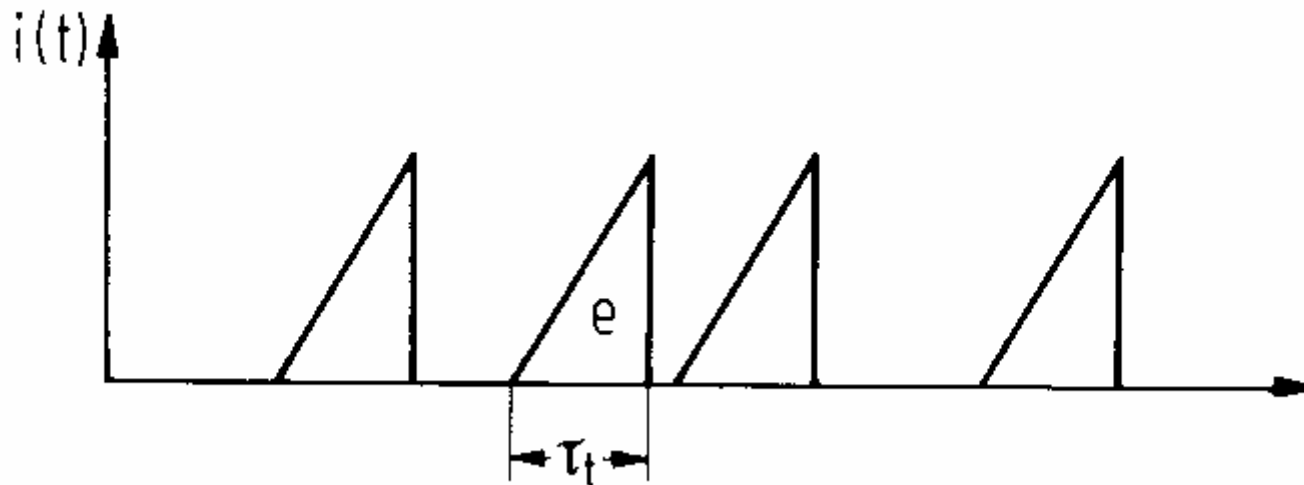
$$\text{dBm/Hz} = -174 \text{ dBm/Hz} + \text{ENR} \quad \text{for } \text{ENR} > 17 \text{ dB}$$



# Schrotrauschen (shot noise)

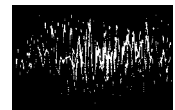


$$\sqrt{\overline{i^2}} = i_{\text{eff}} = \sqrt{2eI_0\Delta f}.$$

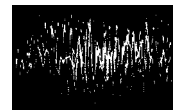
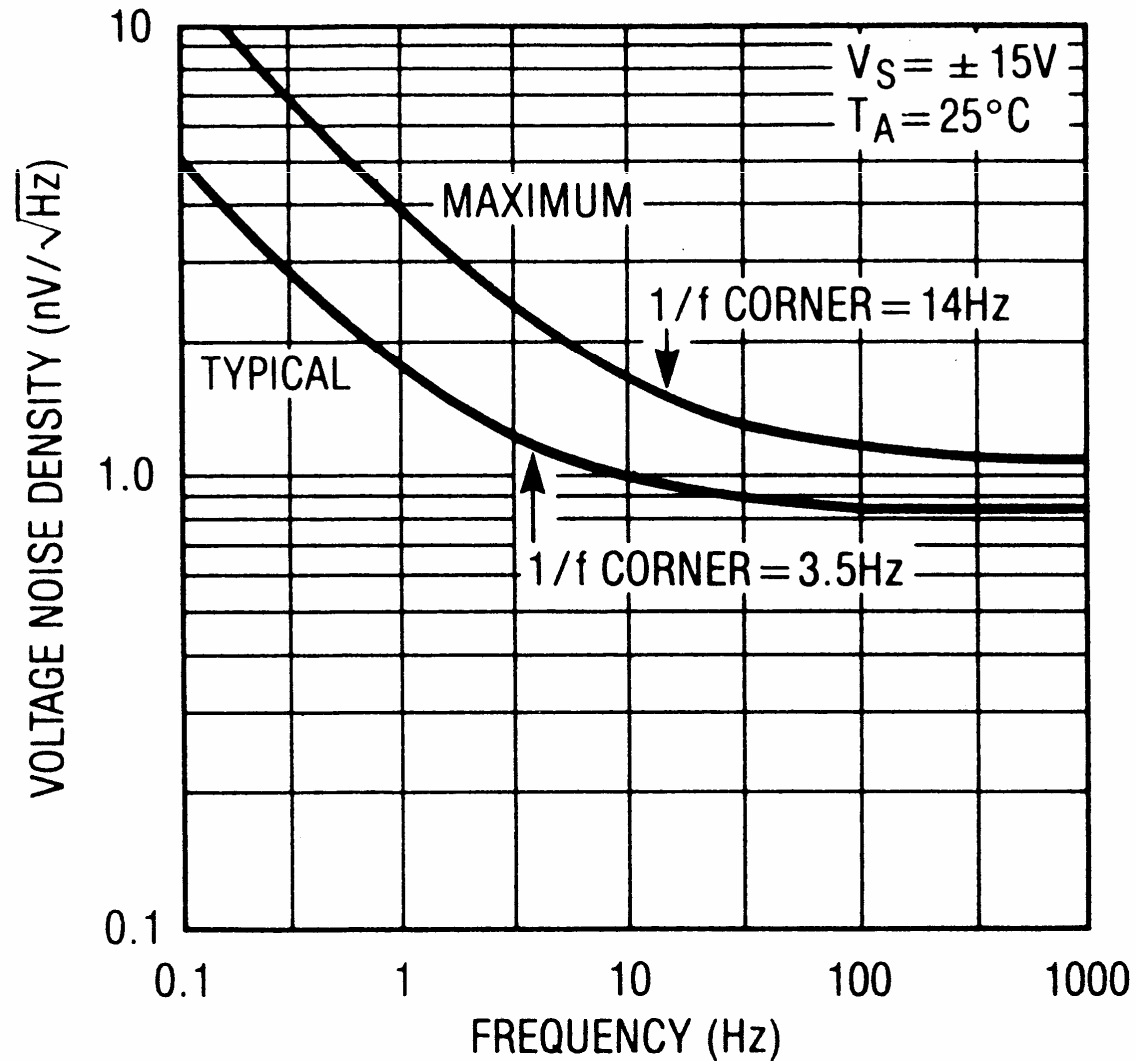


# 1 / f - Rauschen (Funkelrauschen, flicker noise)

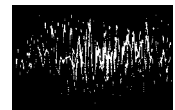
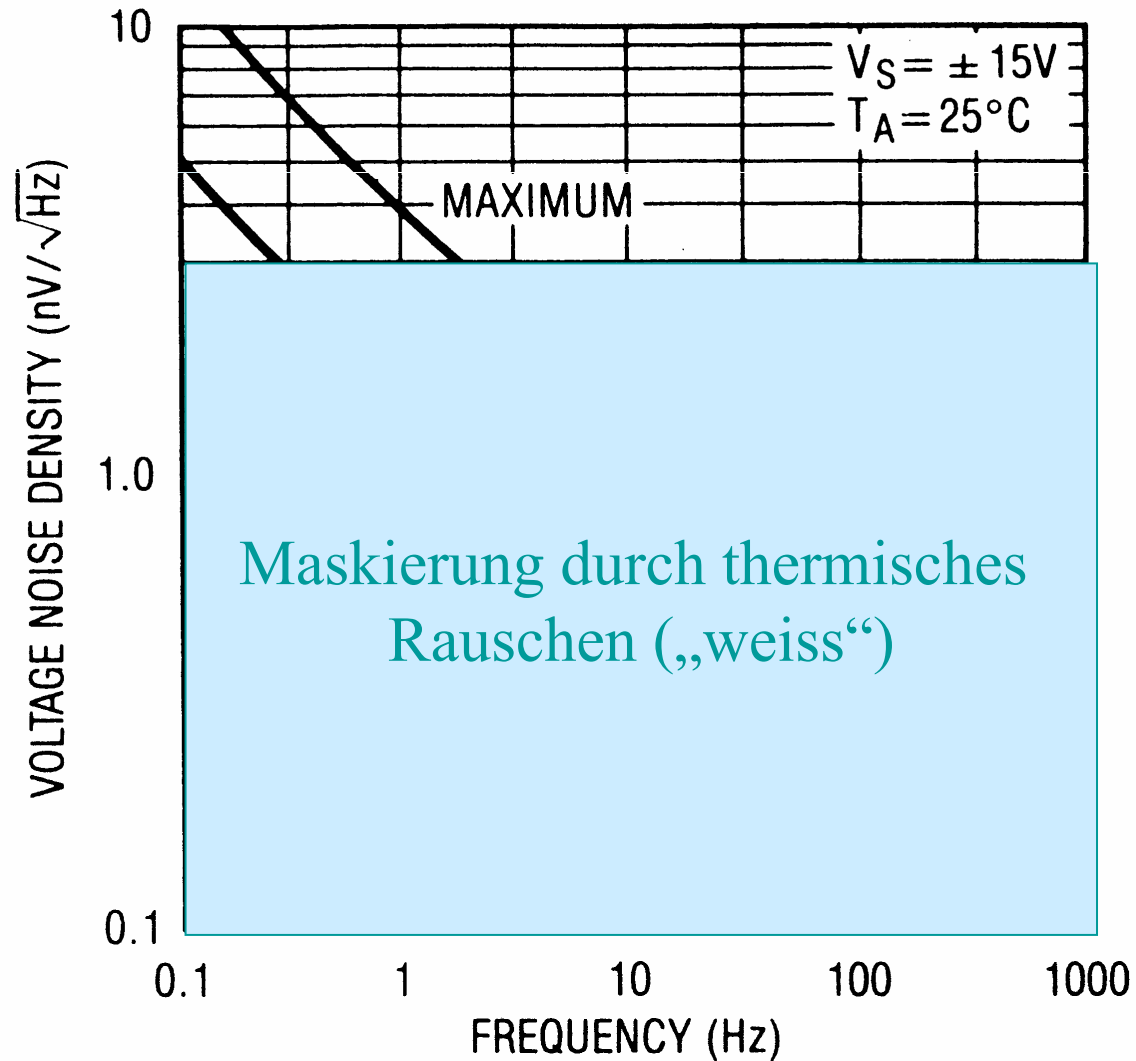
- Beschaffenheit von Oberflächen und Grenzflächen
- unterschiedliche Modelle zur Beschreibung
- Leistungsdichte fällt proportional mit  $1/f$
- Leistung in einem bestimmten relativen Frequenzintervall (z. B. einer Oktave) ist unabhängig von der Frequenz.



# 1 / f - Rauschen (Funkelrauschen)

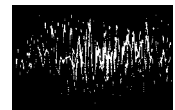


# 1 / f - Rauschen (Funkelrauschen)



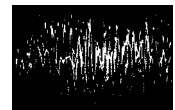
# Beschreibung von Rauscheigenschaften

- für Bauelemente
- für Systemteile
- für Systeme
- Grösse zur Beschreibung mit universellen Eigenschaften
- „einfaches“ Messverfahren
- Rauschfaktor bzw. Rauschzahl (logarithmisches Mass)



# Rauschfaktor, Rauschzahl

$$\begin{aligned} F &= \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} \\ &= \frac{S_i/N_i}{G_a S_i / (N_a + G_a N_i)} \\ &= \frac{N_a + G_a N_i}{G_a N_i} \\ F &= \frac{N_a + kT_o B G_a}{kT_o B G_a} \end{aligned}$$

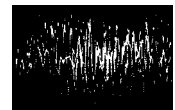




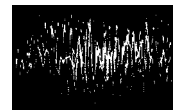
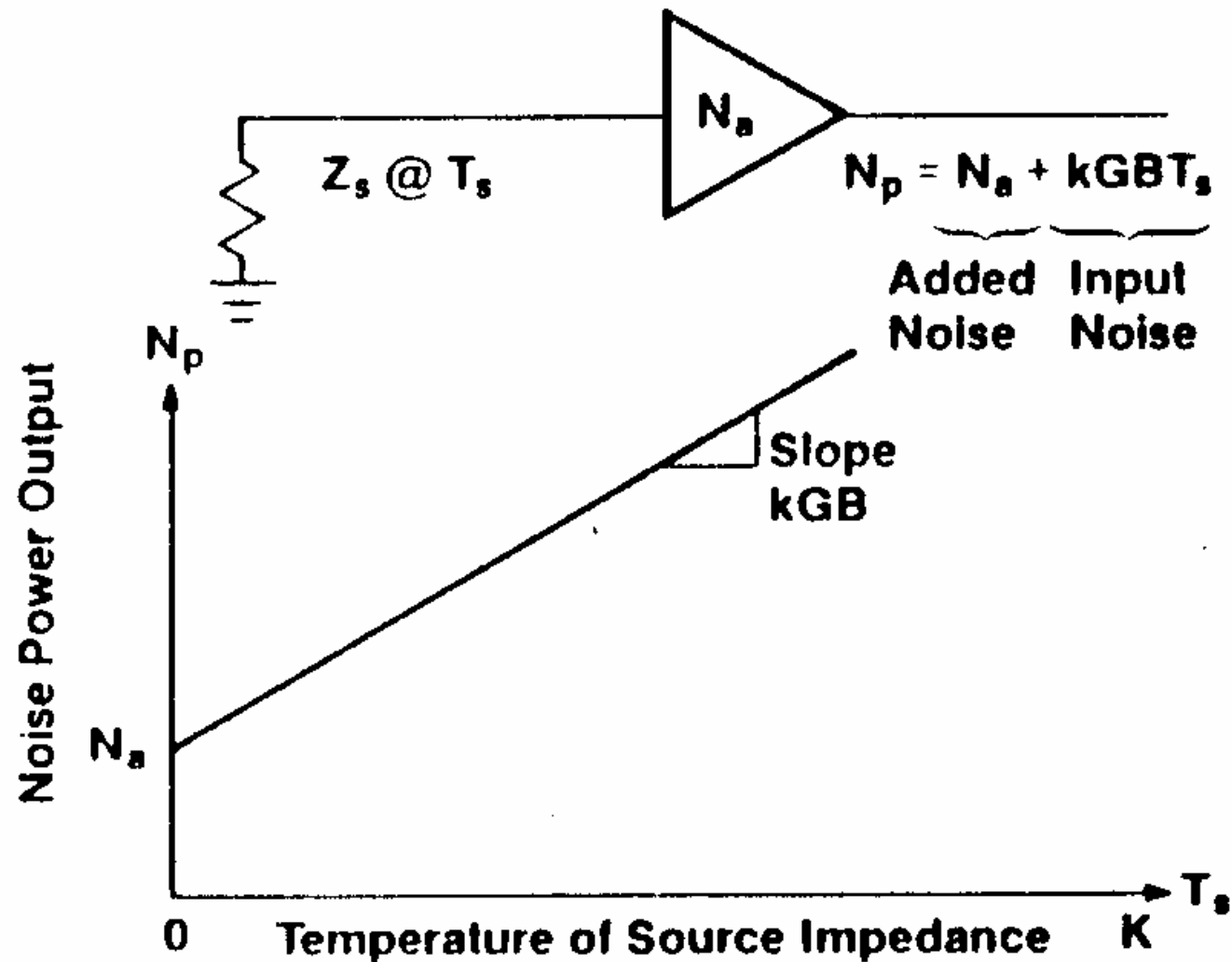
# Bezeichnungen, Konventionen

\* FRIIS: Festlegung von  $T_0$  auf 290 K,  
äquivalent auf 16,8° C bzw. 62,3°F,  
damit wird  
 $kT_0 = 4,00 \cdot 10^{-21} \text{ W/Hz} = -174 \text{ dBm/Hz}$

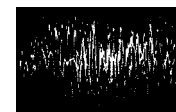
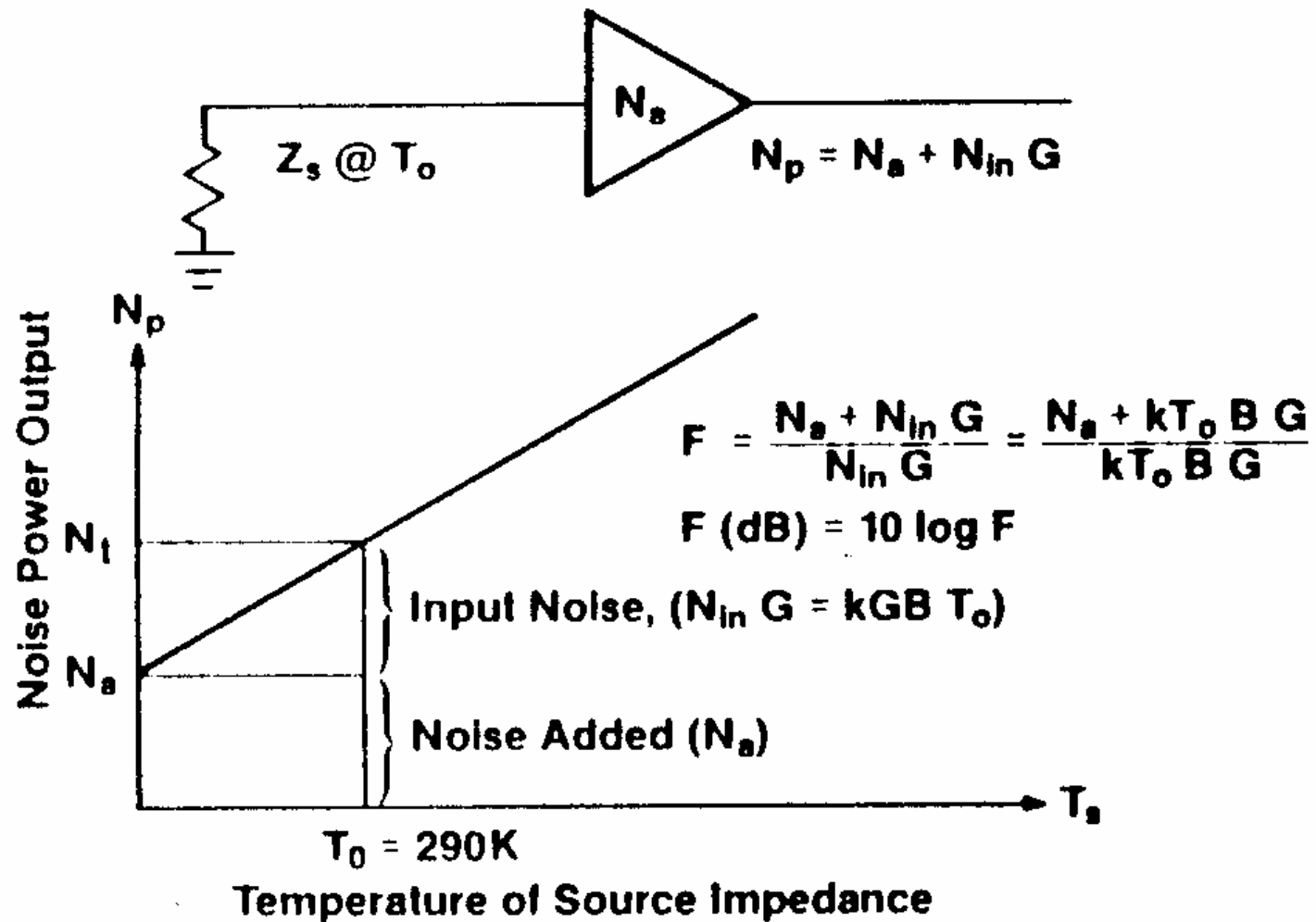
\* Indices:            i - input, o - output  
                         a - added  
                         a - available (gain)  
                         h - hot  
                         c - cold



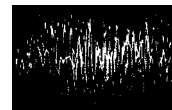
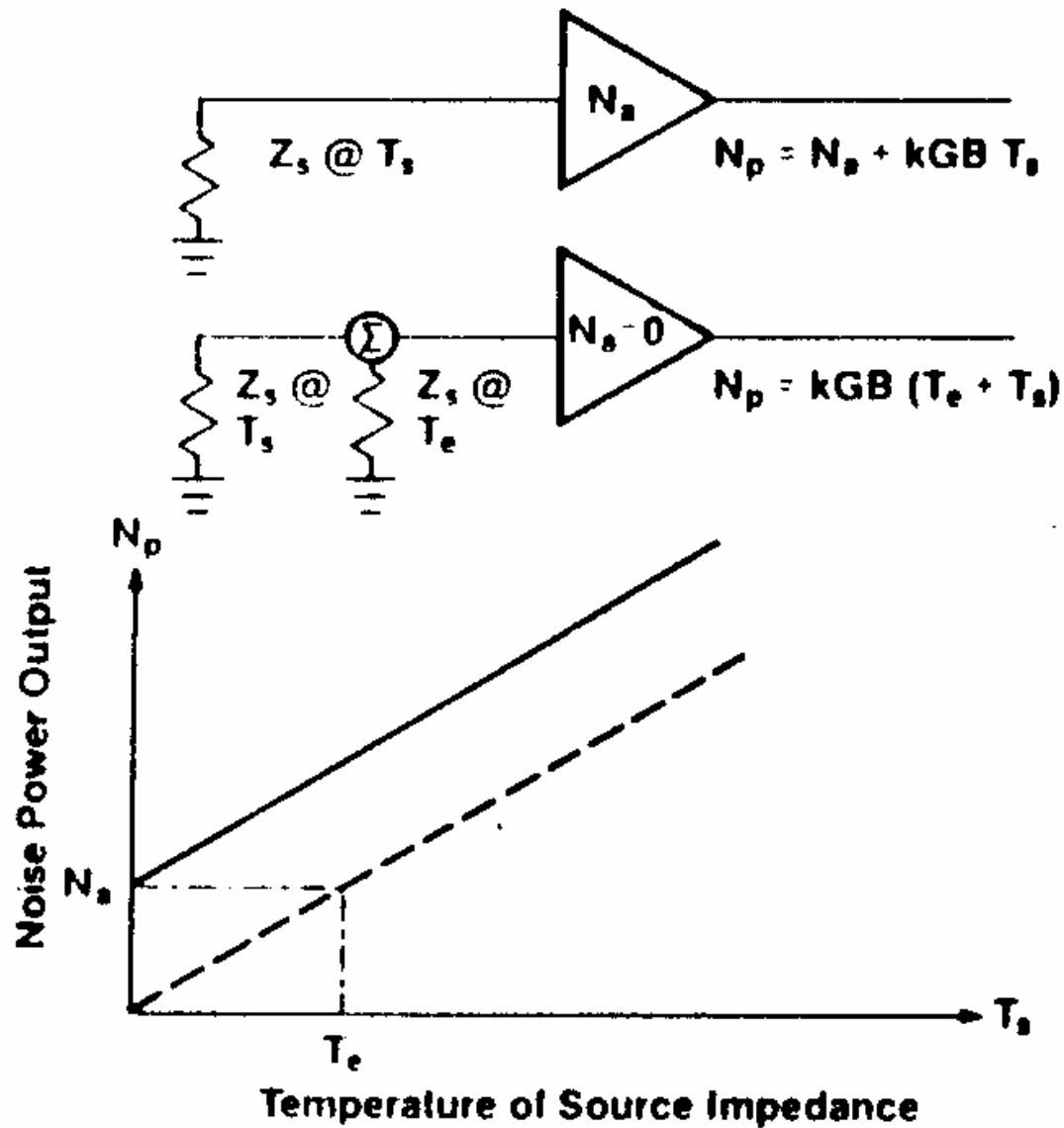
# Rauschfaktor, Rauschzahl



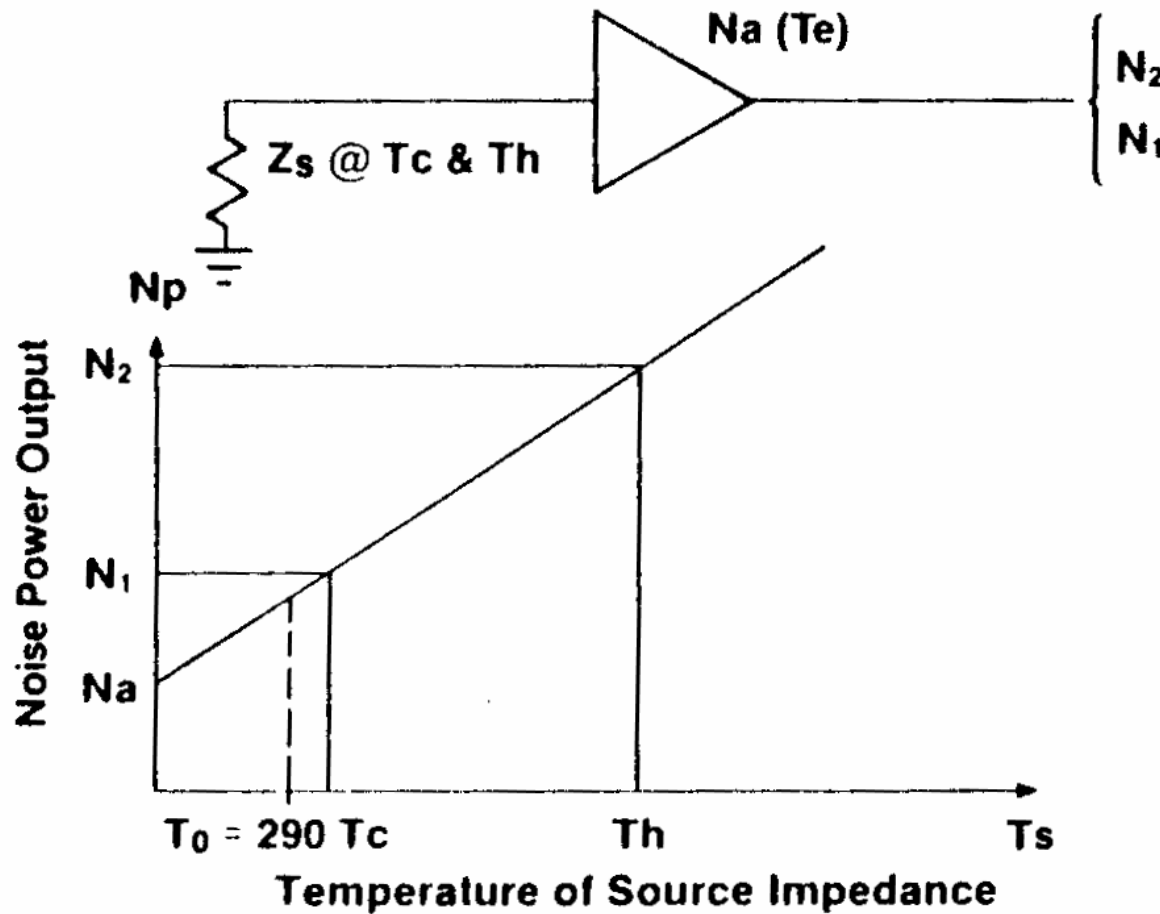
# Rauschfaktor, Rauschzahl



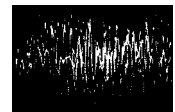
# Rauschtemperatur



# Messung von F bzw. $T_e$ (1)



$$\text{ENR} = 10 \log \frac{T_h - T_0}{T_0}$$

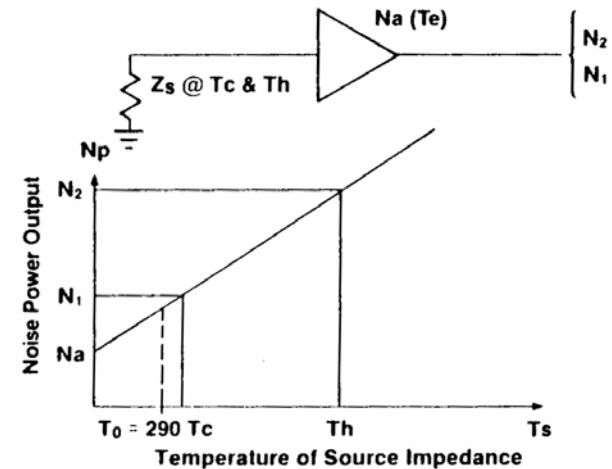


# Messung von F bzw. $T_e$ (2)

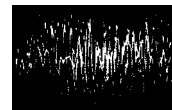
$$T_e = \frac{T_h - Y T_c}{Y - 1}$$

$$F = 10 \log \frac{T_e + T_0}{T_0}$$

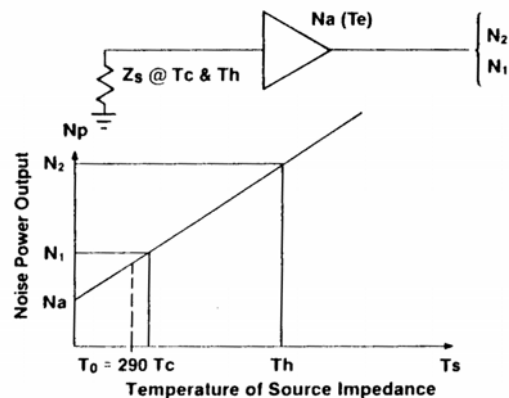
$$kGB = \frac{N_2 - N_1}{T_h - T_c}$$



$$ENR = 10 \log \frac{T_h - T_0}{T_0}$$

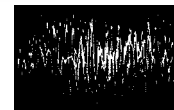


# Messung (3): Y - Faktor - Methode

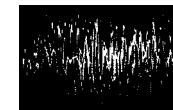
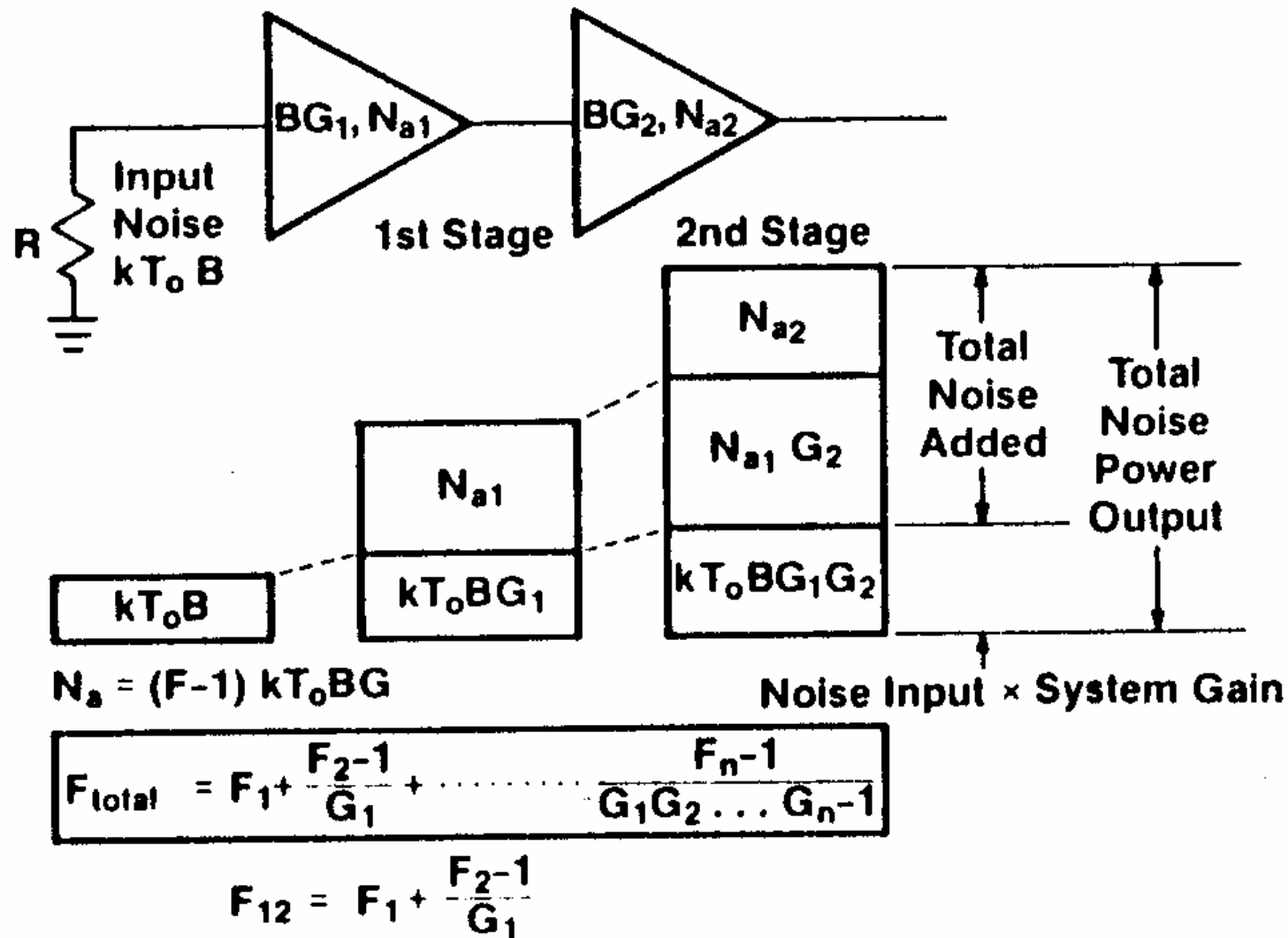


$$Y = N_2 / N_1$$

$$F = \frac{\left( \frac{T_h}{290} - 1 \right) - Y \left( \frac{T_c}{290} - 1 \right)}{Y - 1}$$

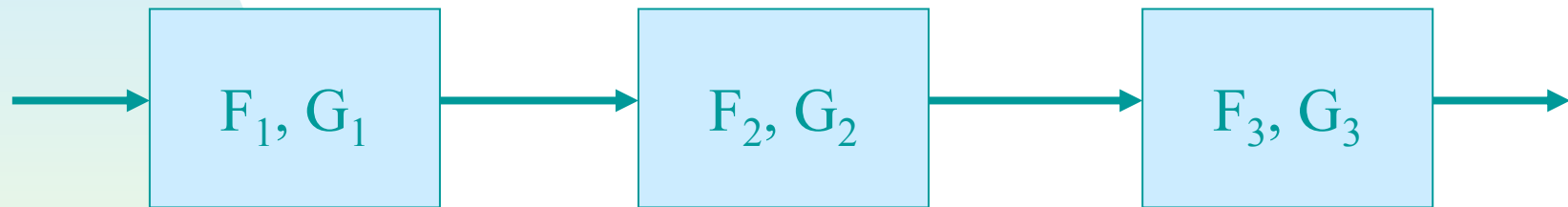


# Kaskadierte Systeme





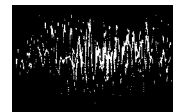
# Kaskadierte Systeme



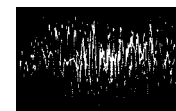
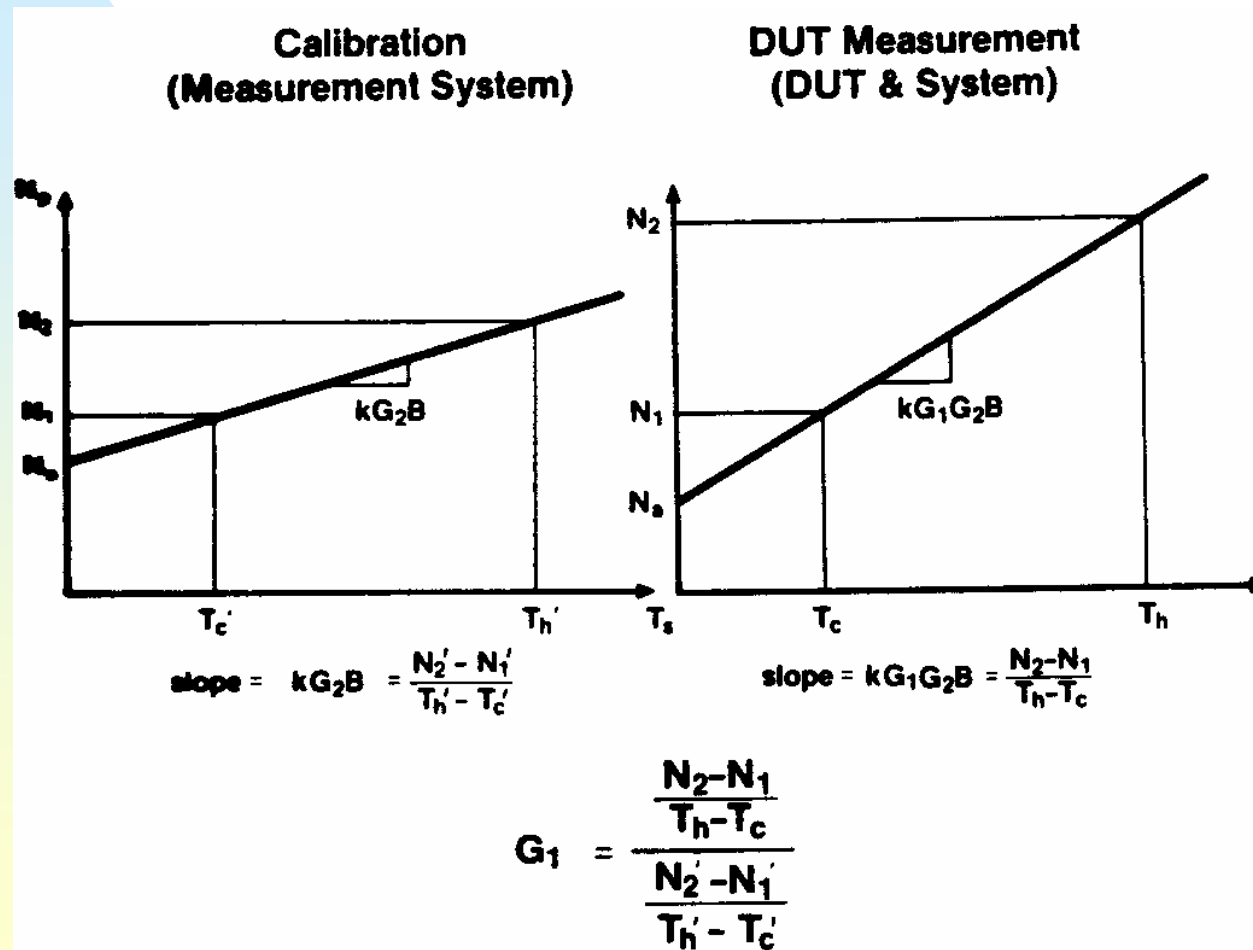
$$F_{\text{gesamt}} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 \cdot G_2} + \dots$$



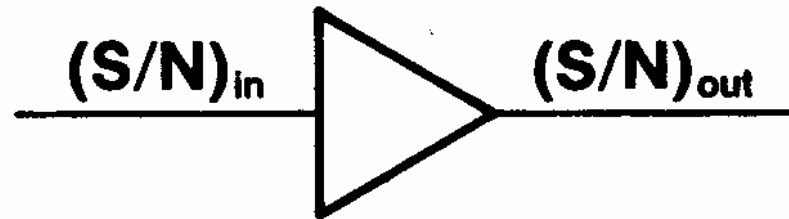
!



# Messung der Verstärkung

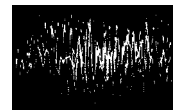


# Rauschfaktor, Rauschzahl

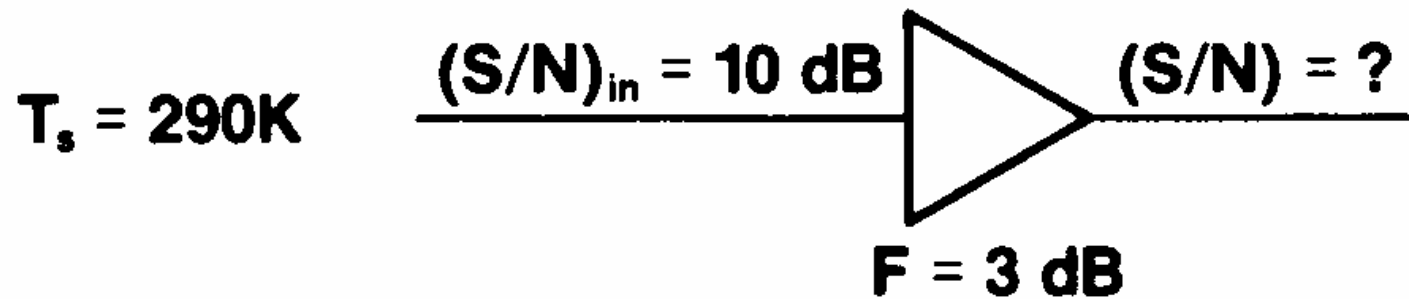


$$F \equiv \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} \bigg|_{T_s = 290K}$$

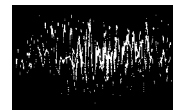
$$F \text{ (dB)} \equiv 10 \log \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} \bigg|_{T_s = 290K}$$



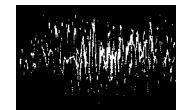
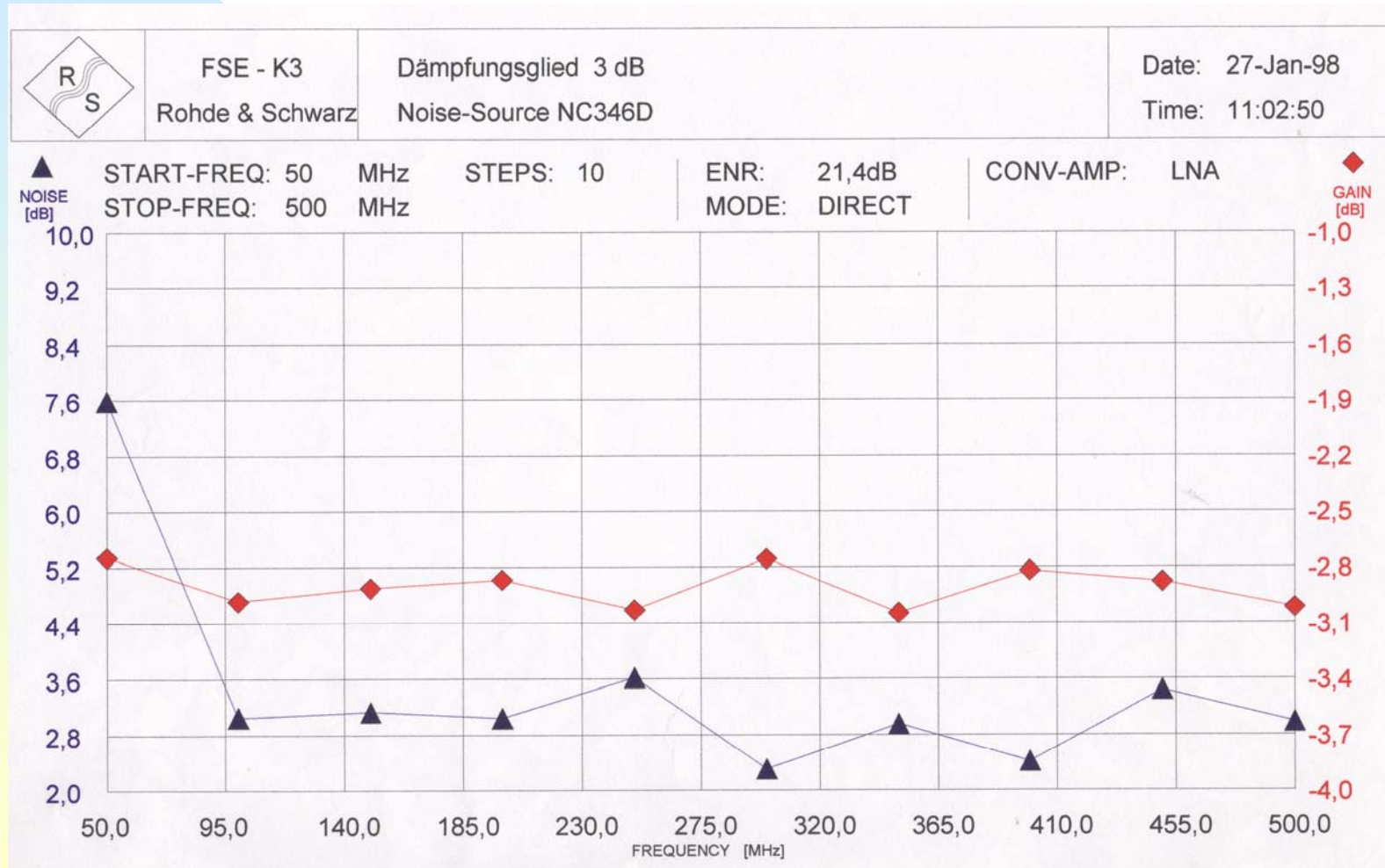
# Beispiel



**Problem:  $(S/N)_{\text{in}}$  is Hard to Measure!**



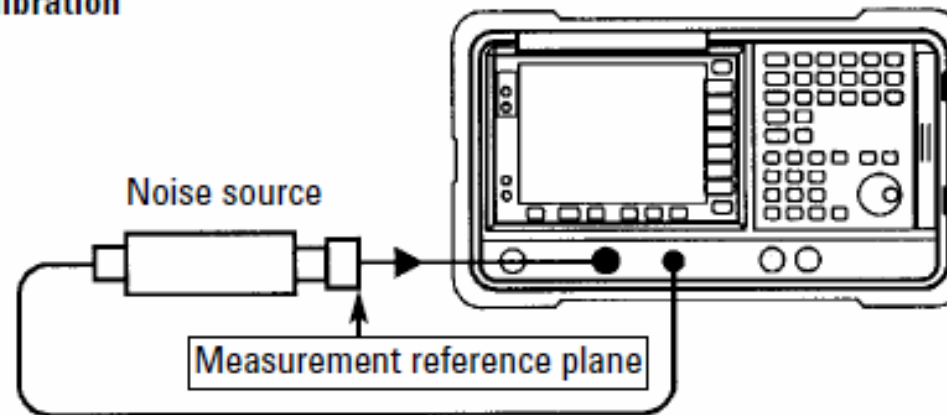
# Messung der Rauschzahl



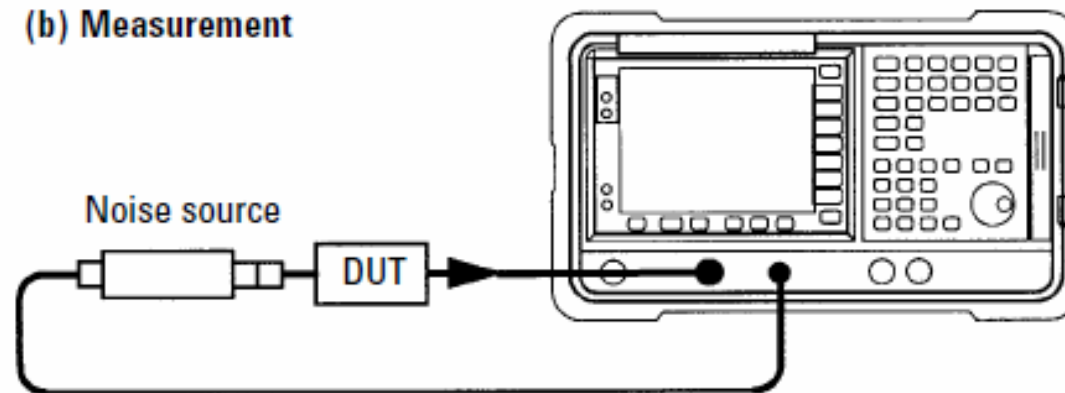
# Y-Faktor-Methode:

- a) Kalibrierung
- b) Messung am DUT

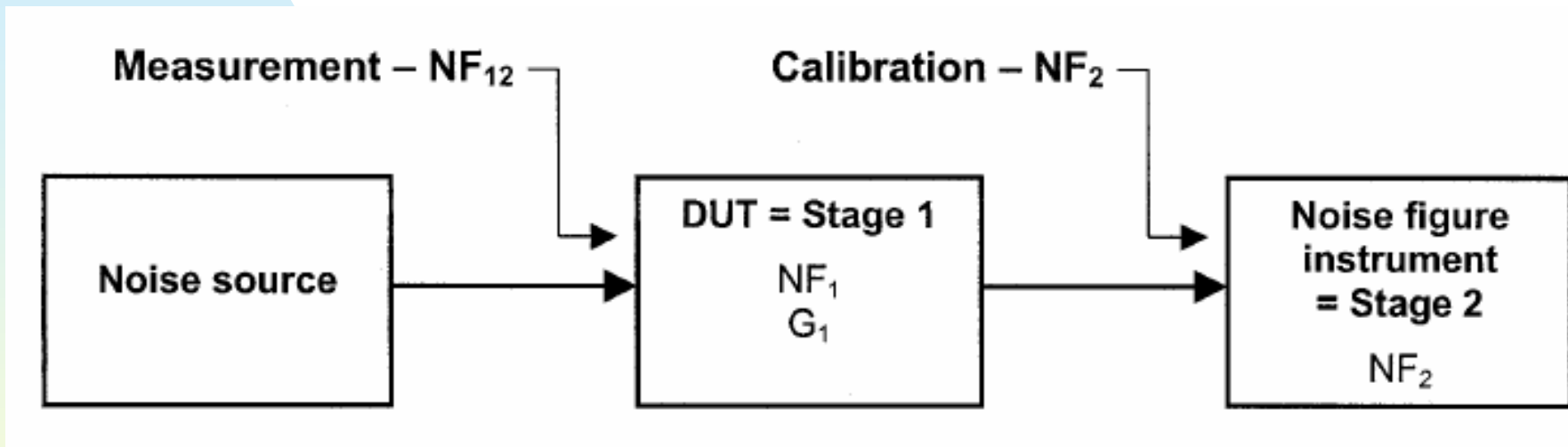
(a) Calibration



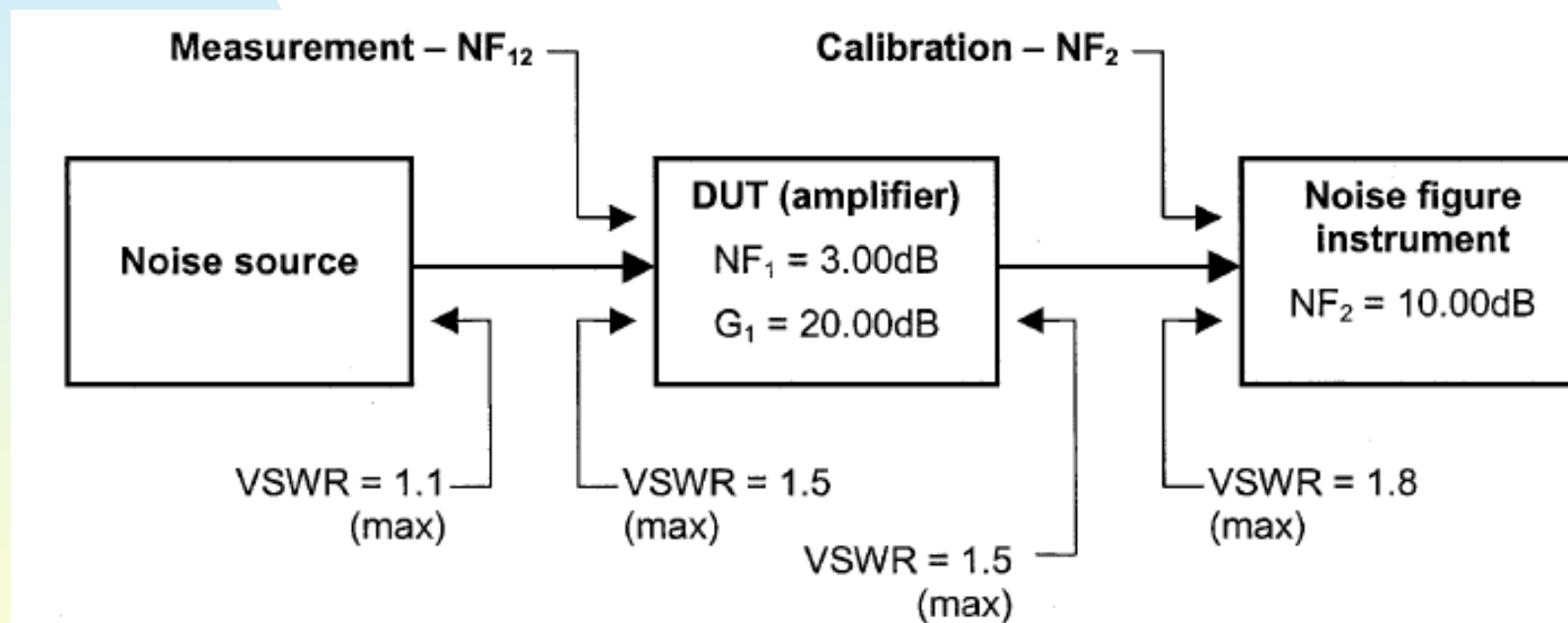
(b) Measurement



# Zweistufiges System zur Rauschzahlmessung



# Abschätzung der Messunsicherheiten





# Gesamtunsicherheit (**RSS**) der Rauschzahlmessung

**RSS** - Root Sum of Squares

$$\delta NF_1 = \sqrt{\left(\frac{F_{12}}{F_1} \delta NF_{12}\right)^2 + \left(\frac{F_2}{F_1 G_1} \delta NF_2\right)^2 + \left(\frac{F_2 - 1}{F_1 G_1} \delta G_{1, \text{dB}}\right)^2 + S \left(\left(\frac{F_{12}}{F_1} - \frac{F_2}{F_1 G_1}\right) \delta ENR_{\text{dB}}\right)^2}$$

- $F_1$  is the noise factor of the DUT, as a ratio;  $NF_1$  is the dB quantity
- $F_2$  is the noise factor of the noise figure instrument, as a ratio;  $NF_2$  is the dB quantity
- $F_{12}$  is the noise factor of the complete system (DUT and instrument), as a ratio;  $NF_{12}$  is the dB quantity.

- $G_1$  is the gain of the DUT, as a ratio;  $G_{1, \text{dB}}$  is the dB quantity
- $ENR_{\text{dB}}$  is the Excess Noise Ratio of the noise source, in dB
- The  $\delta$  terms are the associated uncertainties, always in dB.
- $S = 1$  for a single-frequency measurement;  $S = 0$  for a measurement involving frequency conversion.

# Beispiel 1(5)

Quantity	dB	Ratio = $\text{antilog}_{10}(\text{dB}/10)$
$F_1$	3	1.995
$F_2$	10	10
$G_1$	20	100
$F_{12} = F_1 + (F_2 - 1)/G_1$	3.19	2.085

Quantity	Value
$F_{12} / F_1$	1.045
$F_2 / F_1 G_1$	0.050
$(F_2 - 1) / F_1 G_1$	0.045
$(F_{12}/F_1) - (F_2/F_1 G_1)$	0.995

Interface	VSWR	Reflection Coefficient $\rho = (\text{VSWR} - 1) / (\text{VSWR} + 1)$
Noise source output	1.1	0.048
DUT input	1.5	0.200
DUT output	1.5	0.200
Instrument input	1.8	0.286

- The negative uncertainty is equal to:  
 $-20 \log(1 - \rho_{\text{Source}} \rho_{\text{Load}})$  dB
- The positive uncertainty is equal to:  
 $+20 \log(1 + \rho_{\text{Source}} \rho_{\text{Load}})$  dB
- Choose whichever of the two is the greater (underlined).

# Beispiel 2(5)

Interface	Negative uncertainty	Positive uncertainty	Maximum uncertainty	Symbol
Noise source to DUT input	<u>0.083</u>	0.082	0.083	$\delta_{\text{NS-DUT}}$
Noise source to instrument input	<u>0.119</u>	0.117	0.119	$\delta_{\text{NS-NFI}}$
DUT output to instrument input	<u>0.511</u>	0.483	0.511	$\delta_{\text{DUT-NFI}}$

The instrument uncertainties are:

- Instrument NF ( $F_2$ ) – for this example, assume  $\delta\text{NF}_{\text{Instrument}} = 0.05\text{dB}$ .
- Instrument gain linearity – assume  $\delta\text{Gain}_{\text{Instrument}} = 0.15\text{dB}$ .
- ENR of noise source – assume  $\delta\text{ENR} = 0.1\text{dB}$ .

## Beispiel 3(5)

□ Calculate  $\delta NF_{12}$  (dB):

$$\begin{aligned}\delta NF_{12}(dB) &= \sqrt{(\delta_{NS-DUT})^2 + (\delta NF_{Instrument})^2 + C(\delta ENR)^2} \\ &= \sqrt{0.083^2 + 0.05^2 + 0} = \underline{0.097}\end{aligned}$$

□ Calculate  $\delta NF_2$  (dB):

$$\begin{aligned}\delta NF_2(dB) &= \sqrt{(\delta_{NS-NFI})^2 + (\delta NF_{Instrument})^2 + C(\delta ENR)^2} \\ &= \sqrt{0.119^2 + 0.05^2 + 0} = \underline{0.129}\end{aligned}$$

□ Calculate  $\delta G_1$  (dB):

$$\begin{aligned}\delta G_1(dB) &= \sqrt{(\delta_{NS-DUT})^2 + (\delta_{NS-NFI})^2 + (\delta_{DUT-NFI})^2 + (\delta Gain_{Instrument})^2 + C(\delta ENR)^2} \\ &= \sqrt{0.083^2 + 0.119^2 + 0.511^2 + 0.15^2 + 0} = \underline{0.552}\end{aligned}$$

## Beispiel 4(5)

- Multiply the ratios found in Step 2 by the appropriate uncertainties.

$(F_{12}/F_1) \times \delta N F_{12}$	0.102
$(F_2/F_1 G_1) \times \delta N F_2$	0.007
$((F_2-1)/(F_1 G_1)) \times \delta G_1$	0.025
$S \times ((F_{12}/F_1) - (F_2/F_1 G_1)) \times \delta ENR$	0.099

# Beispiel

5(5)

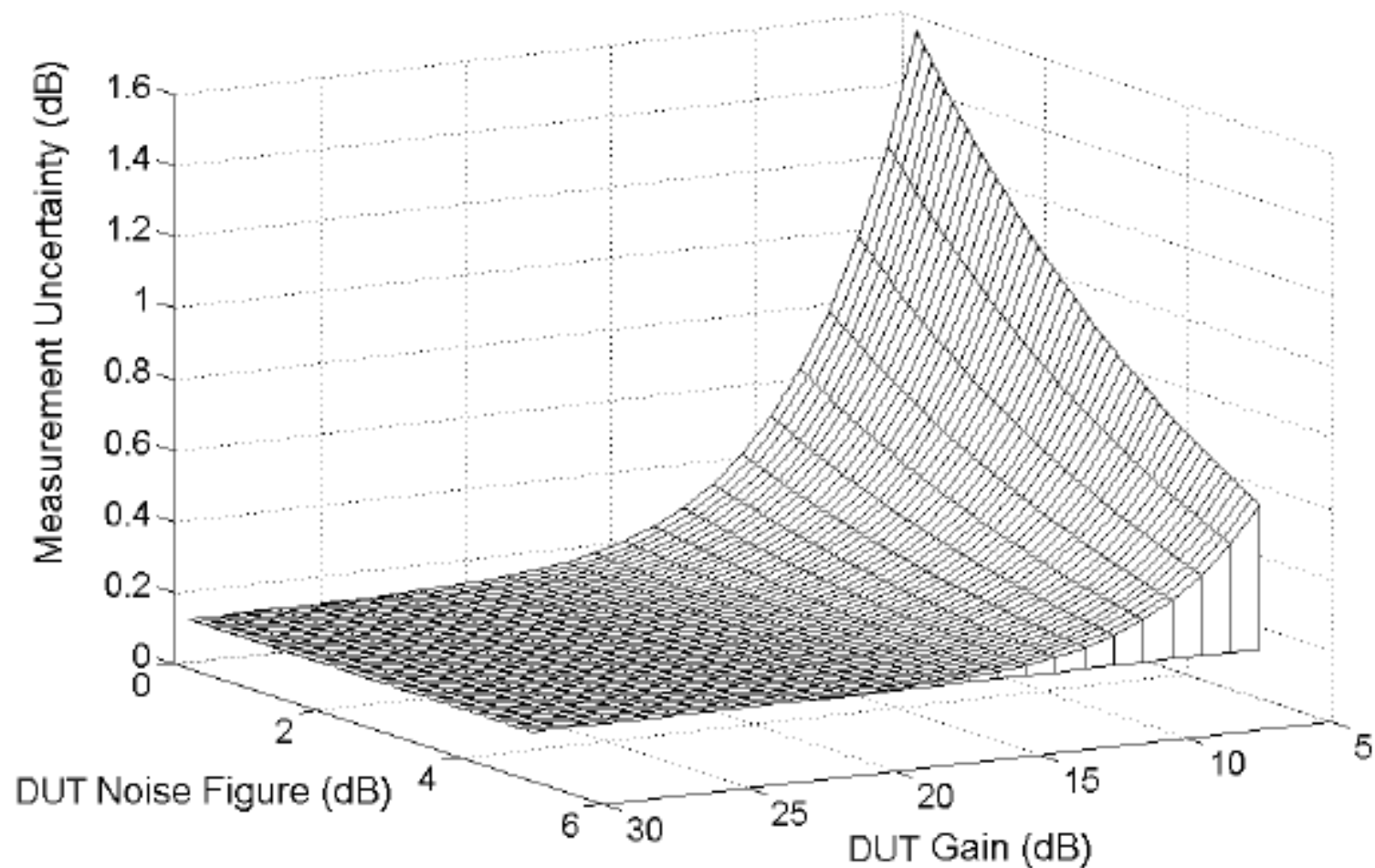
Root Sum of Squares (RSS) method will be used here since it is well understood.

RSS should strictly use linear quantities, but with the small dB values that appear in most noise figure uncertainty calculations, the error is only around 0.001dB.

$$\delta NF_{12}(dB) = \pm \sqrt{0.102^2 + 0.007^2 + 0.025^2 + 0.099^2} = \pm 0.144$$

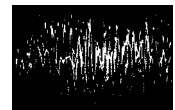
The noise figure of the DUT in this example is therefore 3.00dB ±0.144dB

# Typische RSS-Unsicherheit in Abhängigkeit von der DUT-Rauschzahl und von der Verstärkung



# Beispiele, Anwendungen

- Beispiele SNR
- Quantisierungsrauschen
- NEP
- Messplatz zur Bestimmung von Rauschzahlen
- Zusammenfassung zu „Mesung kleiner Signale“ bzw. zu „Vergrößerung des SNR“





## SOME NOISE ALGEBRA

I.

I. Show  $F = \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}}$  yields  $F = \frac{N_o + kT_o BG}{kT_o BG}$

$$F = \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} = \frac{S_{in}/N_{in}}{S_{out}/N_{out}} \quad (1)$$

But:  $S_{out} = GS_{in}$

$$N_{in} = kT_o B$$

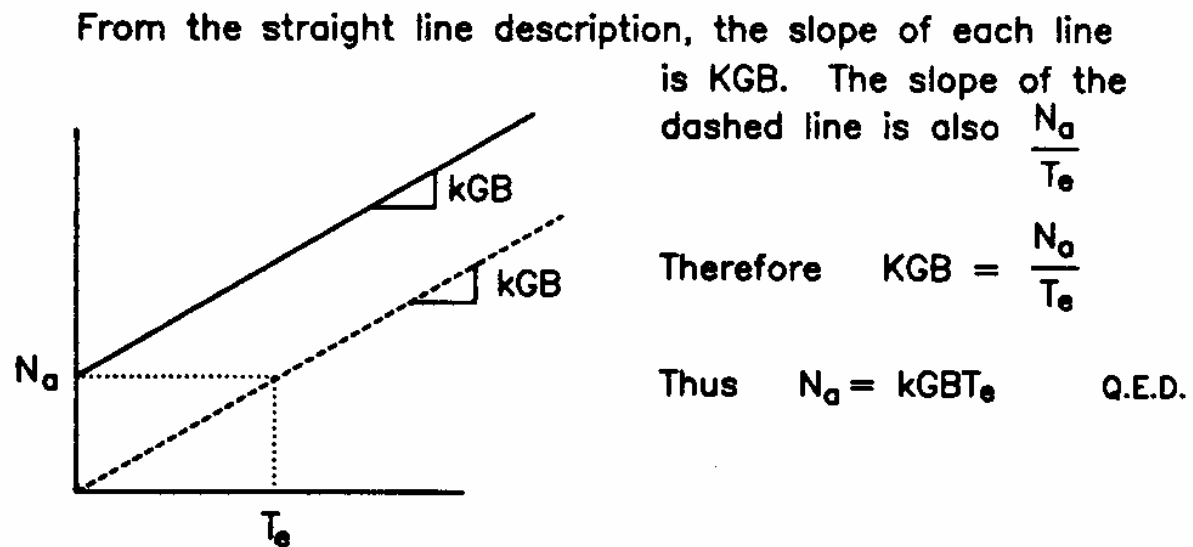
$$N_{out} = N_o + N_{in}G = N_o + kT_o BG$$

Substituting these in (1) gives

$$F = \frac{S_{in}/kT_o B}{GS_{in}/(N_o + kT_o BG)} = \frac{N_o + kT_o BG}{kT_o BG} \quad \text{Q.E.D.}$$

## SOME NOISE ALGEBRA II.

II. Show that  $T_e = N_a / kGB$ , i.e.,  $N_a = T_e kGB$ .



## SOME NOISE ALGEBRA

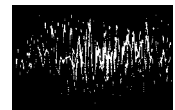
### III.

III. Show that  $F = \frac{T_e + T_o}{T_o}$ .

$$F = \frac{N_a + kT_o BG}{kT_o BG}$$

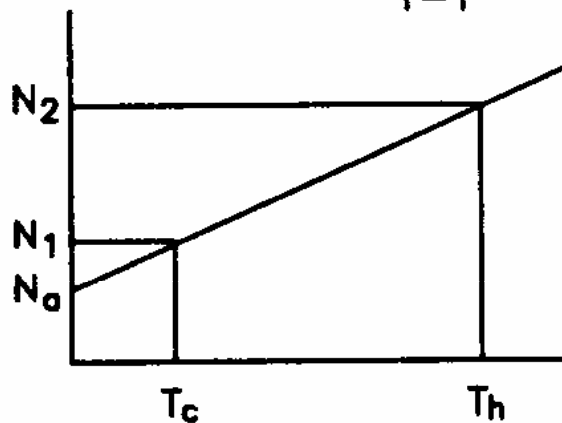
But  $N_a = kGBT_e$  so that

$$F = \frac{kGBT_e + kGBT_o}{kGBT_o} = \frac{T_e + T_o}{T_o} \quad \text{Q.E.D.}$$



## SOME NOISE ALGEBRA IV.

IV. Show that  $T_e = \frac{T_h - YT_c}{Y - 1}$  where  $Y = \frac{N_2}{N_1}$ .



From the straight line description:

$$N_2 = N_0 + kGHT_h = kGB(T_e + T_h)$$

$$N_1 = N_0 + kGBT_c = kGB(T_e + T_c)$$

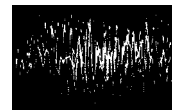
$$Y = \frac{N_2}{N_1} = \frac{kGB(T_e + T_h)}{kGB(T_e + T_c)}$$

Solve for  $T_e$ :  $YT_e + YT_c = T_e + T_h$

$$YT_e - T_e = T_h - YT_c$$

$$T_e = \frac{T_h - YT_c}{Y - 1}$$

Q.E.D.



## SOME NOISE ALGEBRA

### V.

V. Show that  $F = \frac{\left(\frac{T_h}{T_o} - 1\right) - \gamma \left(\frac{T_c}{T_o} - 1\right)}{\gamma - 1}$

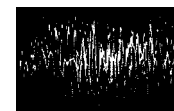
$$T_e = \frac{T_h - \gamma T_c}{\gamma - 1}$$

but  $F = \frac{T_e}{T_o} + 1 = \frac{\frac{T_h - \gamma T_c}{\gamma - 1}}{T_o} + 1$

$$= \frac{\frac{T_h}{T_o} - \gamma \frac{T_c}{T_o}}{\gamma - 1} + 1 = \frac{\frac{T_h}{T_o} - \gamma \frac{T_c}{T_o} + \gamma - 1}{\gamma - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{T_h}{T_o} - 1\right) - \gamma \left(\frac{T_c}{T_o} - 1\right)}{\gamma - 1}$$

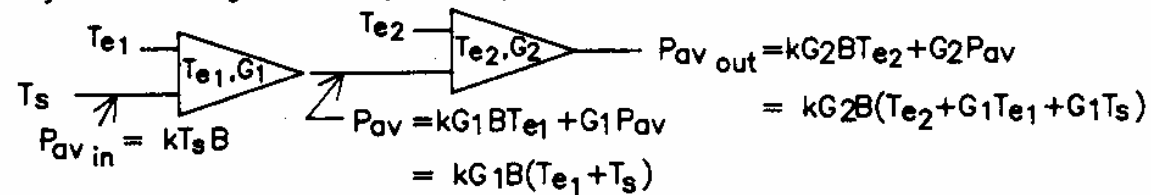
Q.E.D.



## SOME NOISE ALGEBRA VI.

VI. Show the cascade relationship,  $T_{e12} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G}$ .

By considering the component parts



But looking at the overall cascade (using  $G_{12} = G_1 G_2$ )

$$\begin{aligned} P_{av\ out} &= N_o + G_{12} N_{in} \\ &= kG_{12} B T_{e12} + kG_{12} B T_s \\ &= kG_1 G_2 B (T_{e12} + T_s) \end{aligned}$$

Equating the two expressions for  $P_{av\ out}$

$$kG_1 G_2 B (T_{e12} + T_s) = kG_2 B (T_{e2} + G_1 T_{e1} + G_1 T_s)$$

$$G_1 T_{e12} + G_1 T_s = T_{e2} + G_1 T_{e1} + G_1 T_s$$

$$T_{e12} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1}$$

Q.E.D.

## SOME NOISE ALGEBRA VII.

VII. Show  $F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$

Substitute in  $T_{e12} = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1}$  that

$$F_{12} = \frac{T_{e12}}{T_o} + 1 \quad \text{or} \quad T_{e12} = (F_{12} - 1) T_o$$

$$F_2 = \frac{T_{e2}}{T_o} + 1 \quad \text{or} \quad T_{e2} = (F_2 - 1) T_o$$

$$F_1 = \frac{T_{e1}}{T_o} + 1 \quad \text{or} \quad T_{e1} = (F_1 - 1) T_o$$

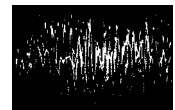
$$(F_{12} - 1) T_o = (F_1 - 1) T_o + \frac{(F_2 - 1) T_o}{G_1}$$

$$F_{12} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1}$$

Q.E.D.

# Literatur

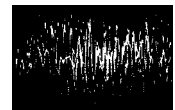
- Firmendruckschriften, Applikations-Schriften, hp, Agilent
- Müller, R.: Rauschen  
Berlin, ..., HongKong: Springer 1990
- Thumm, M.; Wiesbeck, W. und Kern, S.: Hochfrequenzmeßtechnik,  
Stuttgart: Teubner 1977
- Schiek, B.: Grundlagen der Hochfrequenz-Messtechnik  
Berlin, ..., New York: 1999



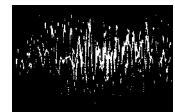
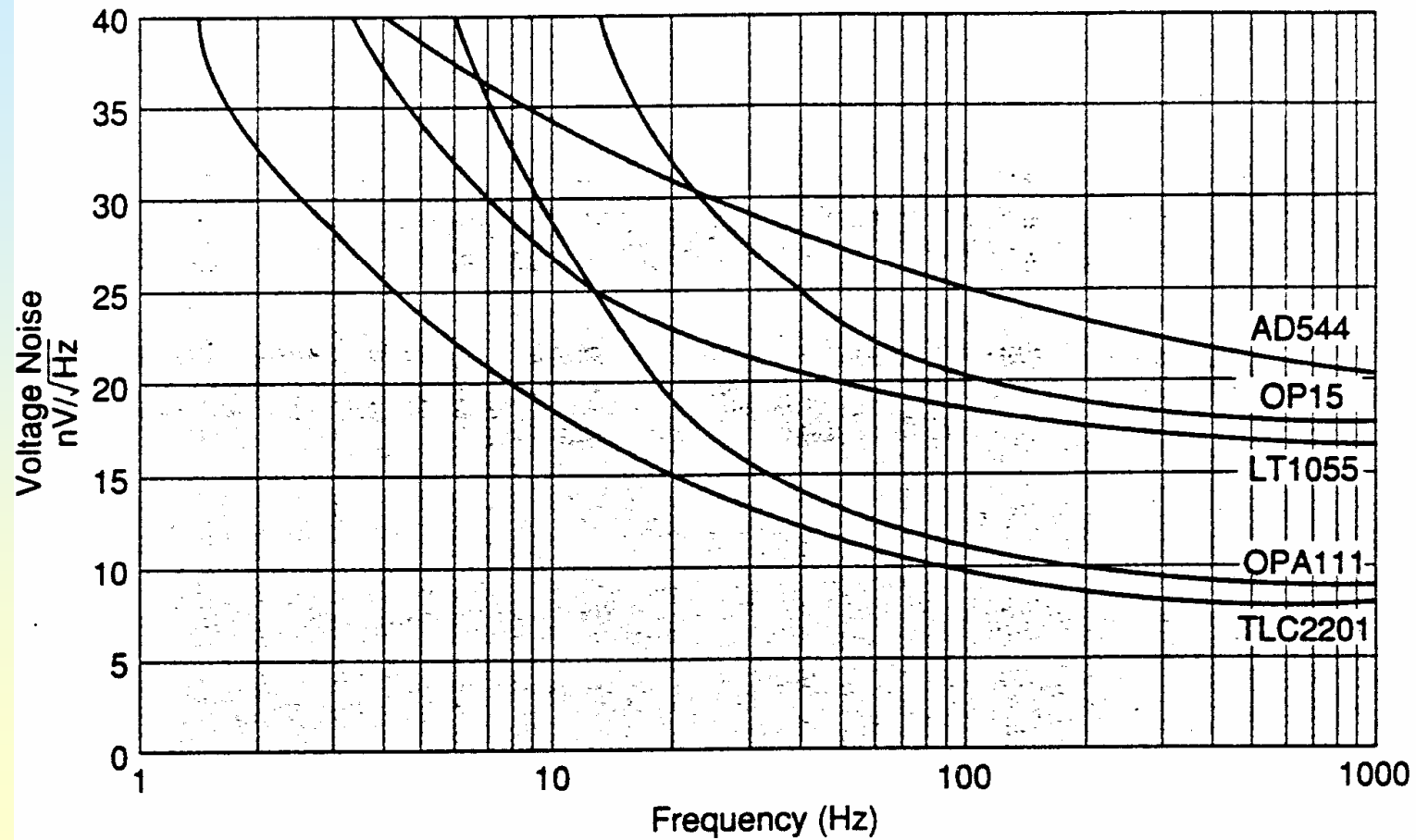


# Rauschen: Weiterführende Betrachtungen

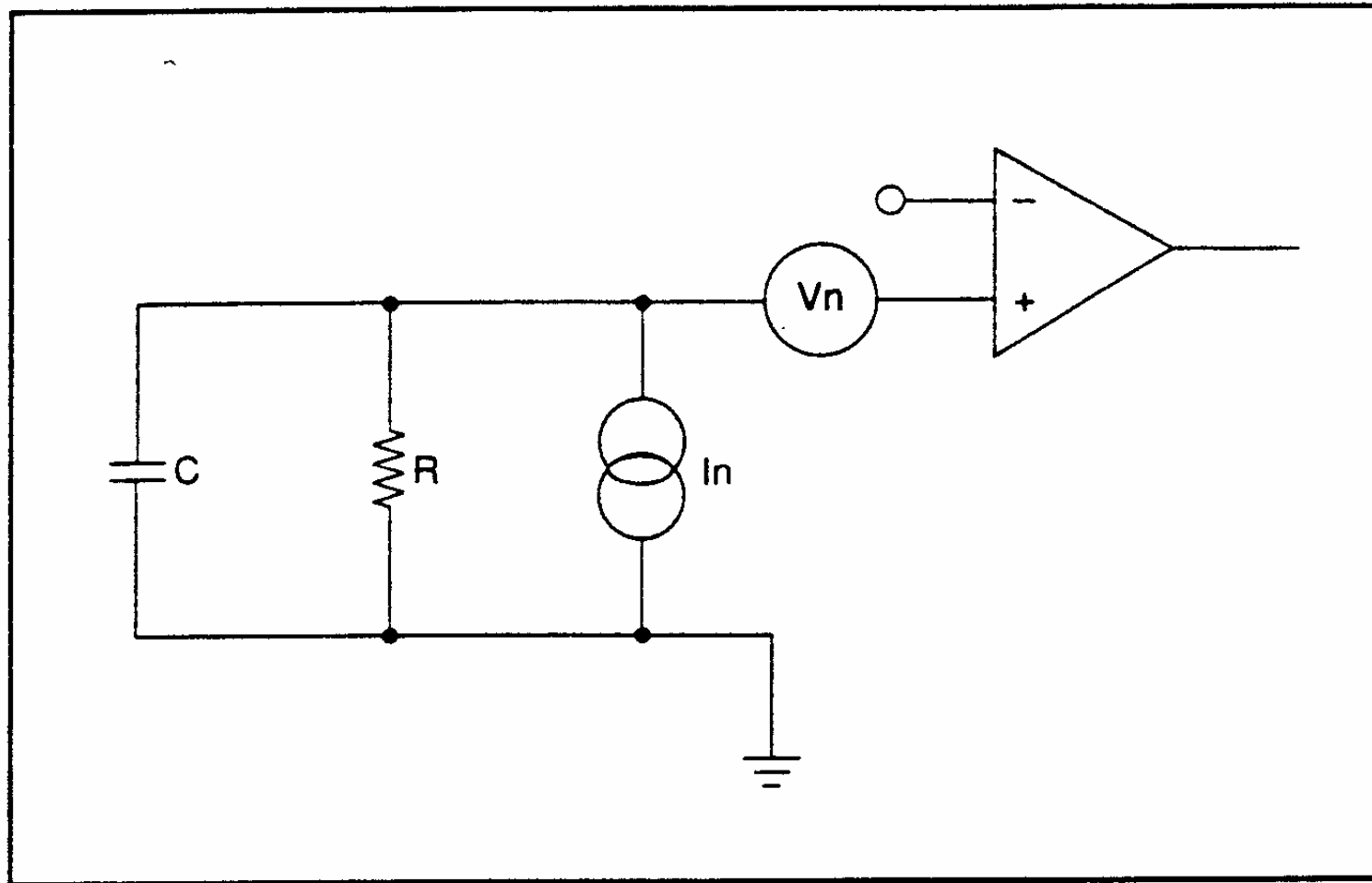
- Rauschen von OPVs
- Quantisierungsrauschen
- Phasenrauschen
- Rauschen optoelektronischer Sensoren



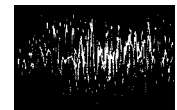
# Rauschen von OPVs



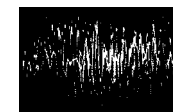
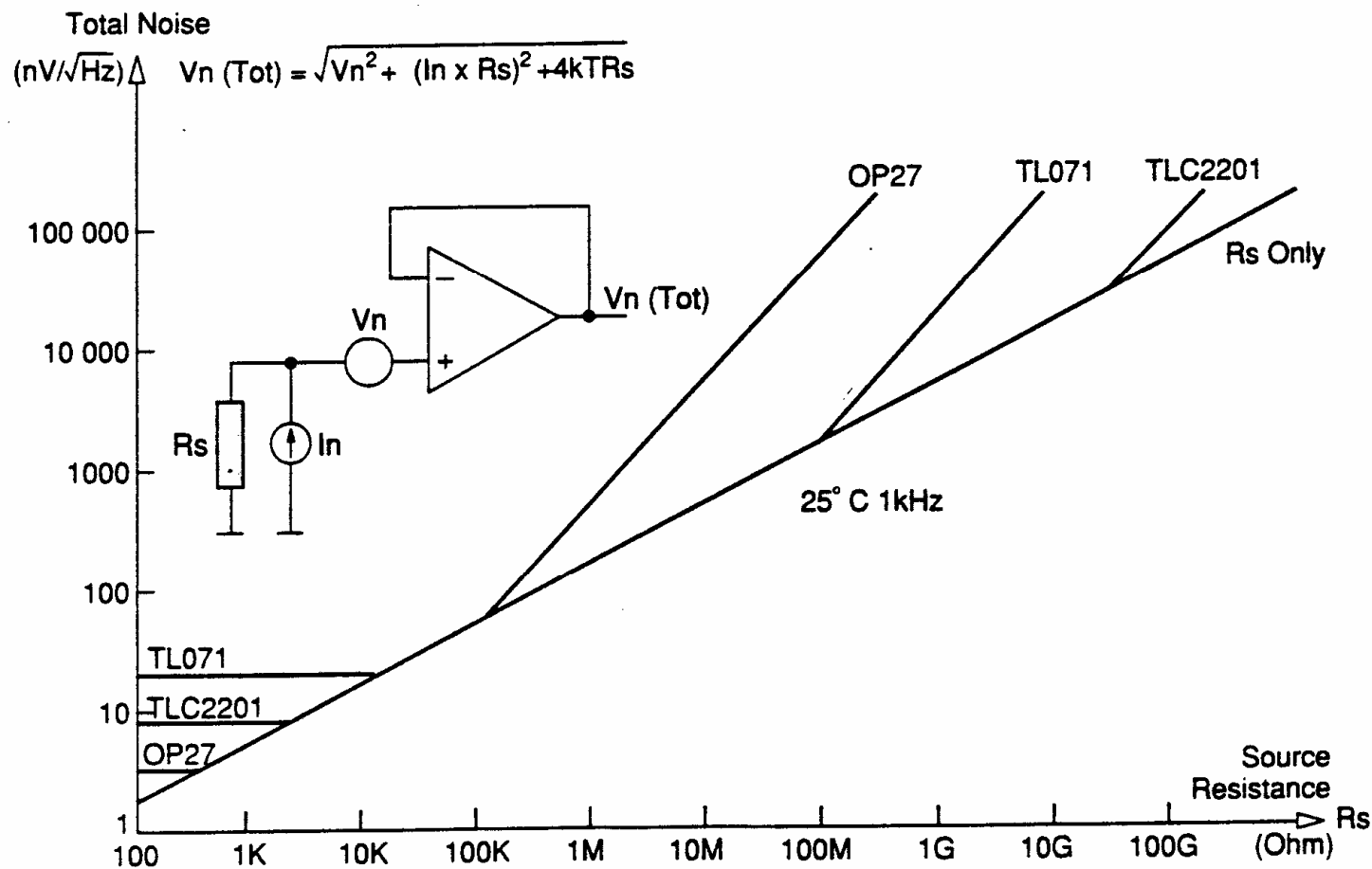
# Rauschen von OPVs



*Equivalent circuit for typical source impedance*

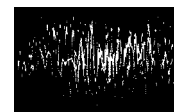


# Rauschen von OPVs

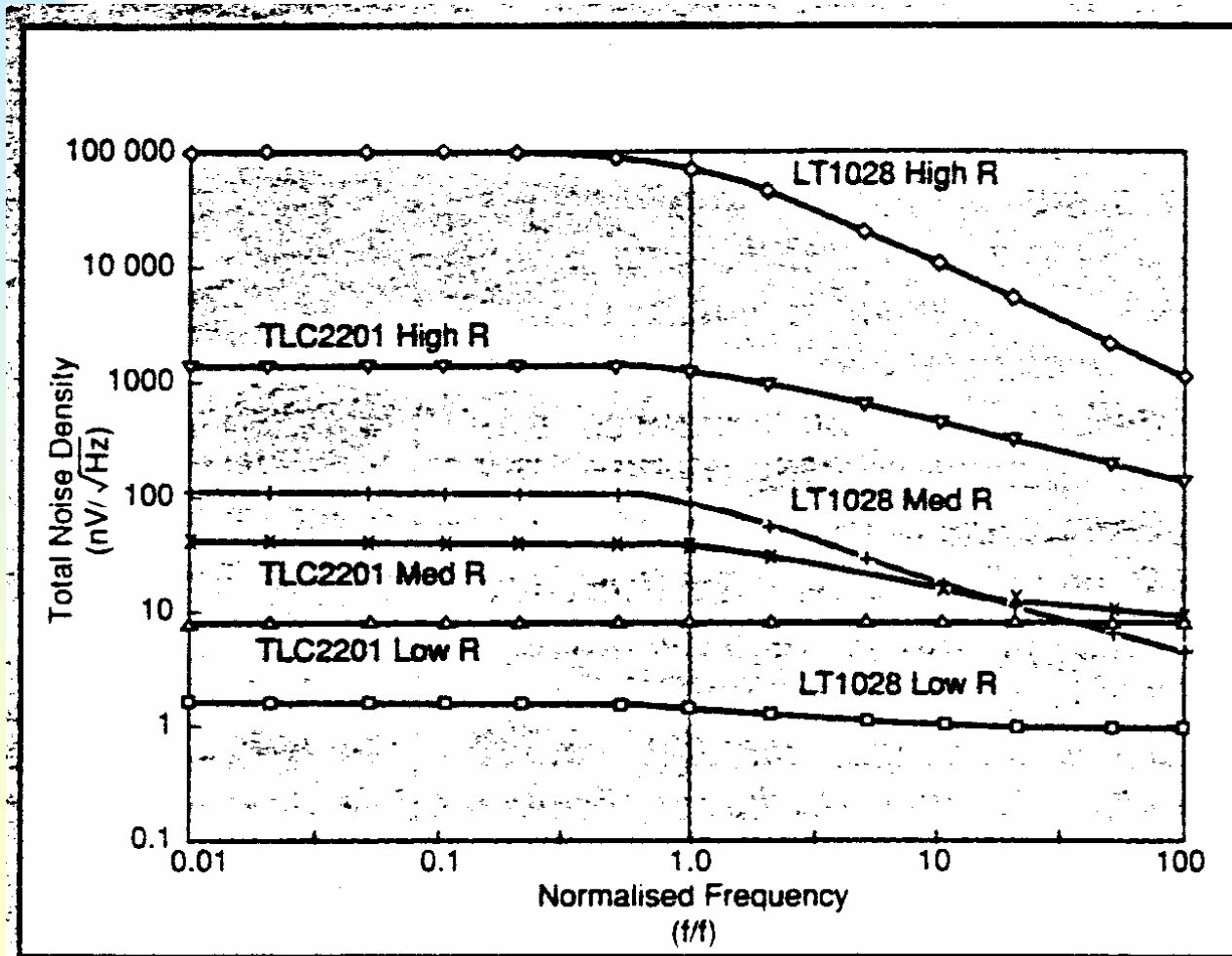


# Rauschen von OPVs

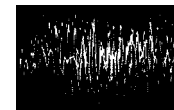
	LT1028	OP-27A	TLC2201	OPA111	Unit
<b>Technology</b>	Bipolar	Bipolar	LinCMOS	JFET	
<b>Voltage Noise 1kHz</b>	0.8	3.8	8	9	nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$
<b>Voltage Noise 10Hz</b>	1.1	5.5	18	30	nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$
<b>Current Noise 10Hz</b>	1000	3500	0.6	0.6	fA/ $\sqrt{\text{Hz}}$
<b>Max Offset voltage</b>	40	25	200	250	$\mu\text{V}$
<b>Max Bias Current</b>	2500	10,000	100	50	pA
<b>Min Supply Voltage</b>	$\pm 4$	$\pm 8$	$\pm 2.3$	$\pm 5$	V



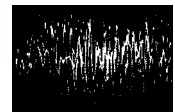
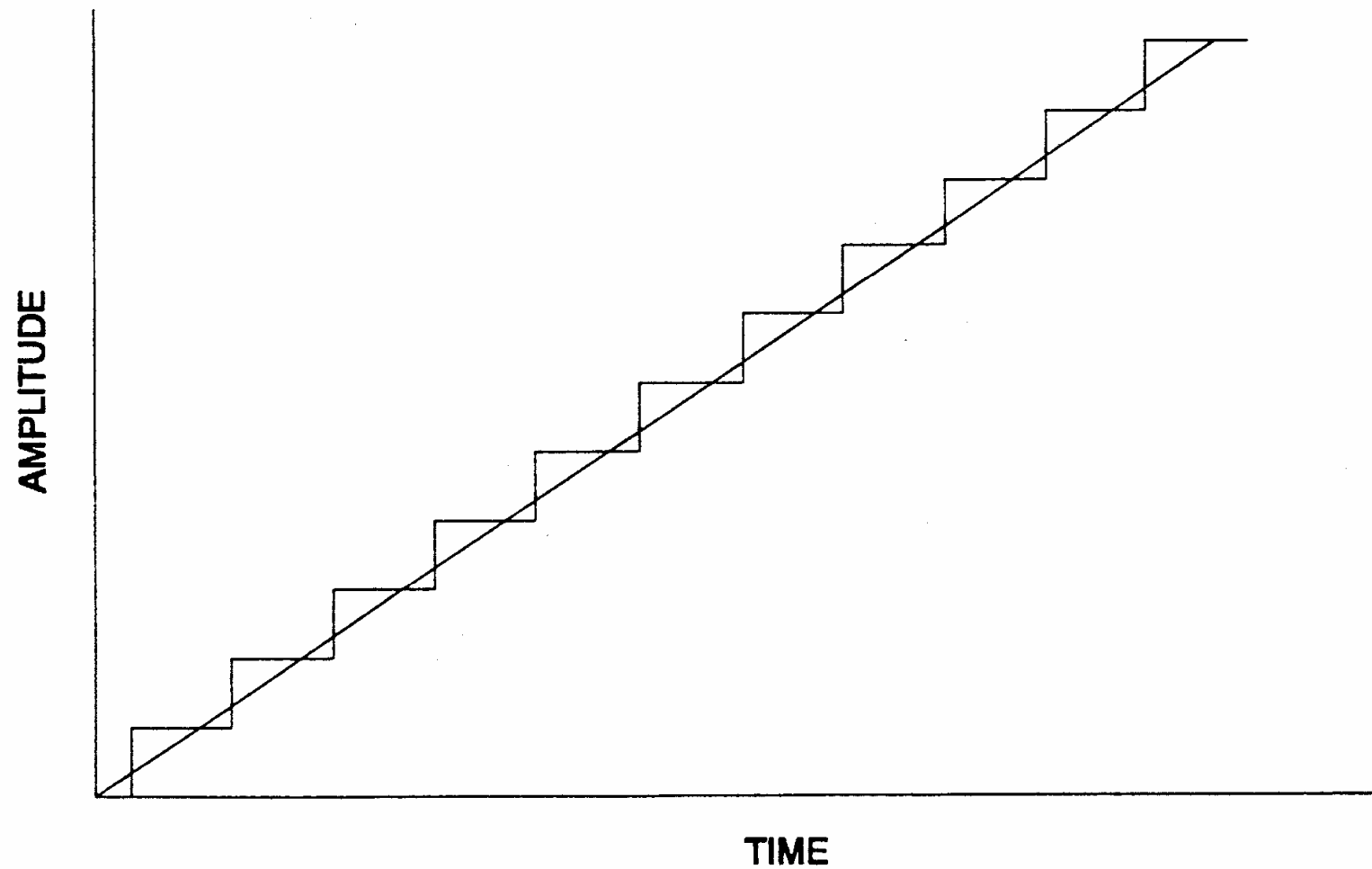
# Rauschen von OPVs



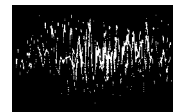
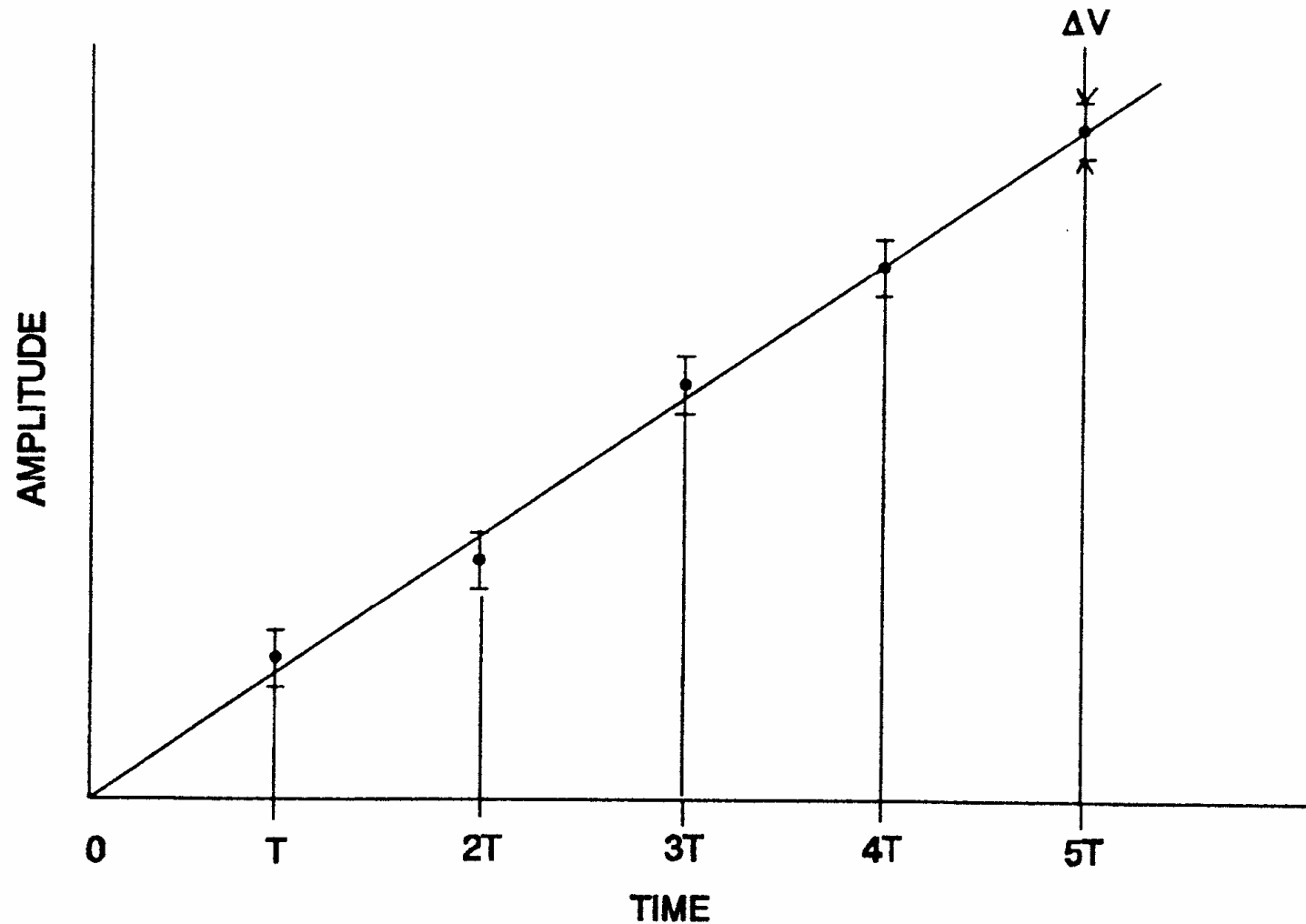
*Results of two ultra-low noise amplifiers*



# Quantisierungsrauschen

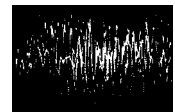
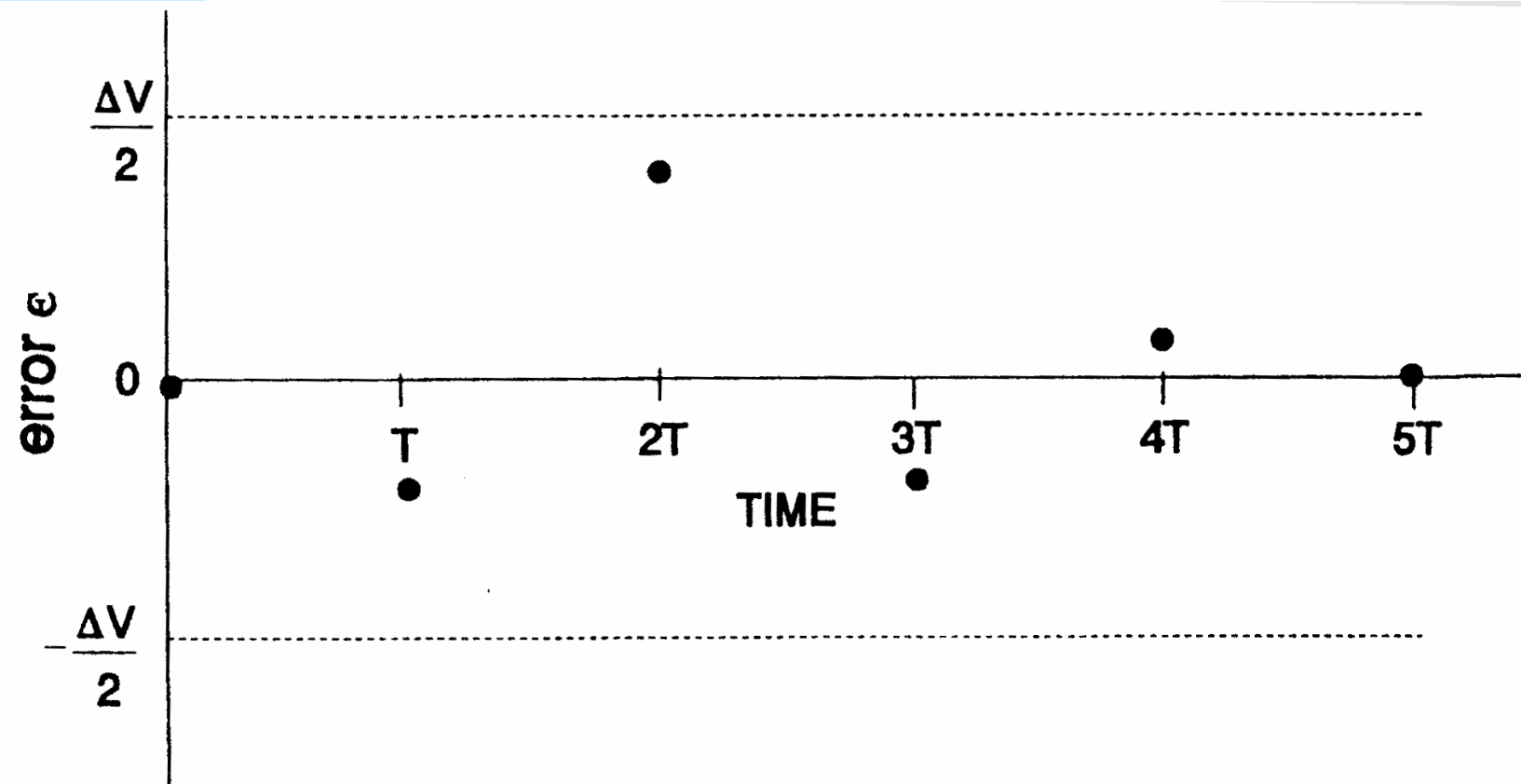


# Quantisierungsrauschen

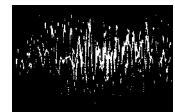
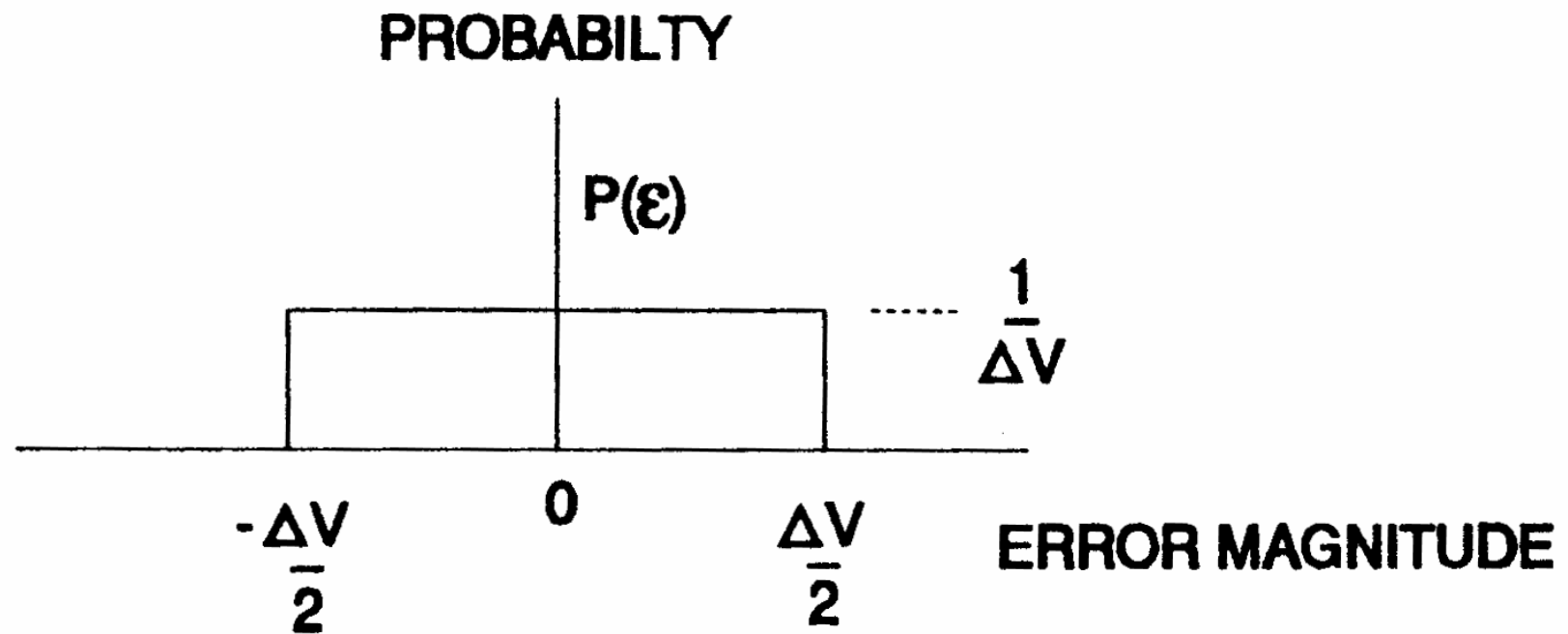




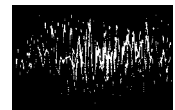
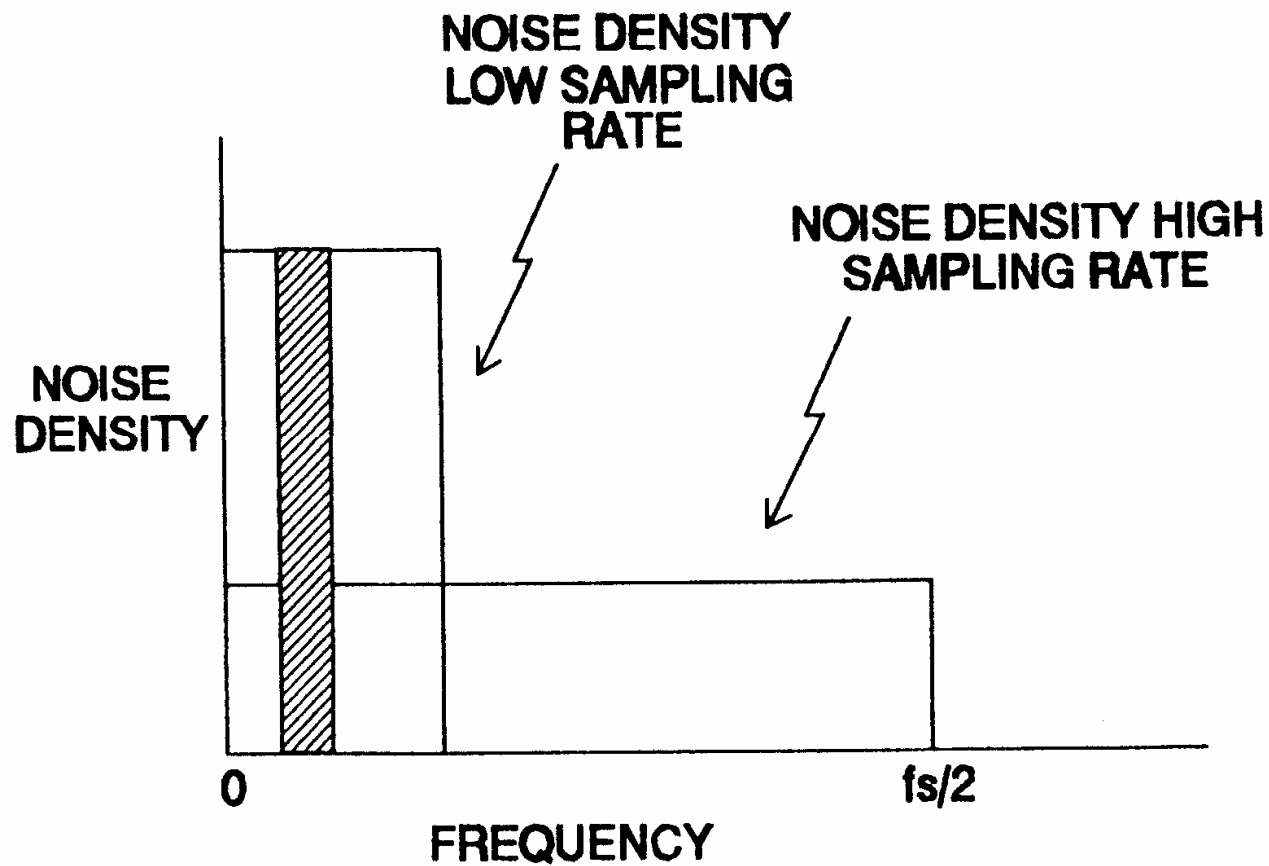
# Quantisierungsrauschen



# Quantisierungsrauschen

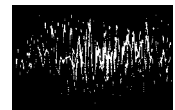


# Quantisierungsrauschen



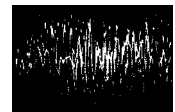
# Phasenrauschen

- Langzeitstabilität von Oszillatoren betrifft Änderungen der mittleren Frequenz, Drift
- Kurzzeitige determinierte oder statistische Schwankungen der Frequenz eines Signals um eine mittlere Frequenz

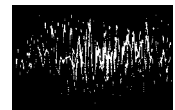
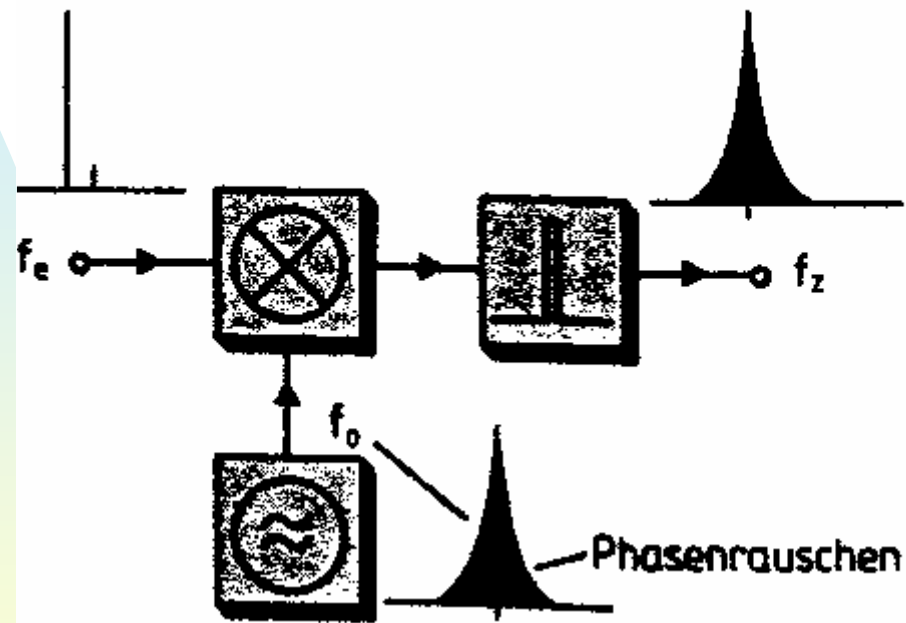


# Momentanfrequenz und Phase

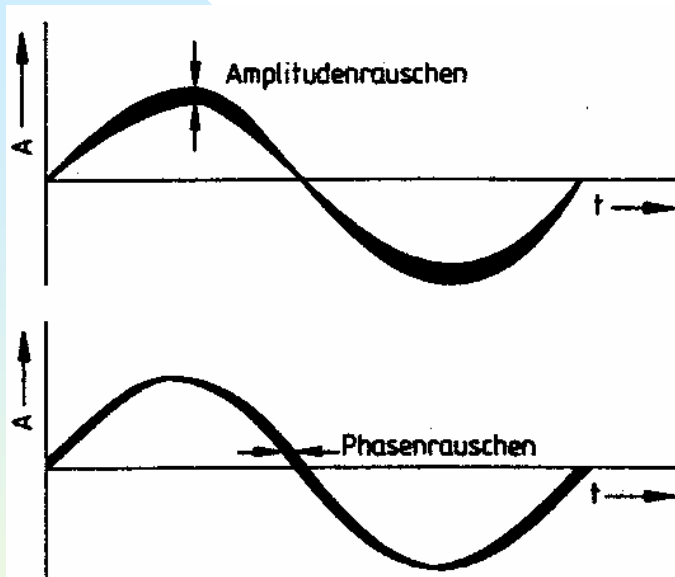
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt}$$



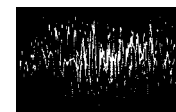
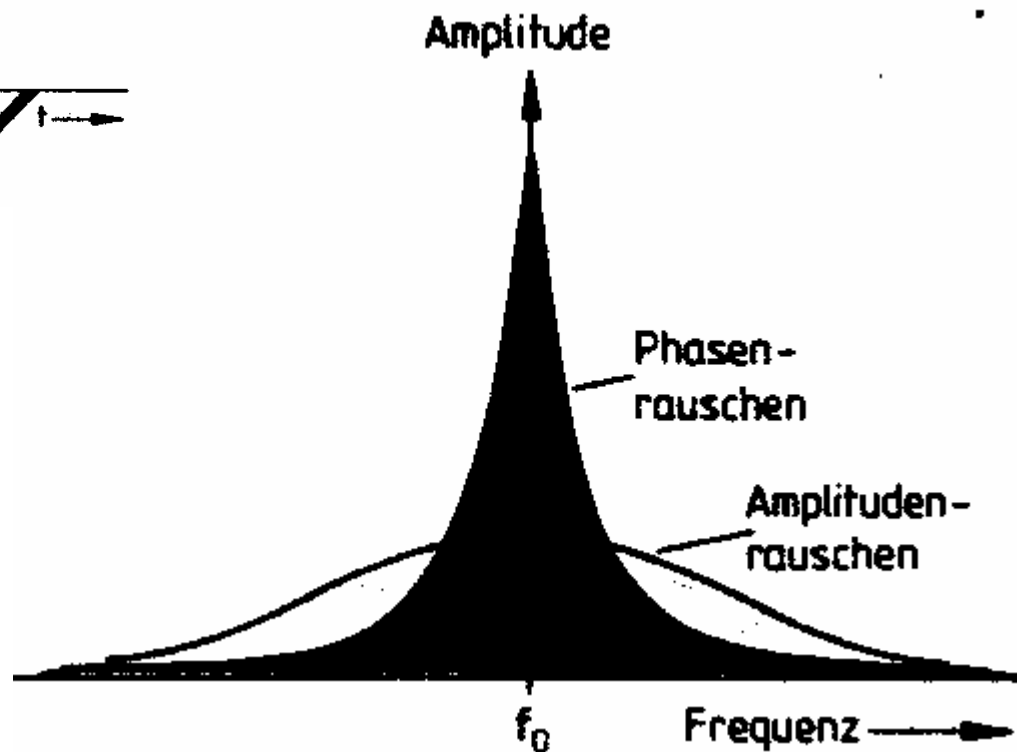
# Dynamikreduktion durch Phasenrauschen



# Phasenrauschen

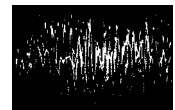


**Zeitbereich: Jitter**  
**Frequenzbereich: Phasenrauschen**



# Ursachen des Phasenrauschen

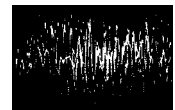
- Weißes Rauschen wird thermisch oder als Schrotrauschen erzeugt.
- Funkelrauschen ( $1/f$ ), mögliche Quelle: Ladungsträgereinfang und Rekombination an Oberflächensörstellen in Halbleiterübergängen
- Durchgang eines idealen Signals durch ein Zweitor, das Rauschquellen enthält  
→





# Ursachen des Phasenrauschen

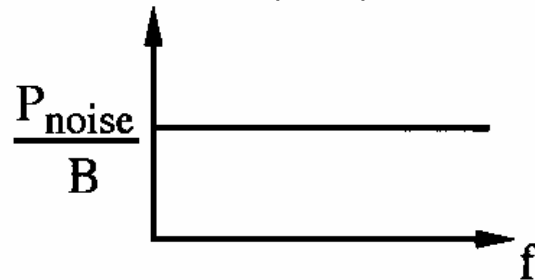
- Additive Überlagerung
- Multiplikative Überlagerung
- Absolutes Phasenrauschen



# Quellen von Rauschleistung und die Umsetzung in Phasenrauschen

## Primäre Rauschquellen

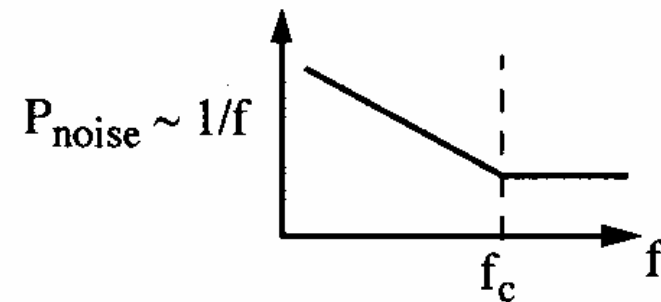
weißes Rauschen ( $\sim f^0$ ):



- thermisch:
- Schrotrauschen

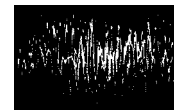
$$P_{\text{noise}} = kTB$$

Funkelrauschen (flicker noise,  $\sim f^{-1}$ ):



$f_c$ : "corner frequency"

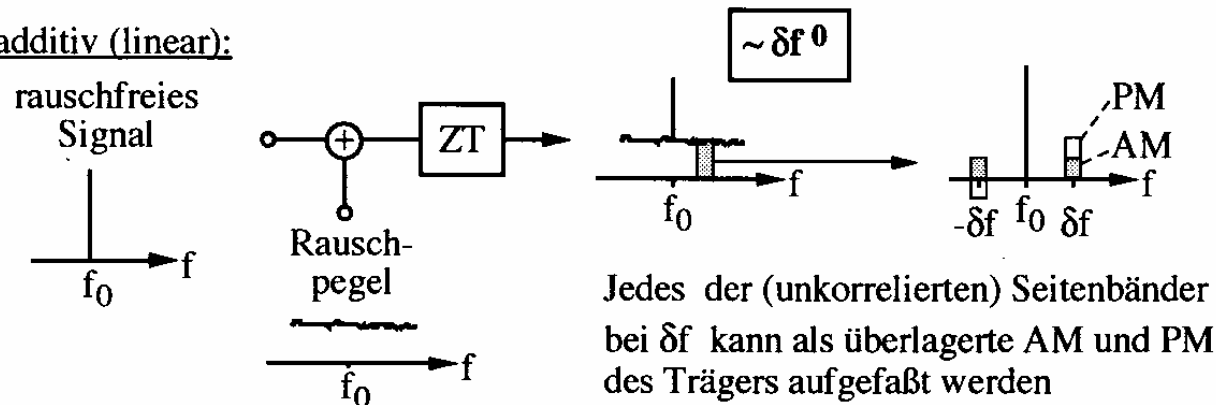
$$P_{\text{noise}} = kTB(1 + f_c/f)$$



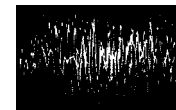
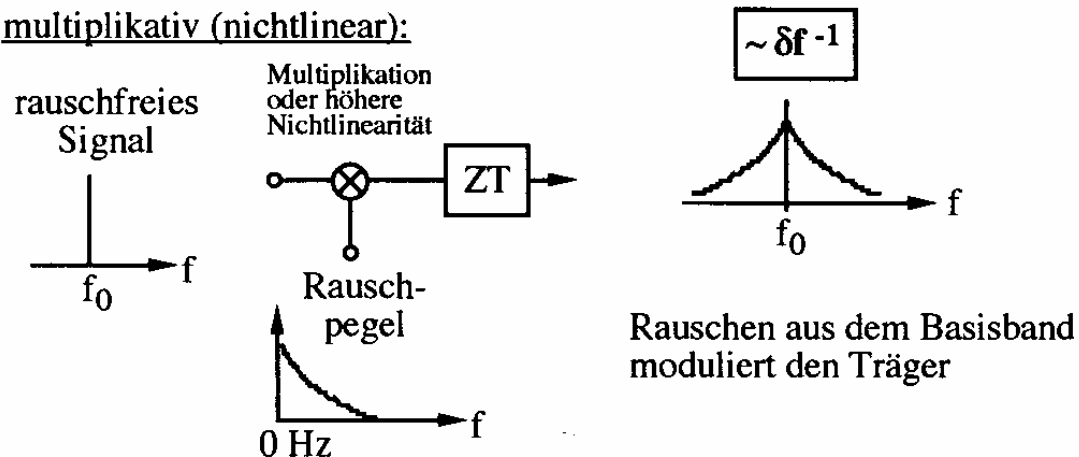
# Quellen von Rauschleistung und die Umsetzung in Phasenrauschen

## Überlagerungsmechanismen im Zweitor

### additiv (linear):

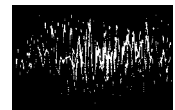


### multiplikativ (nichtlinear):



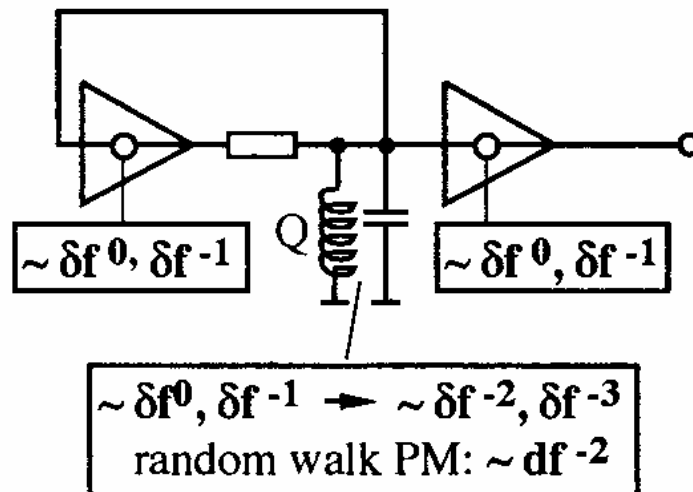
# Quellen von Rauschleistung und die Umsetzung in Phasenrauschen

- Wichtigster Effekt: Umsetzung von PM in FM
- Modell eines einfachen Oszillators
- Ausgangssignal des Verstärkers weist Rauschseitenbänder mit weißer ( $\delta f^0$ ) und  $1/\delta f$ -Charakteristik auf



# Quellen von Rauschleistung und die Umsetzung in Phasenrauschen

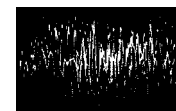
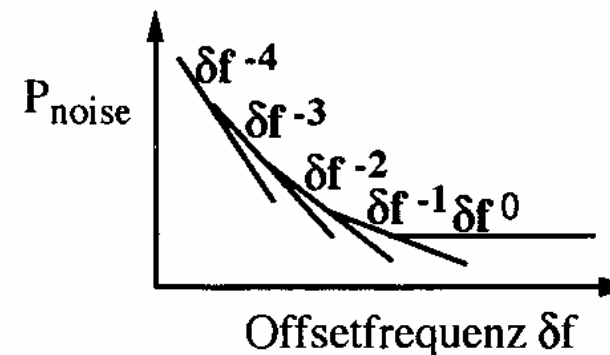
## Umsetzung bei der Signalerzeugung



Umwandlung der PM in FM am Resonator ergibt PM höherer Ordnung  
 $f - n \rightarrow f - (n+2)$

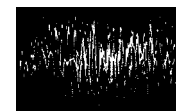
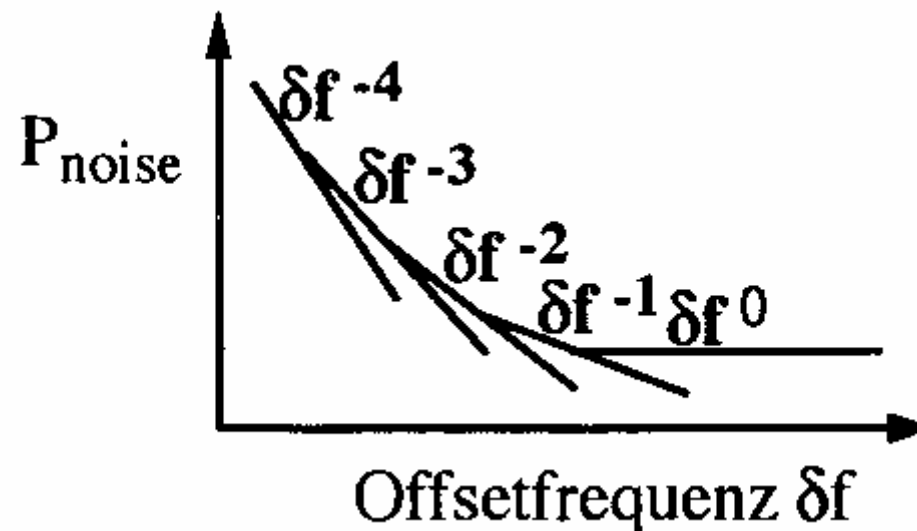
## Klassen von Rauscherscheinungen

- $\sim \delta f^0$ : weißes Rauschen
- $\sim \delta f^{-1}$ : Funkelrauschen
- $\sim \delta f^{-2}$ : "random walk" Rauschen und weiße FM
- $\sim \delta f^{-3}$ : FM-Funkelrauschen
- $\sim \delta f^{-4}$ : "random walk" FM

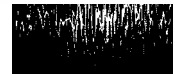
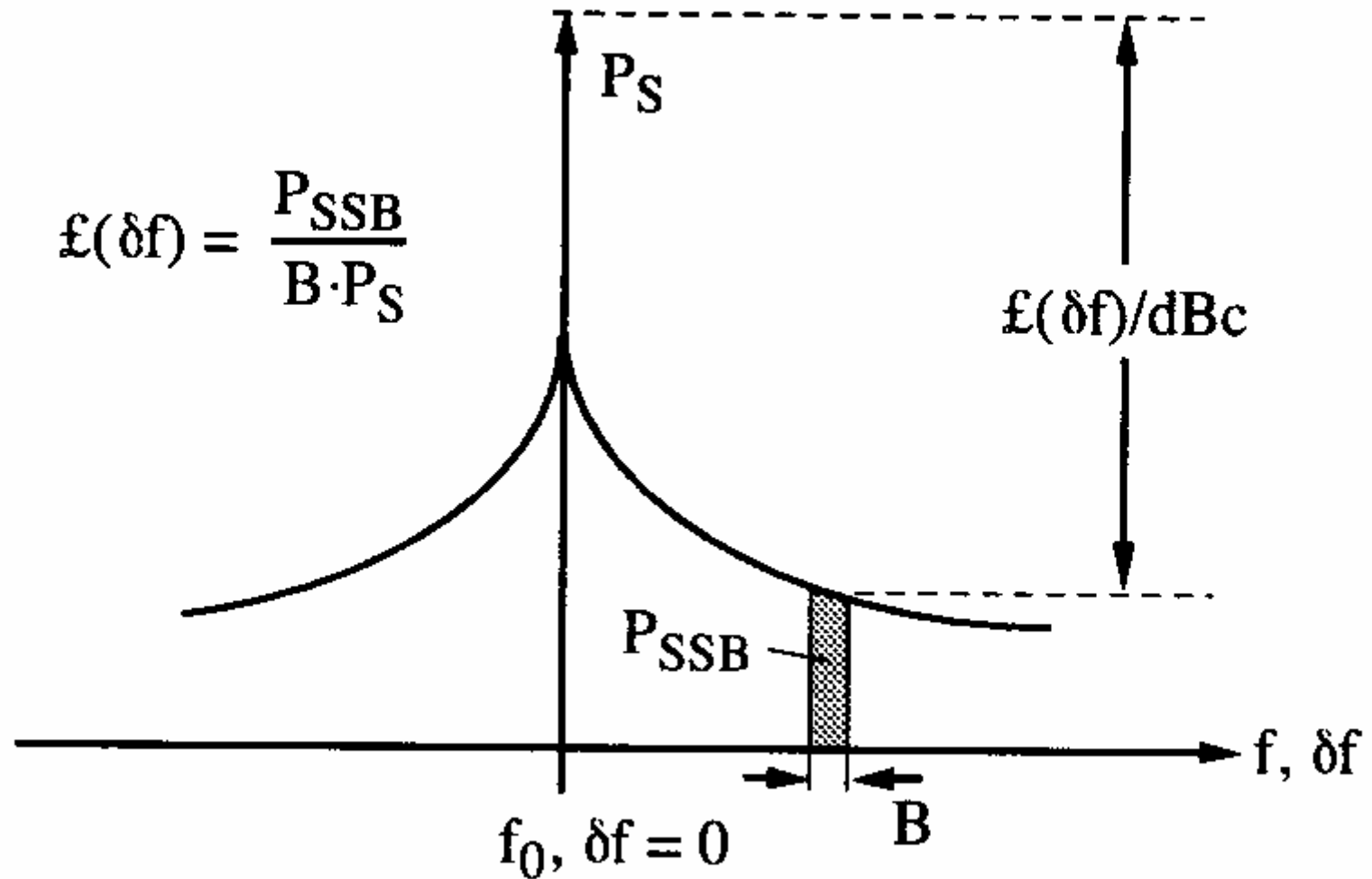


# Phasenrauschen

- $\sim \delta f^0$  : Weißes Rauschen (thermisch oder Schrotrauschen)
- $\sim \delta f^{-1}$  : Funkelrauschen (1/f-Rauschen, flicker noise)
- $\sim \delta f^{-2}$  : weiße FM und stochastisches "random walk"-Rauschen (mechanische Vibrationen und thermische Schwankungen)
- $\sim \delta f^{-3}$  : FM-Funkelrauschen
- $\sim \delta f^{-4}$  : stochastische FM und mehrfach umgesetztes Rauschen.



# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen

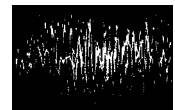


# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen

$$\mathcal{L}(\delta f)/(\text{dBc/Hz}) = \frac{\text{Rauschleistung eines Seitenbands bei } \delta f}{(\text{Meßbandbreite}) \cdot (\text{gesamte Signalleistung})}$$

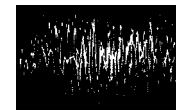
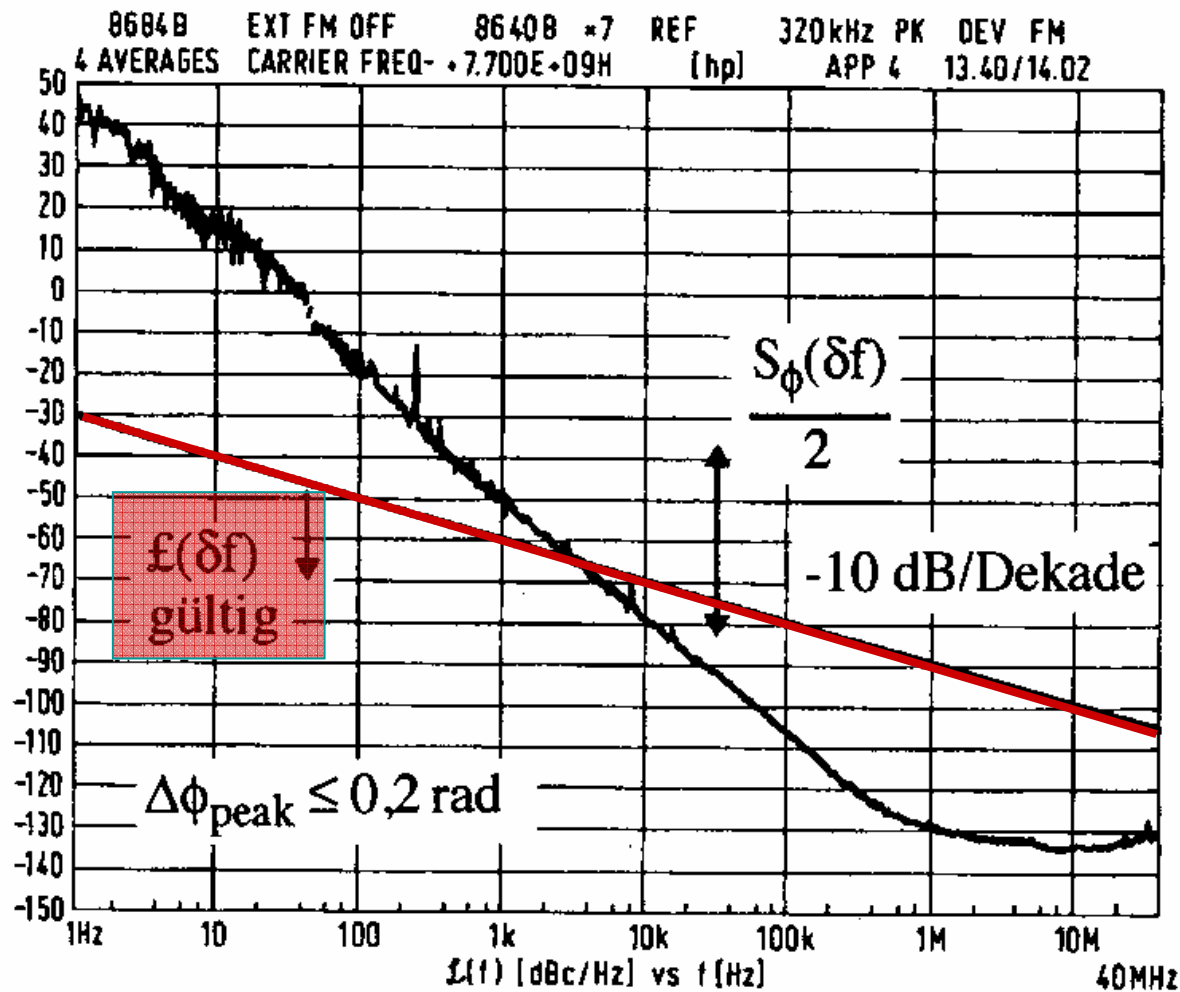
$$\mathcal{L}(\delta f)/(\text{W/Hz}) = \frac{(\Delta\phi_{\text{peak}})^2}{4B} = \frac{(\Delta\phi_{\text{rms}})^2}{2B} = \frac{S_{\phi}(\delta f)}{2}$$

$$\mathcal{L}(\delta f)/(\text{dBc/Hz}) = S_{\phi}(\delta f) - 3 \text{ dB}$$





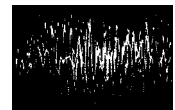
# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen



# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen

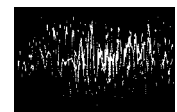
## Direkte Messmethode

- Messung mit Spektrumsanalysator
- Messbeispiele
- Datenkorrektur
- Vergleich des Phasenrauschens unterschiedlicher Oszillatoren



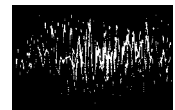
# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen Datenkorrektur

- Normierung auf äquivalente Rauschbandbreite von 1 Hz
- Äquivalente Rauschbandbreite des Auflösefilters:  $B_{\text{noise}} = 1,2 B_{3\text{dB Gauß}}$
- Normierung der Angabe in dBc auf **Gesamtleistung** (Bei Schmalband-Winkelmodulation wird die Gesamtleistung in guter Näherung durch die Spektrallinie des Trägers wiedergegeben.)

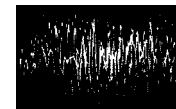
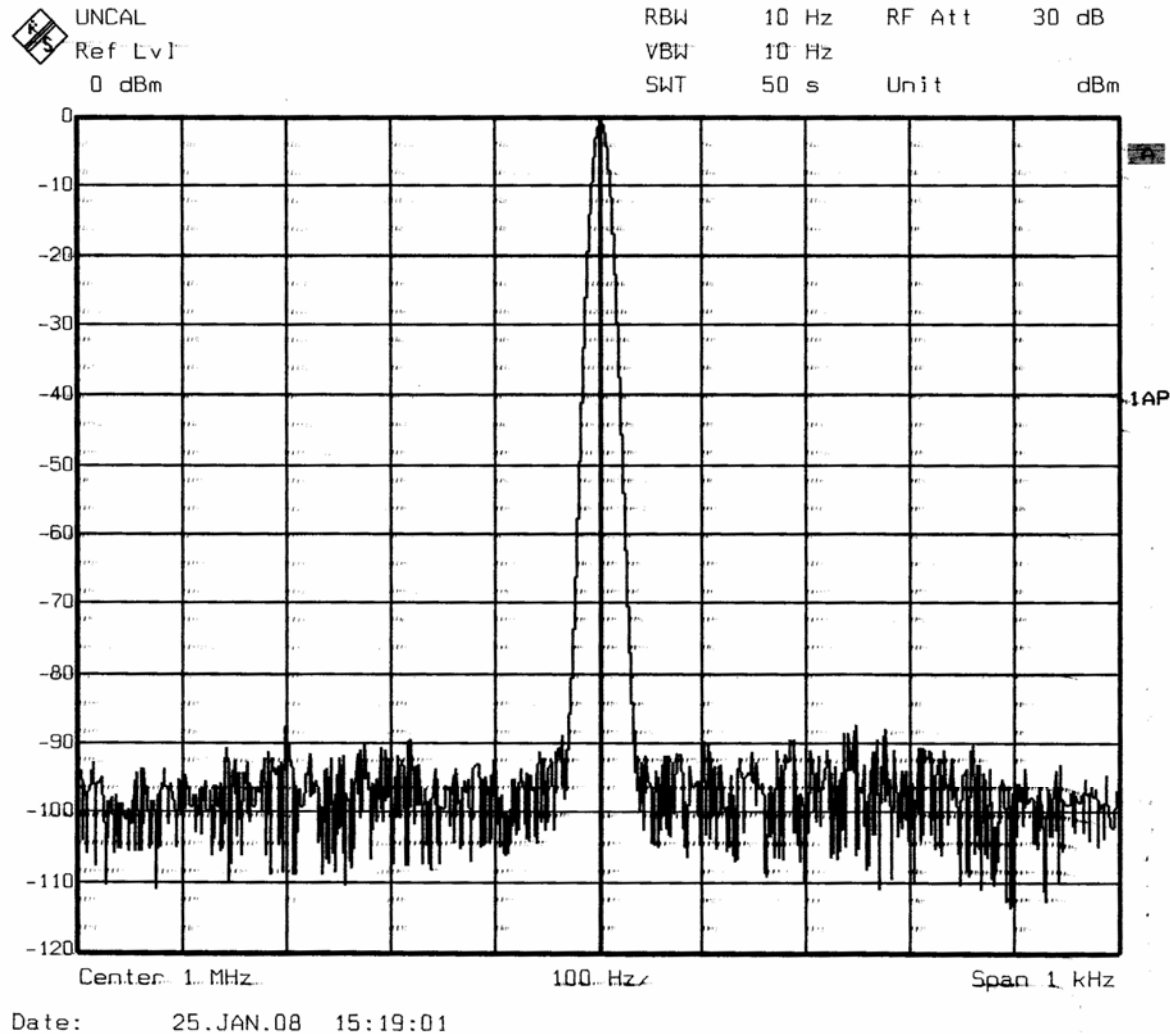


# Einseitenband- (SSB-) Phasenrauschen Datenkorrektur

- Anzeige von Spektralanalysatoren ist für die Anzeige sinusförmiger Signale kalibriert → für Rauschsignale ergibt sich ein systematisch zu kleiner Anzeigewert von 2,5 dB.

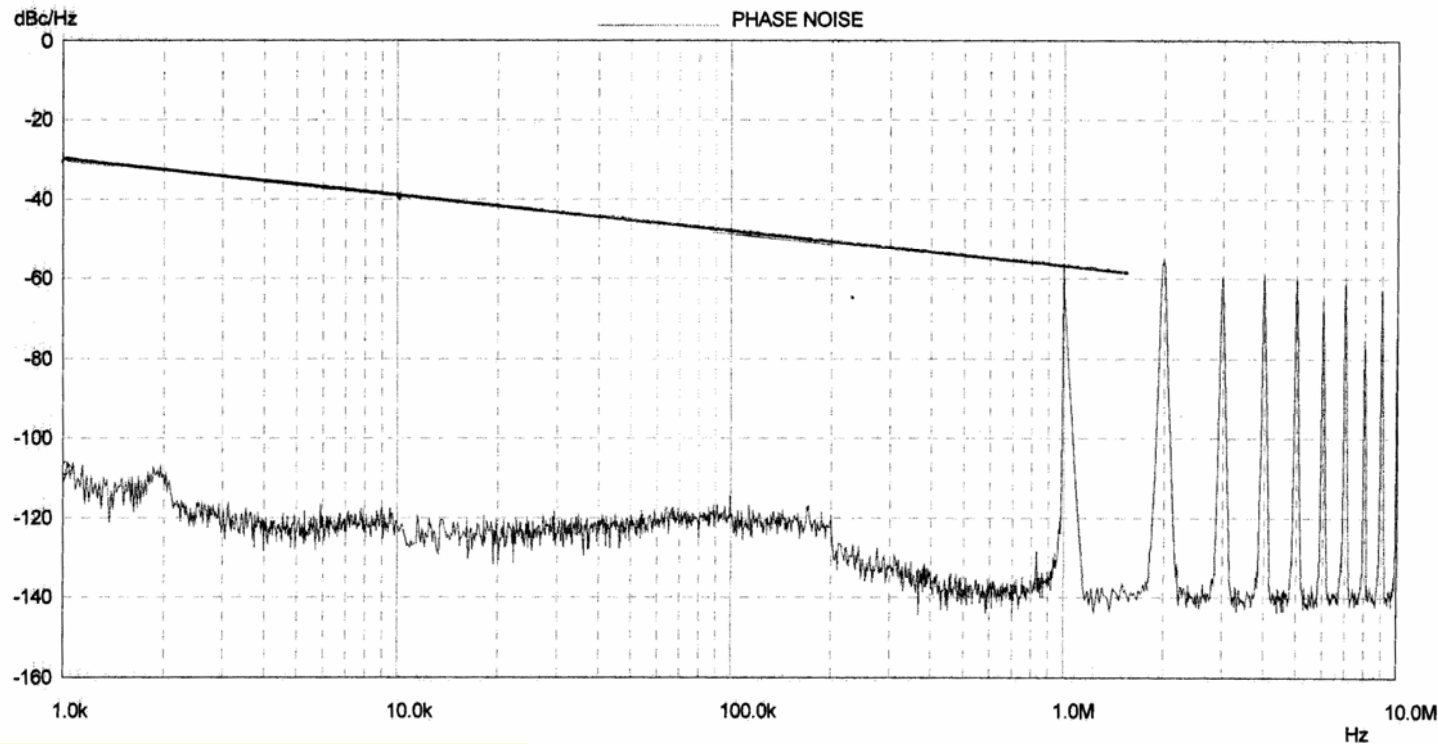


# SSB - Phasenrauschen



# SSB - Phasenrauschen

◇ 1.018 kHz -109.11 dBc/Hz



## Analyzer

Model: FSEA 30  
RBW/VBW Ratio: 10 to 1

## Signal

Frequency: 1 MHz  
Level: 0.0 dBm  
Frequency Tolerance: 1 kHz  
Level Tolerance: 20 dB

## Display X-Axis

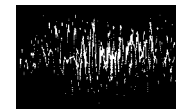
Minimum Offset: 1 kHz  
Maximum Offset: 10 MHz

## Display Y-Axis

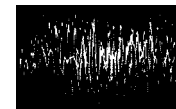
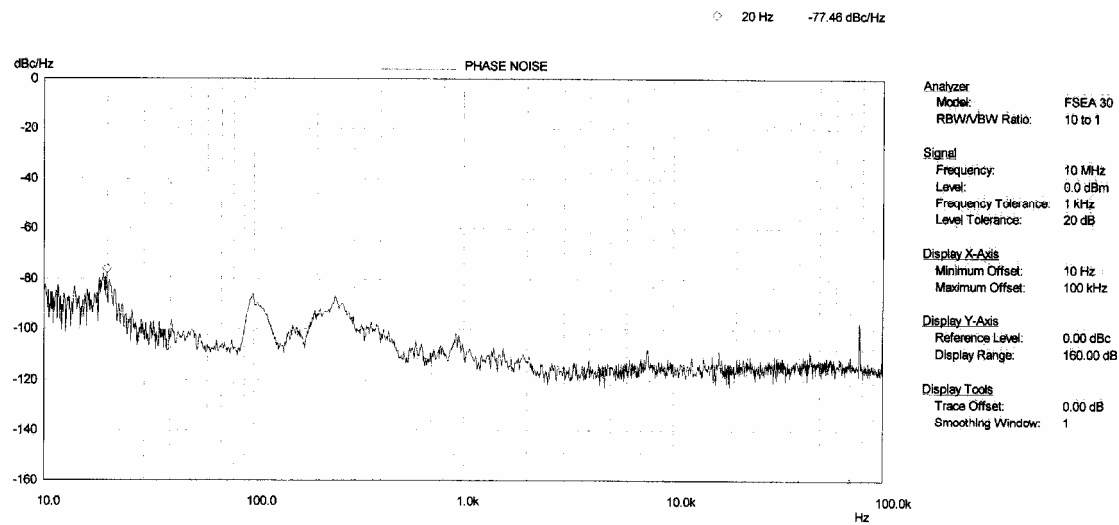
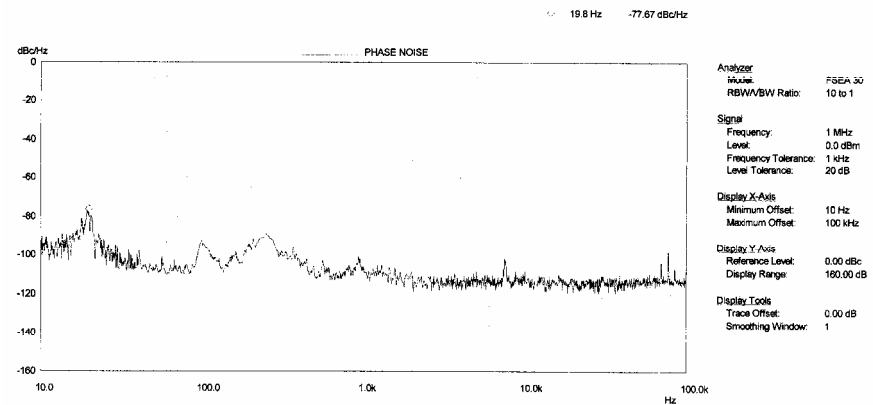
Reference Level: 0.00 dBc  
Display Range: 160.00 dB

## Display Tools

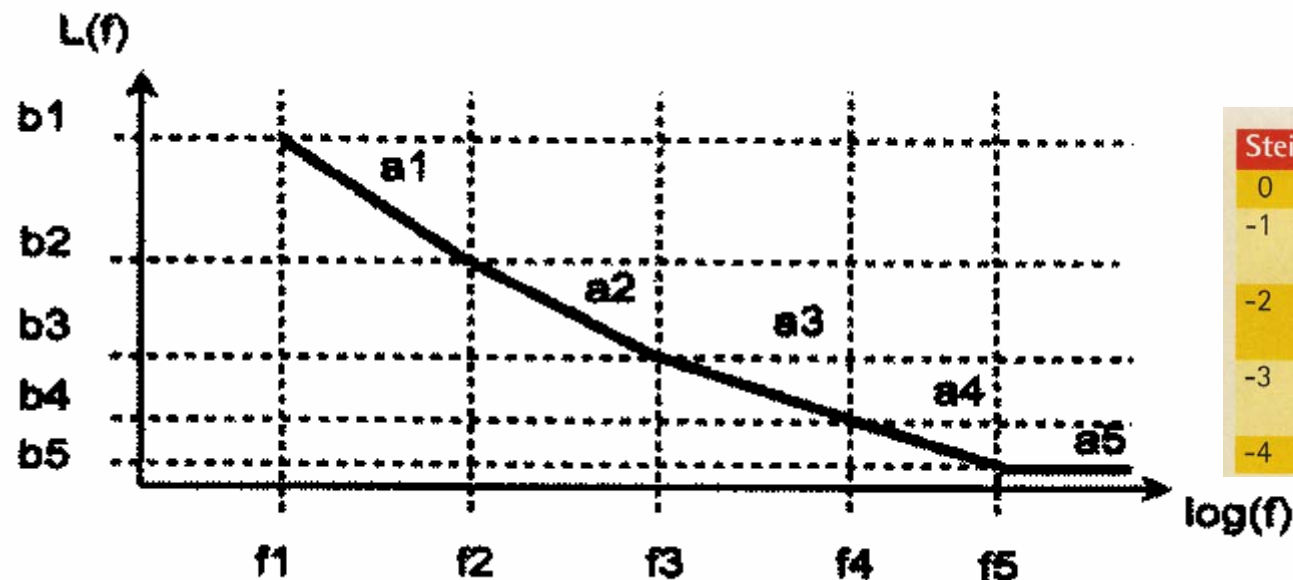
Trace Offset: 0.00 dB  
Smoothing Window: 1



# Phasenrauschen

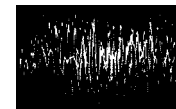


# Jitter - Phasenrauschen



Steigung L(f)	Rauschmechanismen
0	Weißes Phasenrauschen
-1	1/f (Flicker) Rauschen der Phase
-2	Weißes Rauschen der Frequenz
-3	1/f (Flicker) Frequenzrauschen
-4	Zufallsfrequenzrauschen

Index	1	2	3	4	5
Frequenz $f_i$ [Hz]	1	10	100	3k	10k
$a_i$ [dB/Dekade]	-40	-30	-20	-10	0
$b_i$ [dB <sub>c</sub> ]	-55	-95	-115	-135	-150



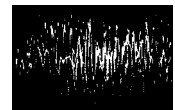


# Jitter – Phasenrauschen - BER

$$J_{RMS} = \frac{1}{2\pi f_c} \sqrt{2 \cdot 10^{\frac{b_1}{10}} f_1^{\frac{-a_1}{10}} \left( \frac{a_1}{10} + 1 \right)^{-1} \left[ f_2^{\frac{a_1}{10} + 1} - f_1^{\frac{a_1}{10} + 1} \right]}$$

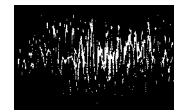
$$J_{P-P} = \alpha \cdot J_{RMS}$$

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{\alpha}{2\sqrt{2}} \right)$$



# Jitter – Phasenrauschen - BER

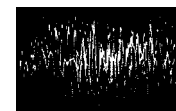
<b>BER</b>	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$
$\alpha$	6,180	9,507	11,996	14,698	15,883



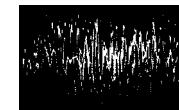
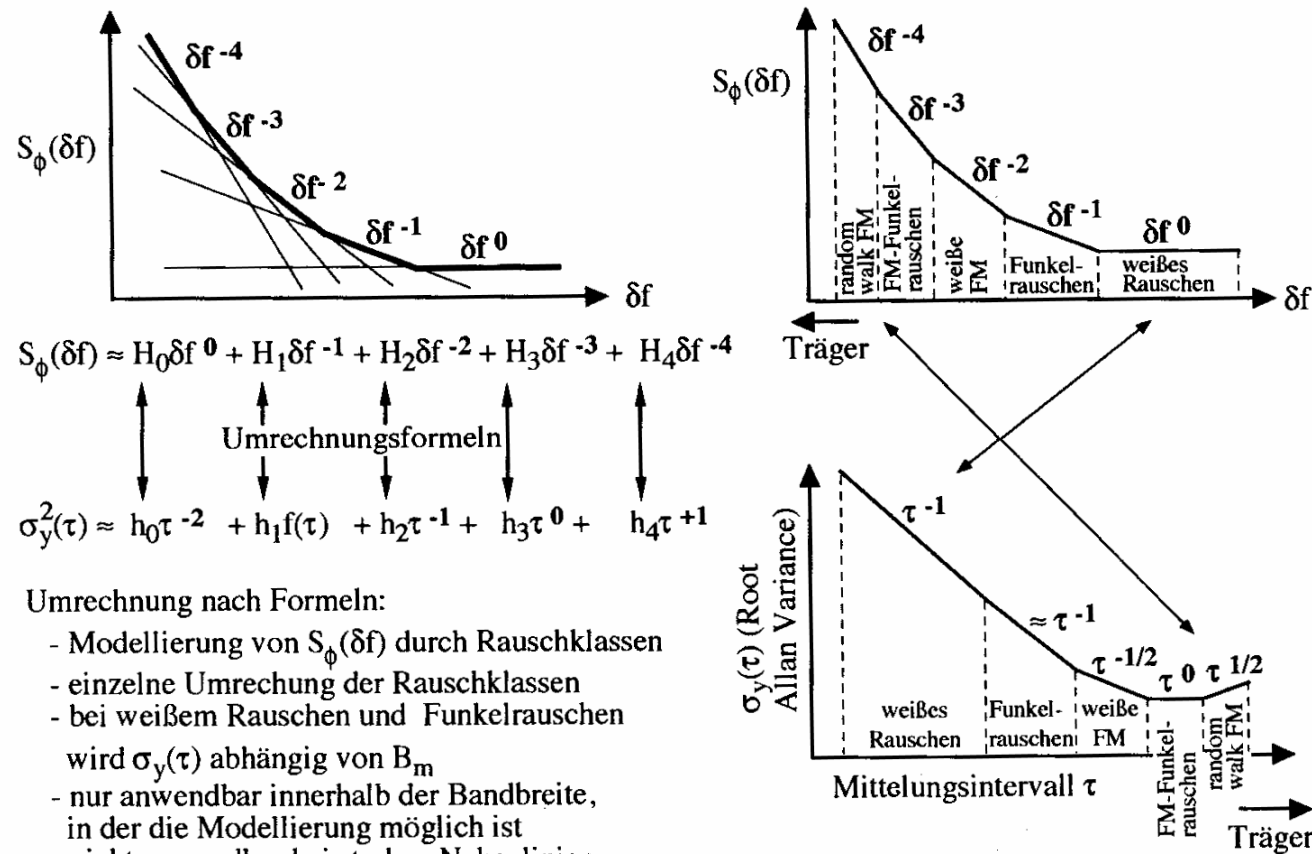
# Frequenzstabilität im Zeitbereich: ALLAN – Varianz $\sigma_y^2(\tau)$

Formeln zur stückweisen Umrechnung von Allan-Varianz in  $S_\phi(\delta f)$

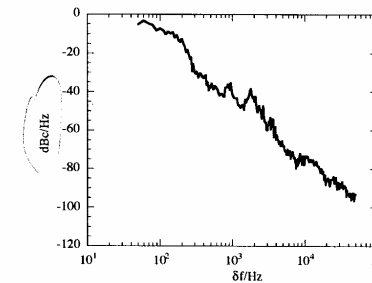
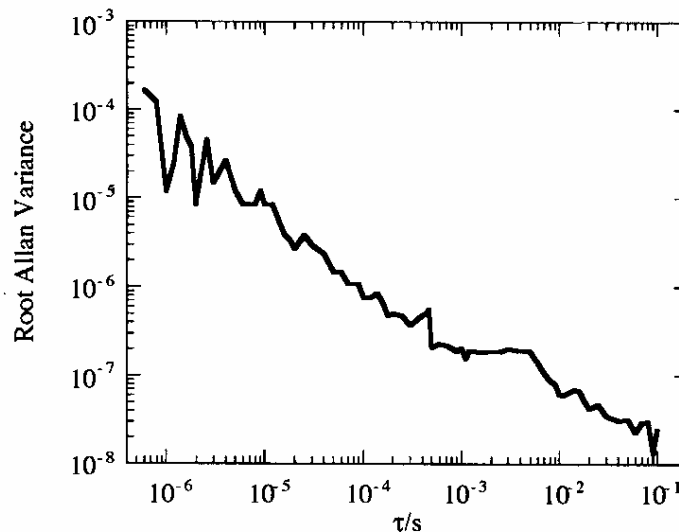
$S_\phi(\delta f) \sim \delta f^{-\alpha}$	$\sigma_y^2(\tau) = K \cdot S_\phi(\delta f)$
weißes Phasenrauschen: $\alpha = 0$	$K = \frac{3 B_m}{4\pi^2 f_0^2} \cdot \frac{1}{\tau^2}$
Funkelrauschen: $\alpha = 1$	$K = \frac{\delta f}{4\pi^2 f_0^2} \cdot \frac{(1.038 + 3 \ln(2\pi B_m \tau))}{\tau^2}$
weiße FM, random walk: $\alpha = 2$	$K = \frac{\delta f^2}{2f_0^2} \cdot \frac{1}{\tau}$
FM-Funkelrauschen: $\alpha = 3$	$K = \frac{\delta f^3}{f_0^2} \cdot 2 \ln(2)$
random walk FM: $\alpha = 4$	$K = \frac{\delta f^4}{3f_0^2} \cdot 2\pi^2 \tau$



# Frequenzstabilität im Zeitbereich: ALLAN – Varianz $\sigma_y^2(\tau)$

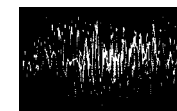


# Frequenzstabilität im Zeitbereich: ALLAN – Varianz $\sigma_y^2(\tau)$

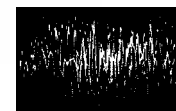
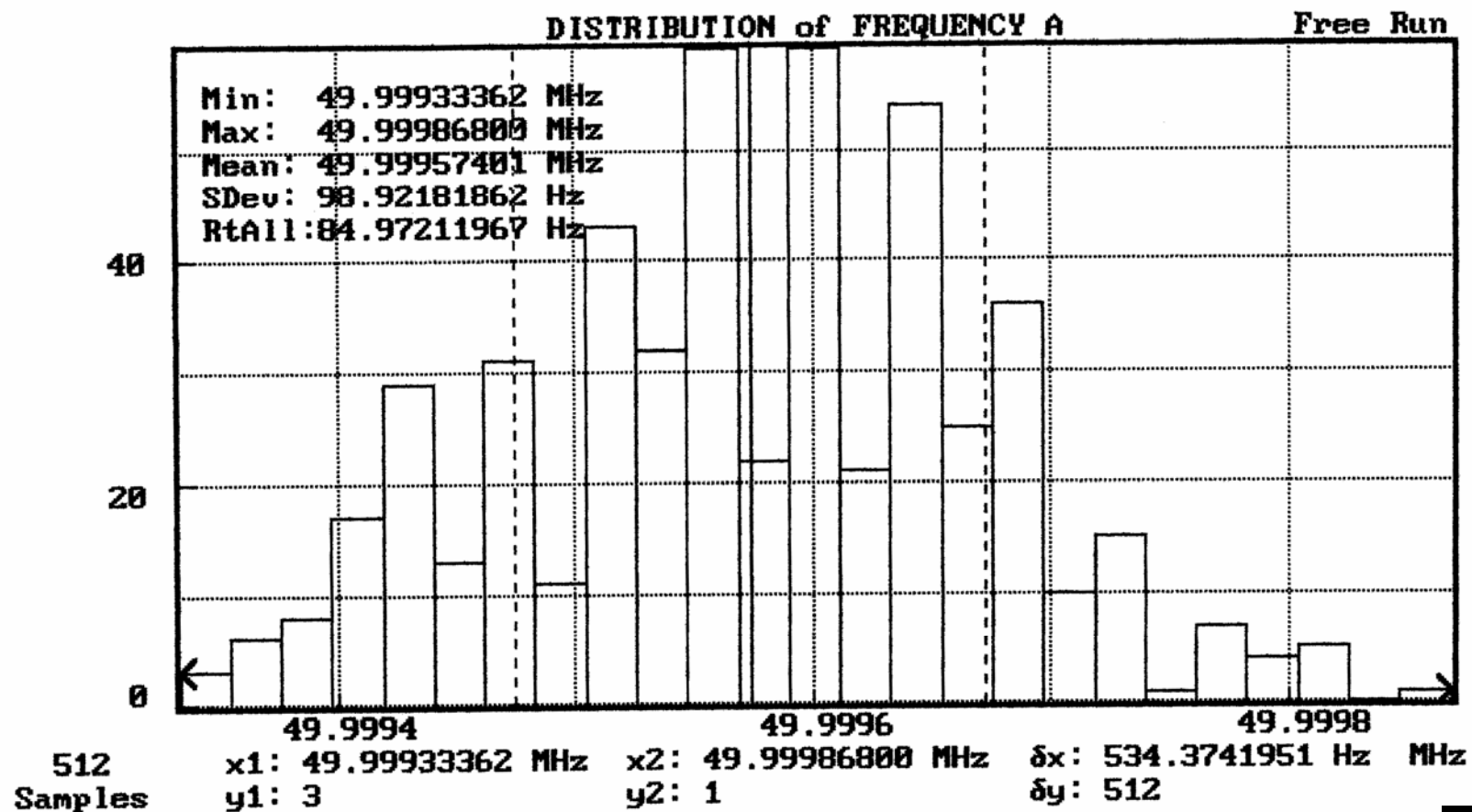


Meßbeispiel für  $S_\phi(\delta f)$  eines stark verrauschten 1,2 GHz-Oszillators

Root Allan Variance des 1,2 GHz-Oszillators aus Bild 7.6 (gemessen über einen Teiler durch 10 bei 120 MHz mit HP 5371A, Meßbandbreite 500 MHz). Man beachte, daß der Träger nun rechts vom Bild liegt. Die zu kleinen Mittelungsintervallen hin schlechter werdende Auflösung des Zählers führt für  $\tau < 10 \mu\text{s}$  zu großen Meßunsicherheiten, wie links im Bild an den unrealistischen Einbrüchen in der Meßkurve zu erkennen ist.

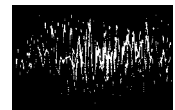


# (Kurzzeit-) Stabilität eines 50-MHz-Quarzoszillators

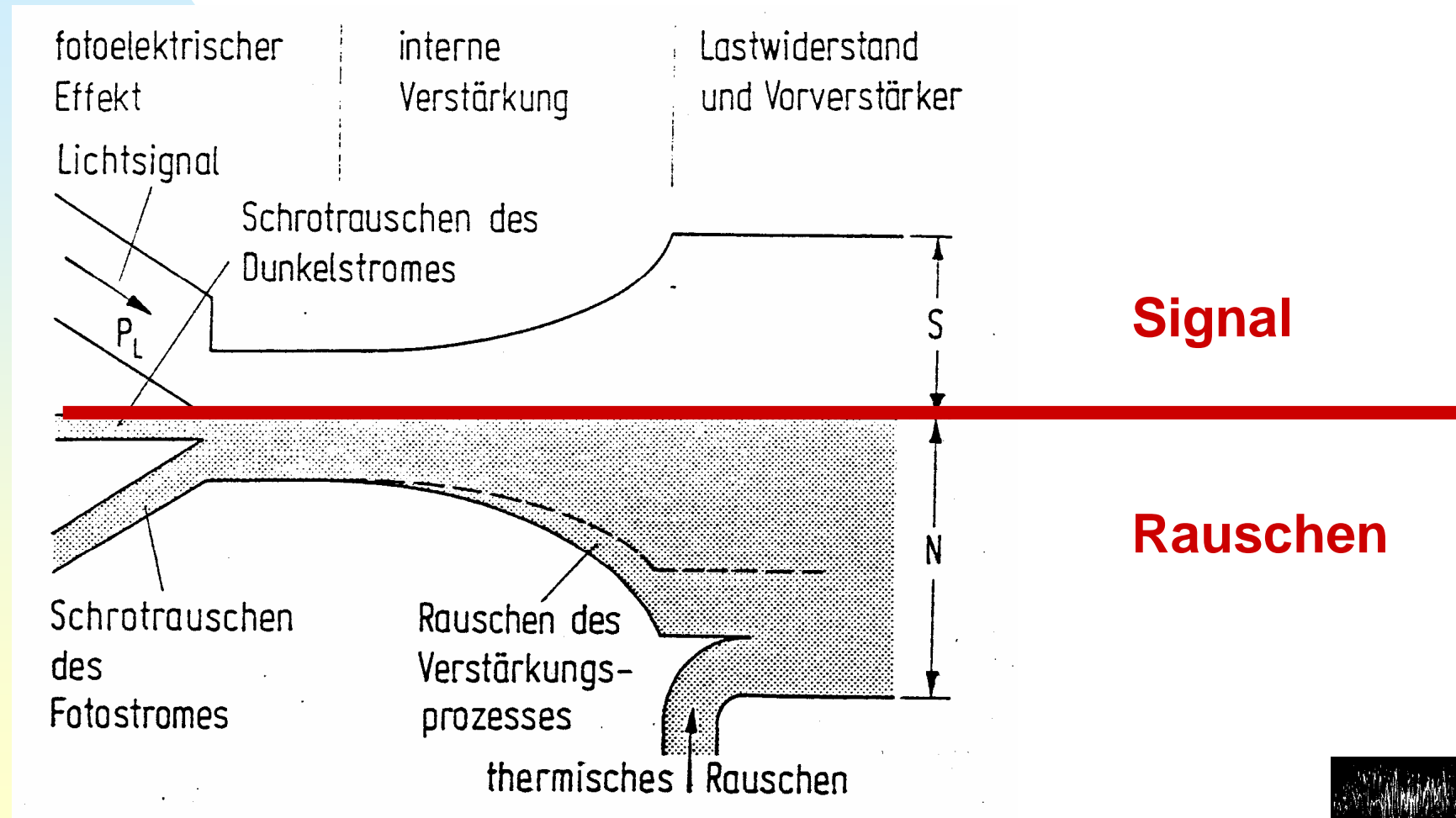


# Rauschen optoelektronischer Sensoren

- Noise Equivalent Power (NEP) definiert für  $\text{SNR} = 1$
- NEP zur Vergleichbarkeit von Detektoren
- Berücksichtigung der sensitiven Fläche  
→ Detektivität

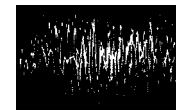
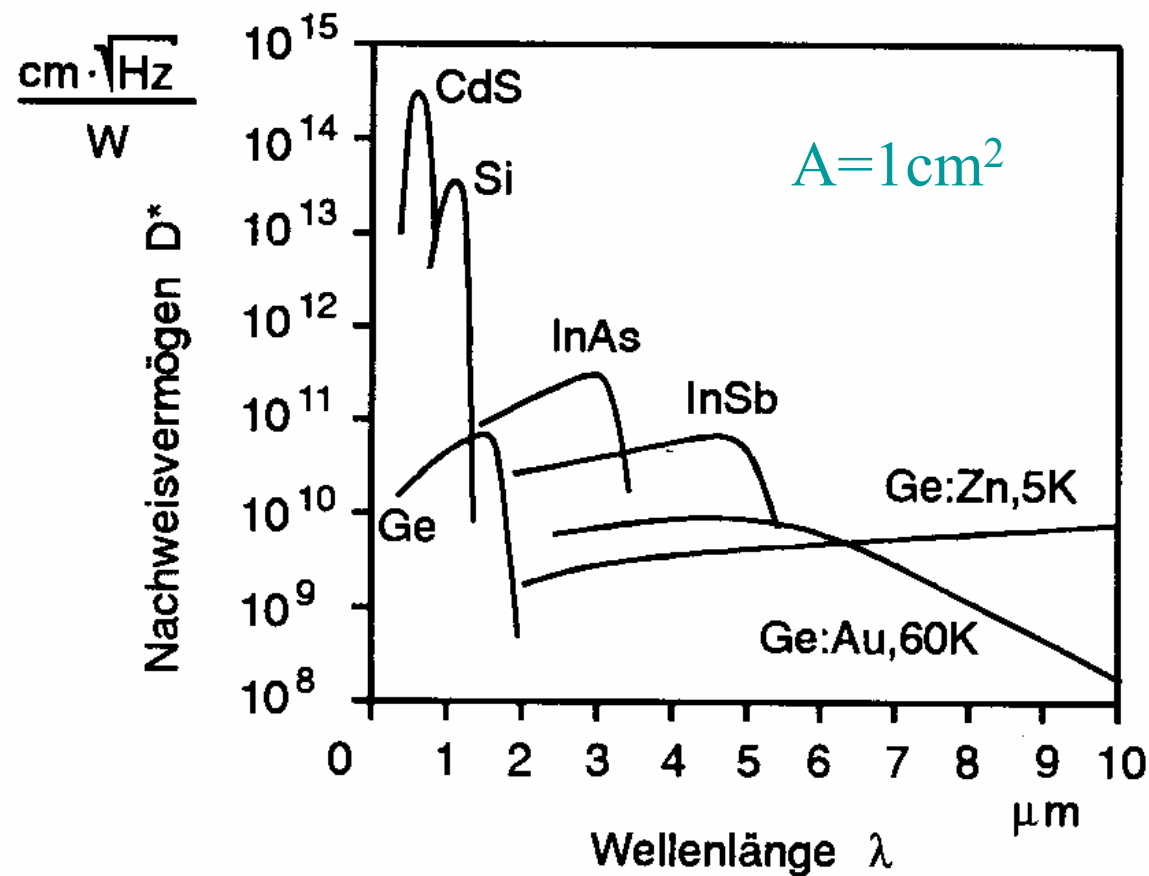


# Schematisches Pegeldiagramm für Signal und Rauschen in einer Fotodiode



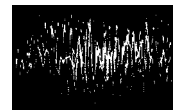


# Rauschen optoelektronischer Sensoren



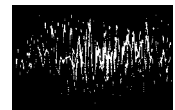
# Messung sehr kleiner Signale

- Was ist zu tun, um sehr kleine Signale messtechnisch erfassen zu können?
- Entscheidend ist das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR)!
- Wichtigste Maßnahme: Vergrößerung des SNR
- Wie?



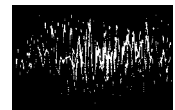
# Entwurfsphilosophie für Messsysteme

- Messaufnehmer, Sensor mit höchstmöglicher Empfindlichkeit
- Erste Verstärkerstufe mit niedrigem Eigenrauschen ( $F \rightarrow 0$  dB)
- Keine dissipativen Elemente (z. B. Kabel, Dämpfungsglieder) vor der ersten Verstärkerstufe



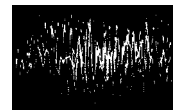
# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>1(3)</sup>

- Verringerung der Bandbreite



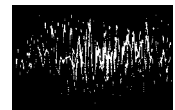
# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>2(3)</sup>

- Verringerung der Bandbreite
- Herabsetzung der Temperatur



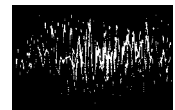
# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>3(3)</sup>

- Verringerung der Bandbreite
- Herabsetzung der Temperatur
- Messsignalverarbeitung
  - ◆ Selektive Spannungsmessung (Bandbreite), Lock-in Amplifier
  - ◆ Mittelwertbildung (Averaging) in Zeit- bzw. im Frequenzbereich
  - ◆ Korrelationsmethoden

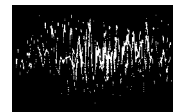
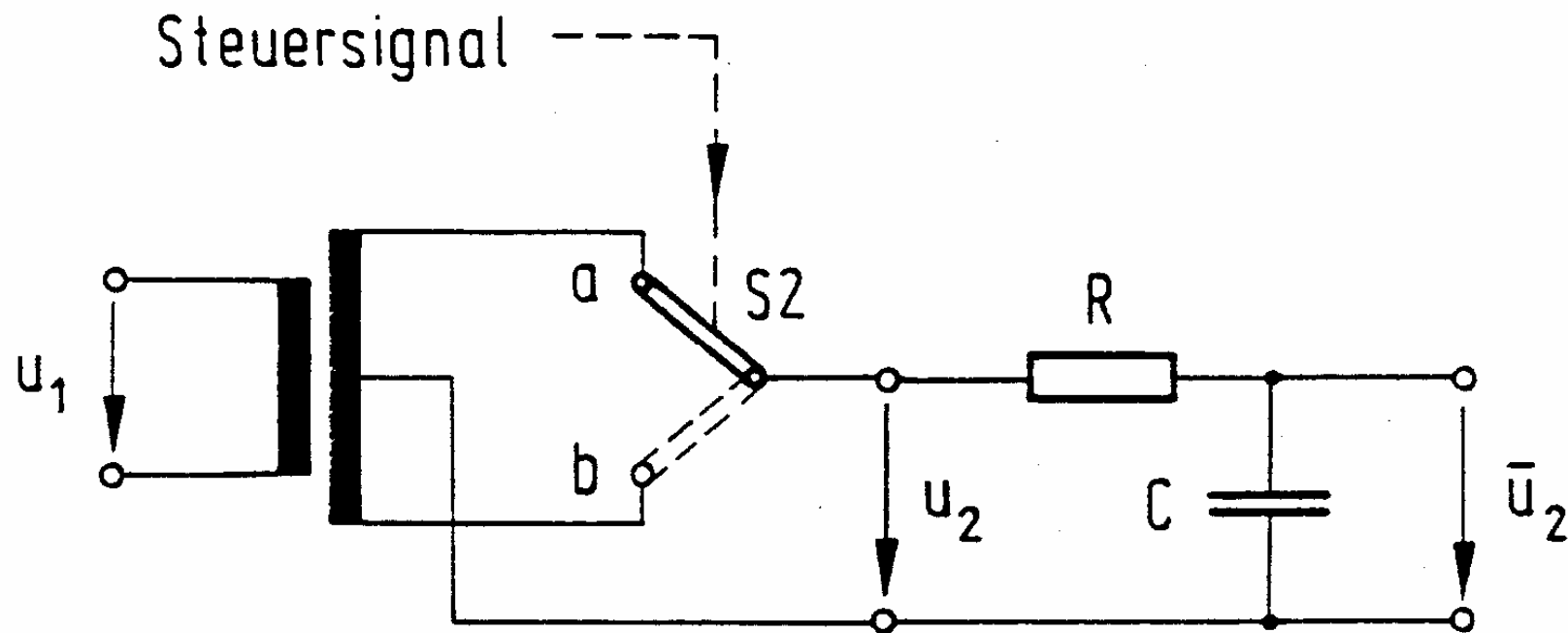


# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>3(3)</sup>

- Verringerung der Bandbreite
- Herabsetzung der Temperatur
- Messsignalverarbeitung
  - ◆ Selektive Spannungsmessung (Bandbreite), Lock-in Amplifier
  - ◆ Mittelwertbildung (Averaging) in Zeit- bzw. im Frequenzbereich
  - ◆ Korrelationsmethoden

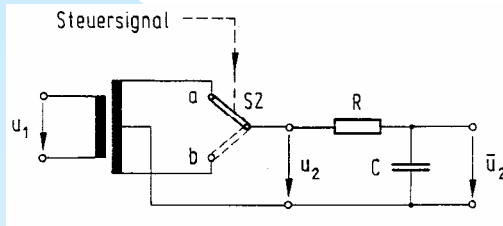


# Phasenempfindlicher Gleichrichter

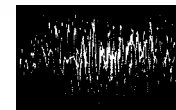
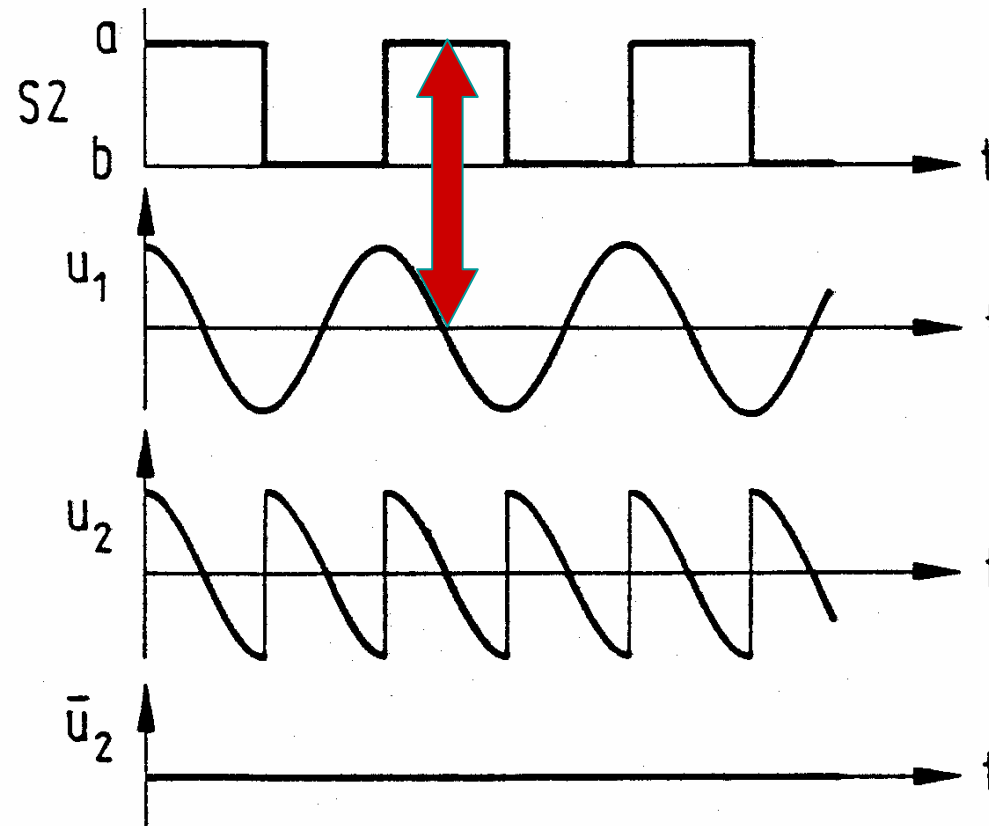




# Phasenempfindlicher Gleichrichter

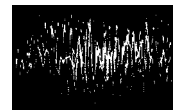


Phasenverschiebung  
Zwischen Eingangs-  
Spannung und Steuer-  
Spannung von  $90^\circ$

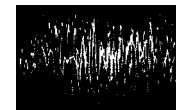
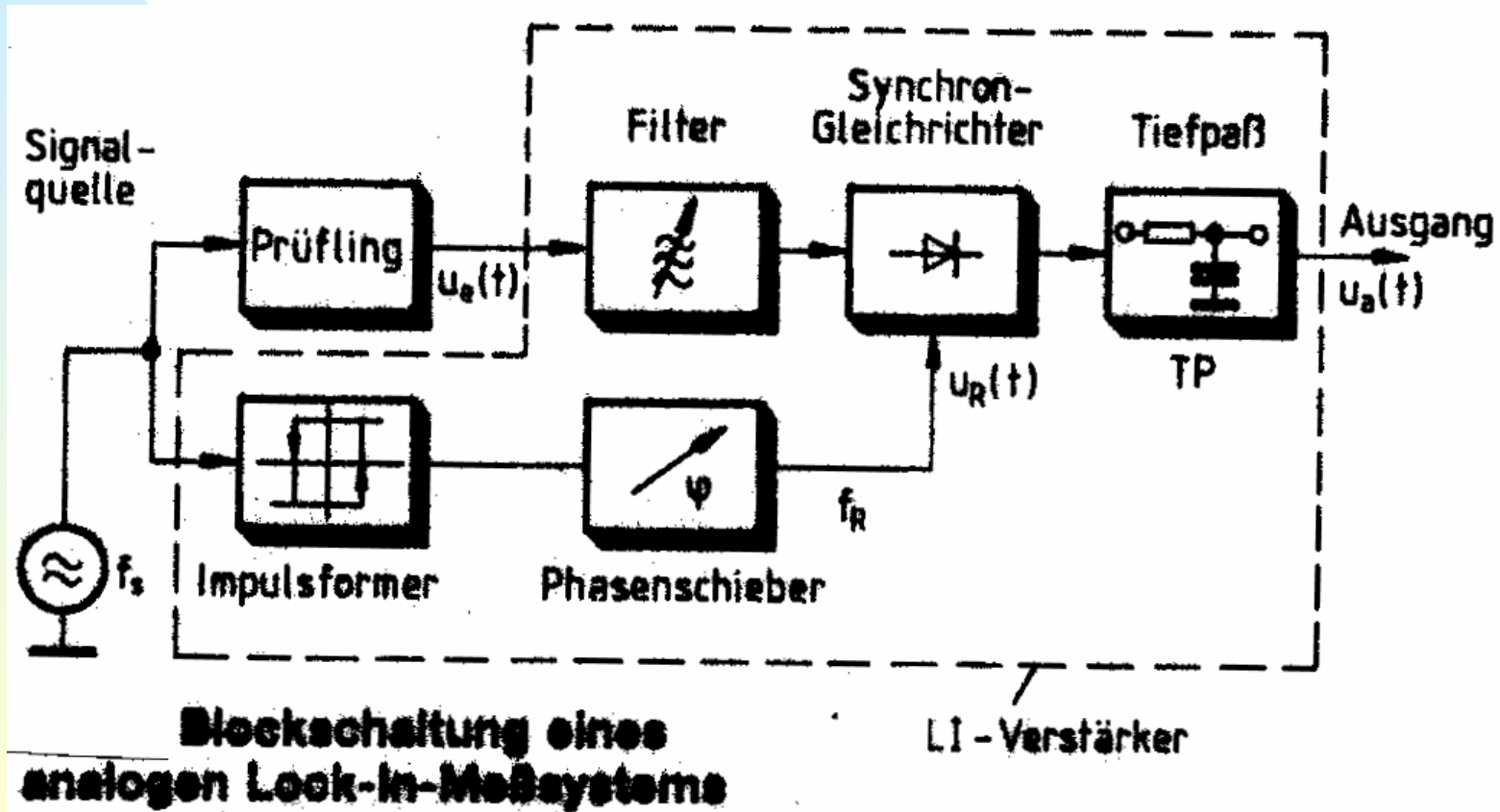


# Lock-in - Verstärker

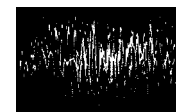
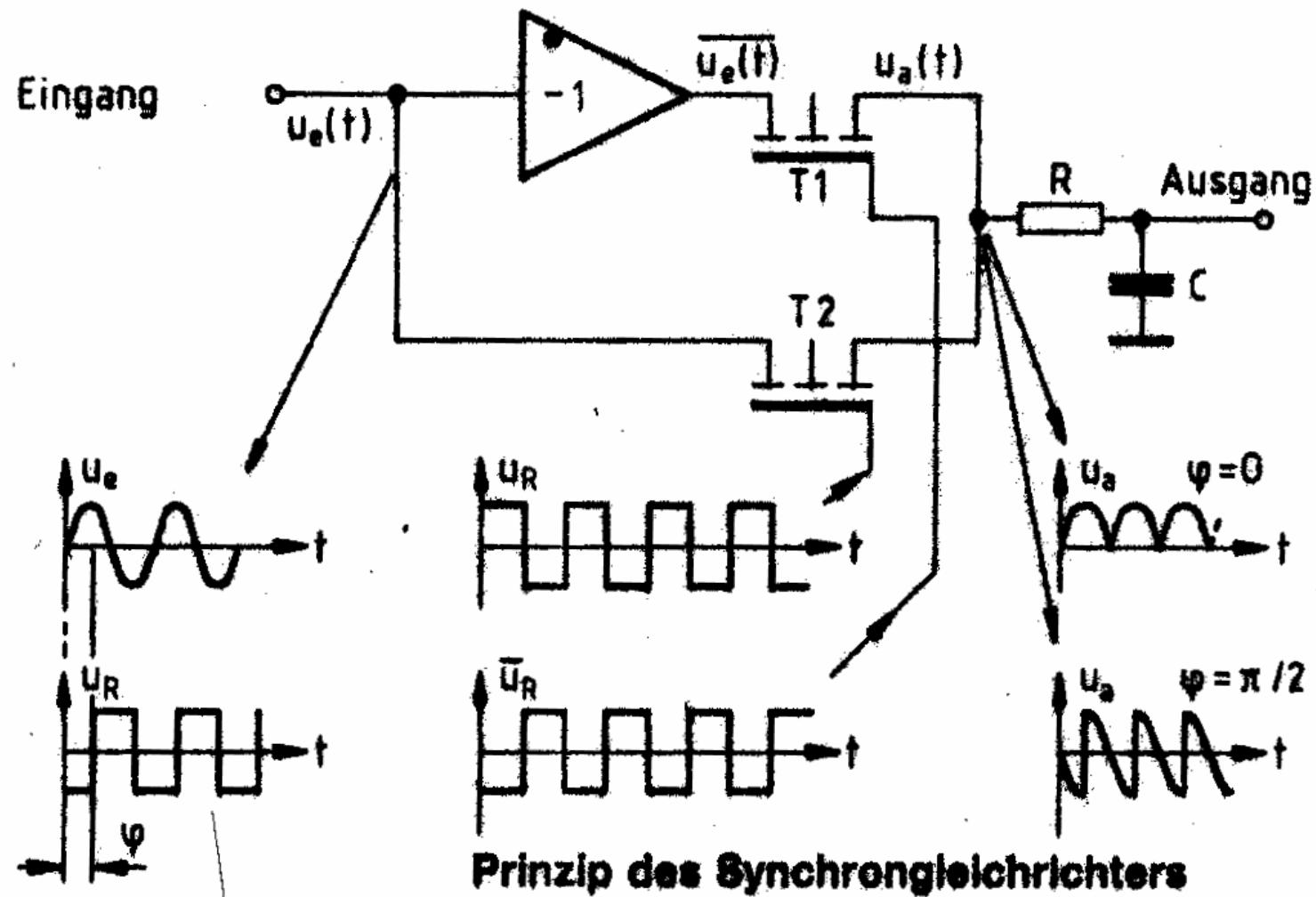
- Phasenempfindlicher Gleichrichter als Basis
  - ◆ Phasenumkehr durch Trafo
  - ◆ Schalter
  - ◆ Tiefpass
- Synchrondemodulator
- Lock-in
- Bandbreite in Lock-in - Verstärkern



# Lock-in - Verstärker

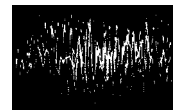


# Lock-in - Verstärker

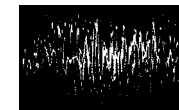
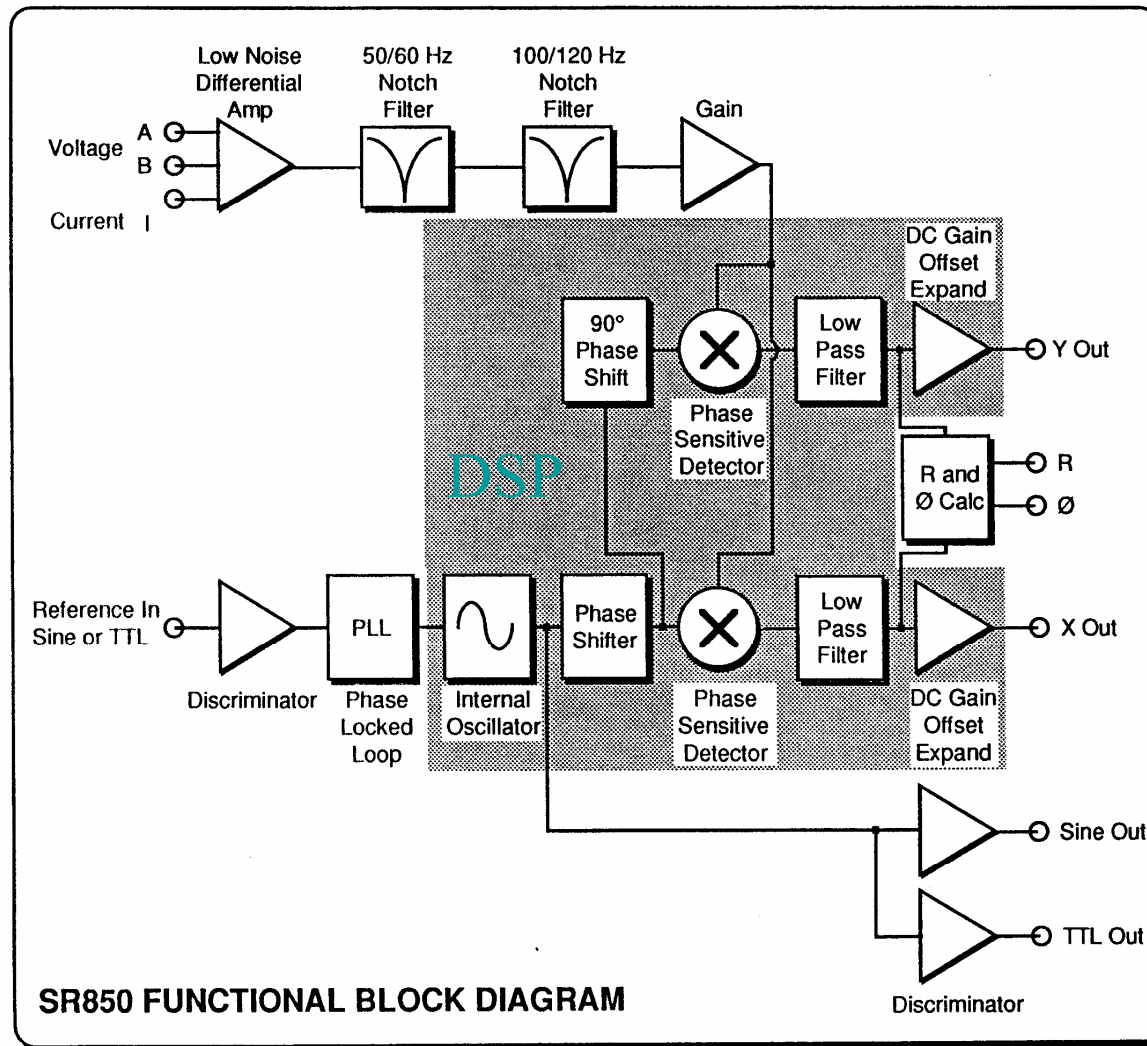


# Lock-in - Verstärker

- Rauschminderung
- Prüfling mit Grenzfrequenz von 10 kHz (-3-dB-Grenze, -6dB/Oktave)
- $T = RC = 1\text{ s}$
- Störabstandsverbesserung (SNR) beträgt ca. 48 dB



# Lock-in Amplifier





# Lock-in Amplifier Specification SR 850

## **SIGNAL CHANNEL**

Voltage Inputs

Current Input

Full Scale Sensitivity

Input Impedance

Gain Accuracy

Input Noise

Signal Filters

CMRR

Dynamic Reserve

Harmonic Distortion

Single-ended (A) or differential (A-B).

$10^6$  or  $10^8$  Volts/Amp.

2 nV to 1 V in a 1-2-5-10 sequence (expand off).

Voltage:  $10\text{ M}\Omega + 25\text{ pF}$ , AC or DC coupled.

Current:  $1\text{ k}\Omega$  to virtual ground.

$\pm 1\%$  from  $20^\circ\text{C}$  to  $30^\circ\text{C}$  (notch filters off).

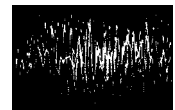
$6\text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  at 1 kHz (typical).

60 (50) Hz and 120(100) Hz notch filters ( $Q=4$ ).

90 dB at 100 Hz (DC Coupled).

Greater than 100 dB (with no signal filters).

$< -90\text{ dB}$  to 10 kHz,  $< -80\text{ dB}$  to 100 kHz.





# Lock-in Amplifier Specification SR 850

## REFERENCE CHANNEL

Frequency Range

1 mHz to 102 kHz

Reference Input

TTL (rising or falling edge) or Sine.

Sine input is 1 M $\Omega$ , AC coupled (>1 Hz). 400 mV pk-pk minimum signal.

Phase Resolution

0.001°

Absolute Phase Error

<1°

Relative Phase Error

<0.001°

Orthogonality

90°  $\pm$  0.001°

Phase Noise

External synthesized reference: 0.005° rms at 1 kHz, 100 ms, 12 dB/oct.

Internal reference: crystal synthesized, <0.0001° rms at 1 kHz.

Phase Drift

<0.01°/°C below 10 kHz

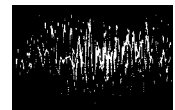
<0.1°/°C to 100 kHz

Harmonic Detect

Detect at Nxf where N<32767 and Nxf<102 kHz.

Acquisition Time

(2 cycles + 5 ms) or 40 ms, whichever is greater.





# Lock-in Amplifier Specification SR 850

## DEMODULATOR

Zero Stability

Digital displays have no zero drift on all dynamic reserves.

Analog outputs: <5 ppm/°C for all dynamic reserves.

Time Constants

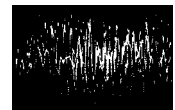
10  $\mu$ s to 30 s (reference > 200 Hz). 6, 12, 18, 24 dB/oct rolloff.

up to 30000 s (reference < 200 Hz). 6, 12, 18, 24 dB/oct rolloff.

Synchronous filtering available below 200 Hz.

Harmonic Rejection

-90 dB

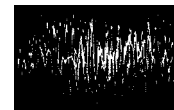
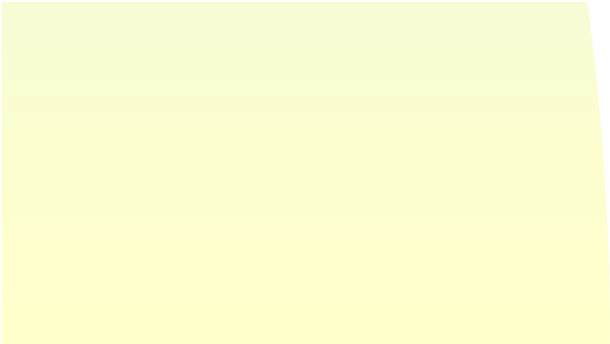




# Lock-in Amplifier Specifications SR 850

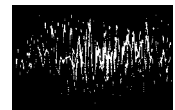
## INTERNAL OSCILLATOR

Frequency	1 mHz to 102 kHz.
Frequency Accuracy	25 ppm + 30 $\mu$ Hz
Frequency Resolution	5 digits or 0.1 mHz, whichever is greater.
Frequency Sweeps	Linear and Log.
Distortion	$f < 10$ kHz, below -80 dBc. $f > 10$ kHz, below -70 dBc. 1 Vrms amplitude.
Output Impedance	50 $\Omega$
Amplitude	4 mVrms to 5 Vrms (into a high impedance load) with 2 mV resolution. (2 mVrms to 2.5 Vrms into 50 $\Omega$ load).
Amplitude Accuracy	1%
Amplitude Stability	50 ppm/ $^{\circ}$ C
Outputs	Sine output on front panel. TTL sync output on rear panel. When using an external reference, both outputs are phase locked to the external reference.

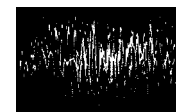
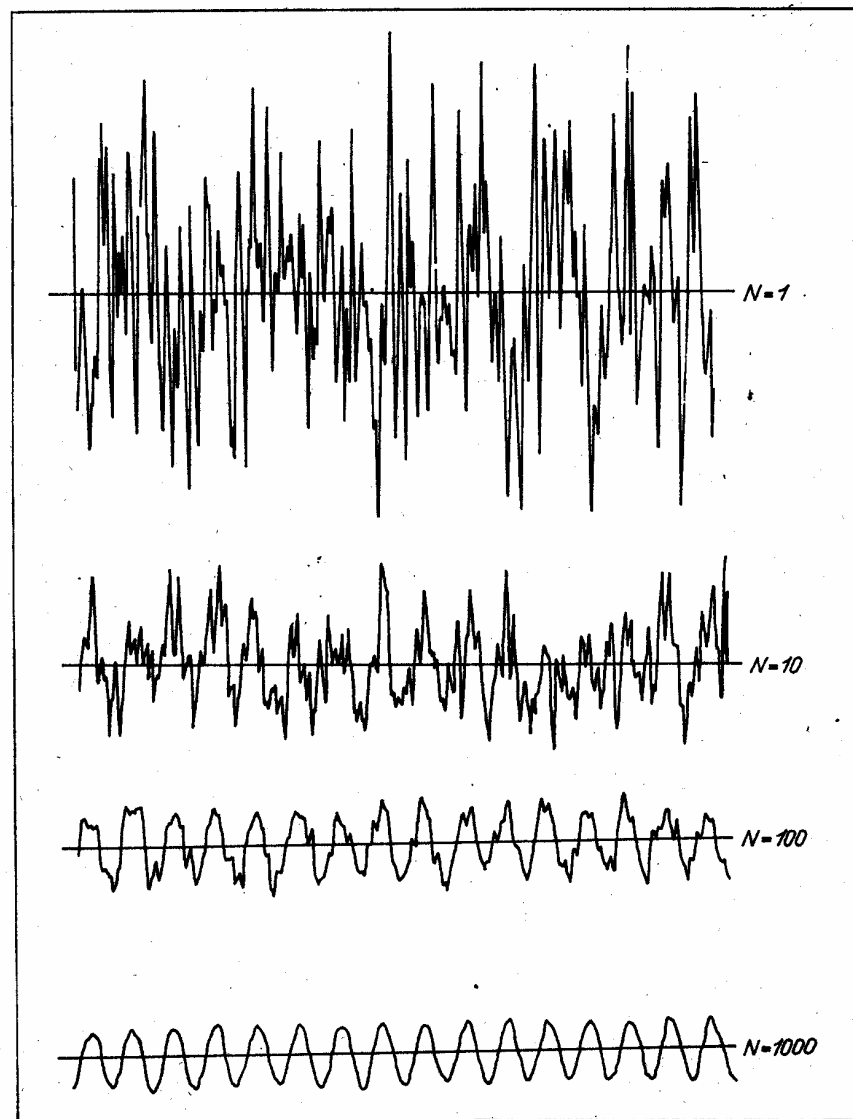


# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>3(3)</sup>

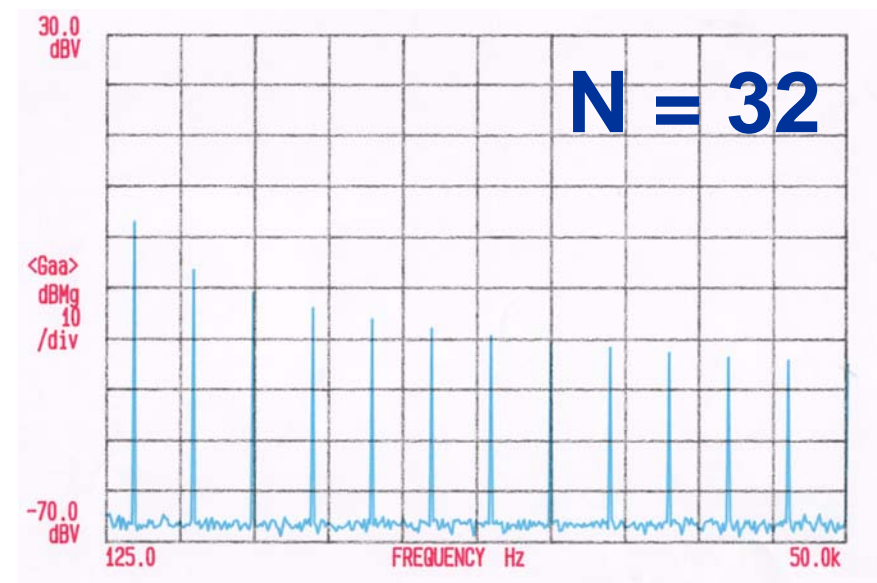
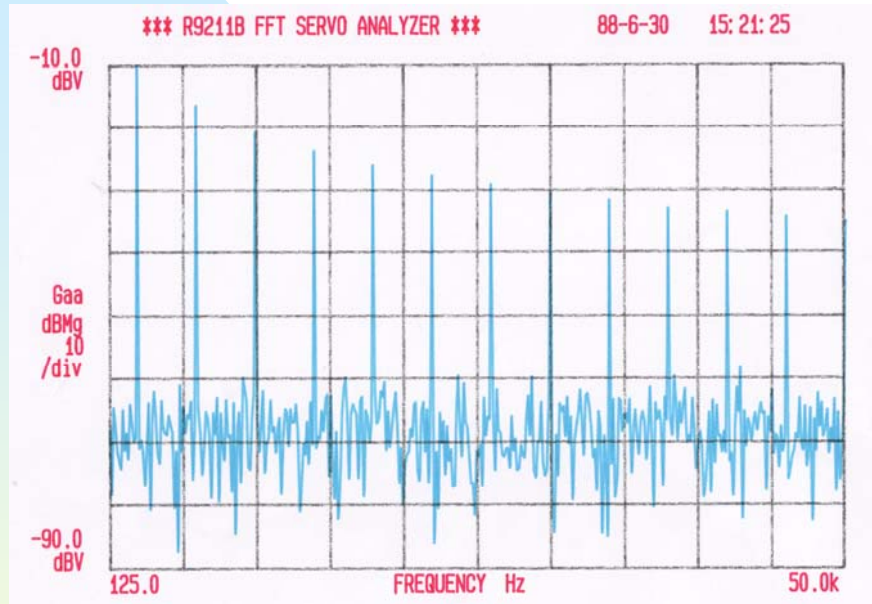
- Verringerung der Bandbreite
- Herabsetzung der Temperatur
- **Messsignalverarbeitung**
  - ◆ Selektive Spannungsmessung (Bandbreite), Lock-in Amplifier
  - ◆ Mittelwertbildung (Averaging) in Zeit- bzw. im Frequenzbereich
  - ◆ Korrelationsmethoden



# Averaging im Zeitbereich

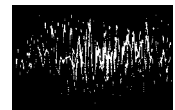


# Averaging im Frequenzbereich

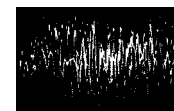
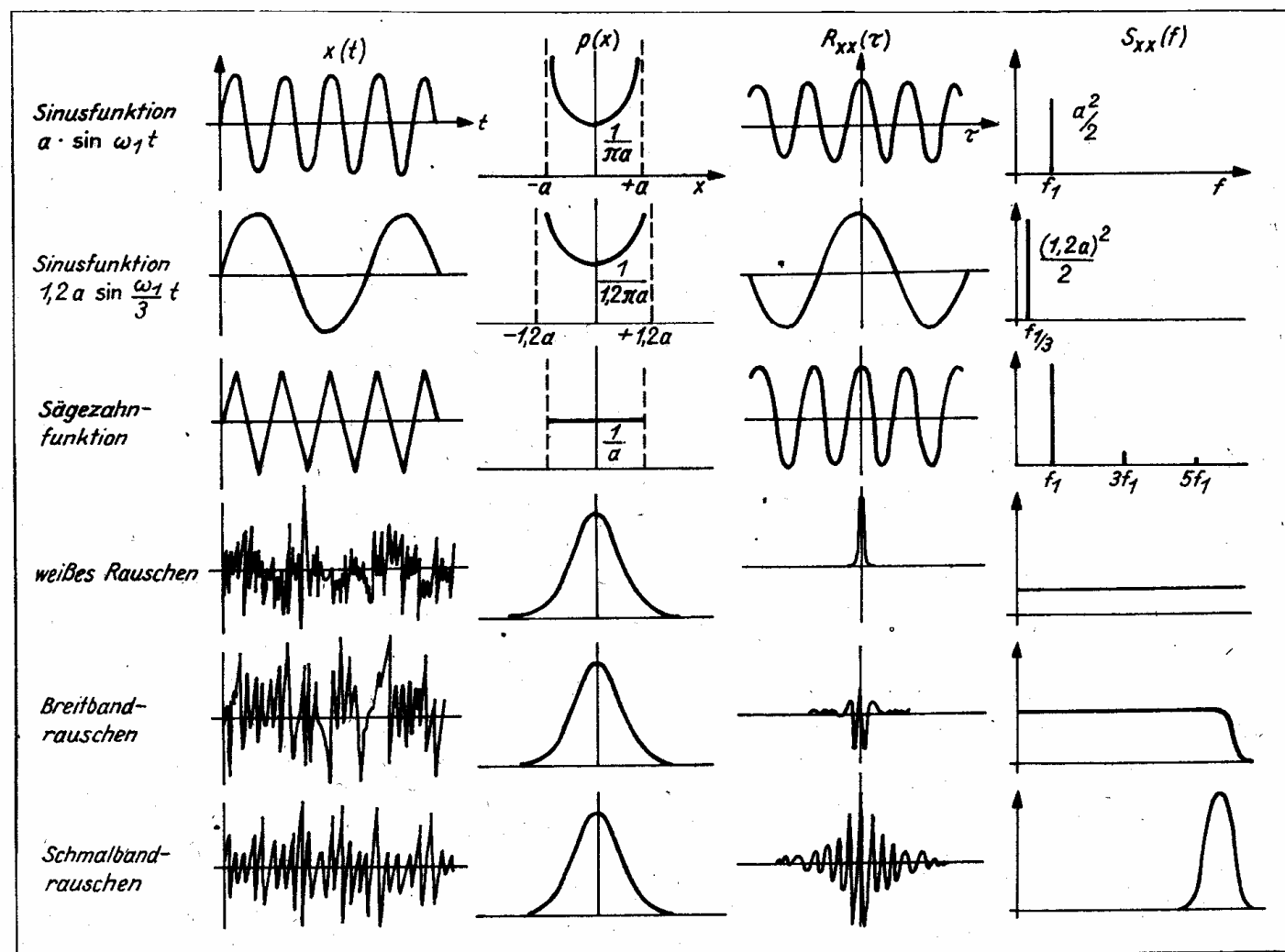


# Verbesserung des SNR in der Messelektronik <sup>3(3)</sup>

- Verringerung der Bandbreite
- Herabsetzung der Temperatur
- Messsignalverarbeitung
  - ◆ Selektive Spannungsmessung (Bandbreite), Lock-in Amplifier
  - ◆ Mittelwertbildung (Averaging) in Zeit- bzw. im Frequenzbereich
  - ◆ Korrelationsmethoden

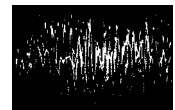


# Kennfunktionen ausgewählter Signale



# Korrelationsverfahren

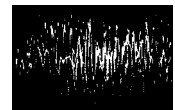
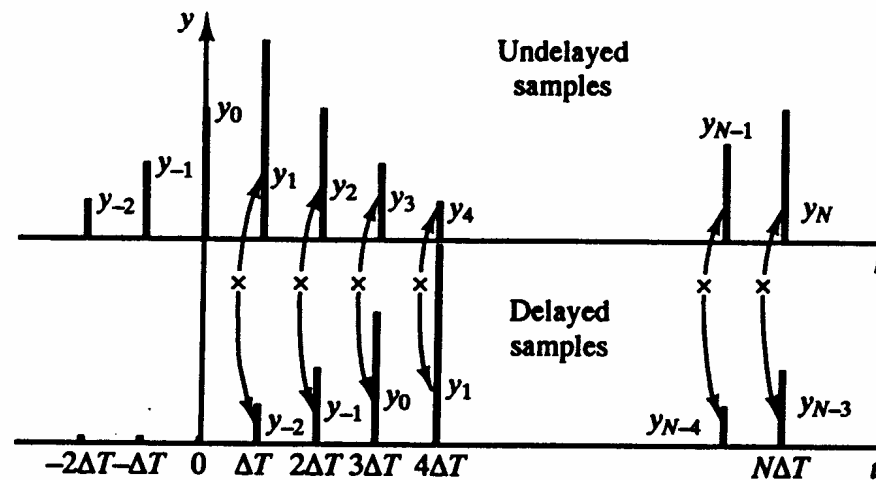
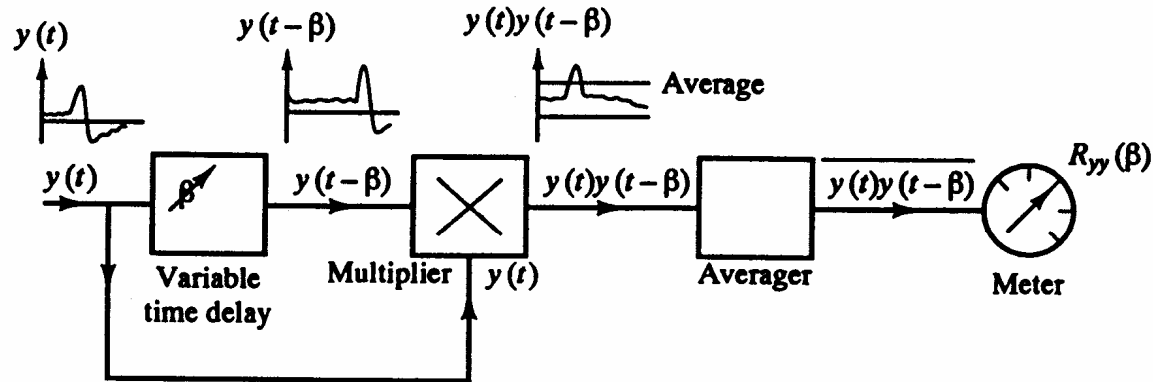
- Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion
- Eigenschaften der Kreuzkorrelationsfunktion
- Korrelatoren



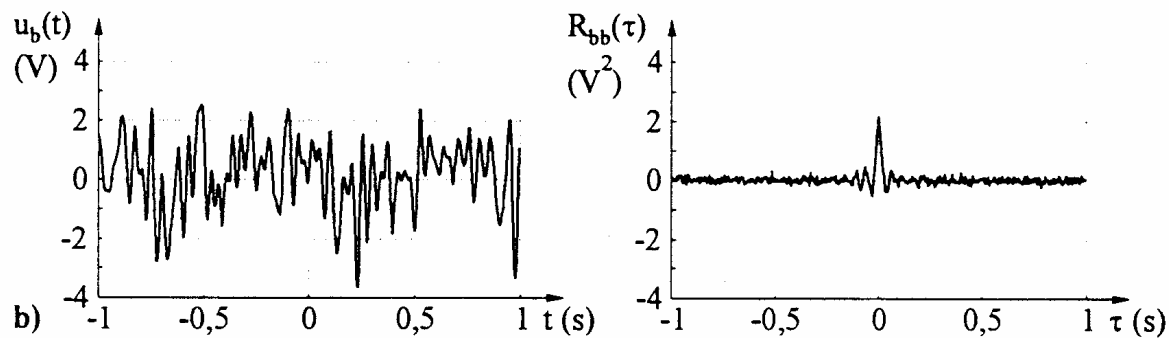
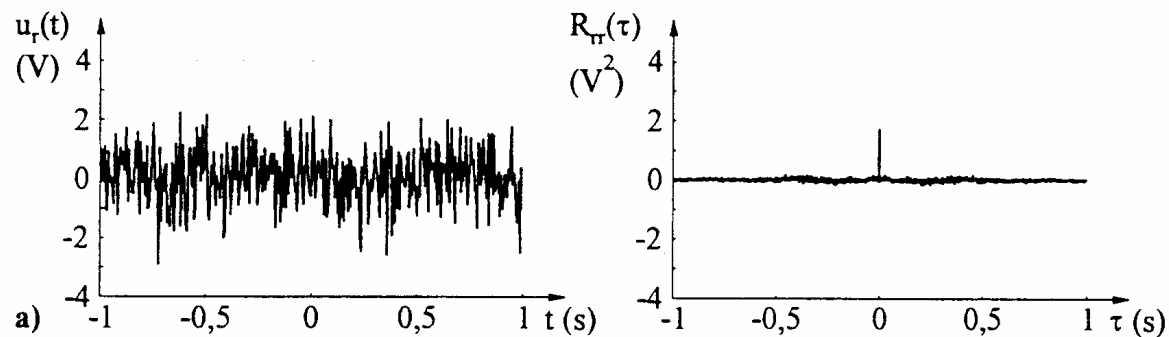


# Autokorreliator

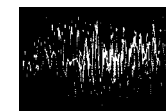
$$R_{yy}(\beta) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} y(t)y(t - \beta) dt$$



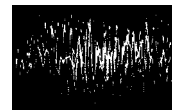
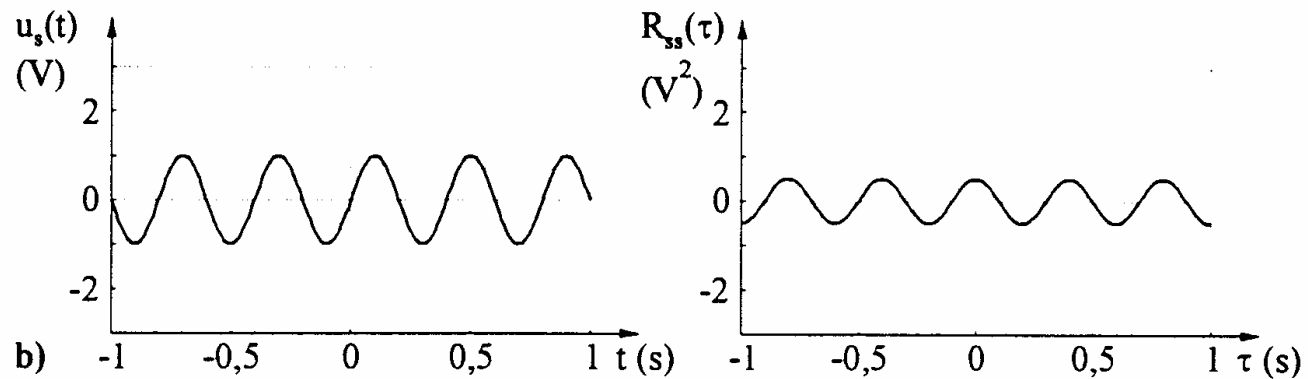
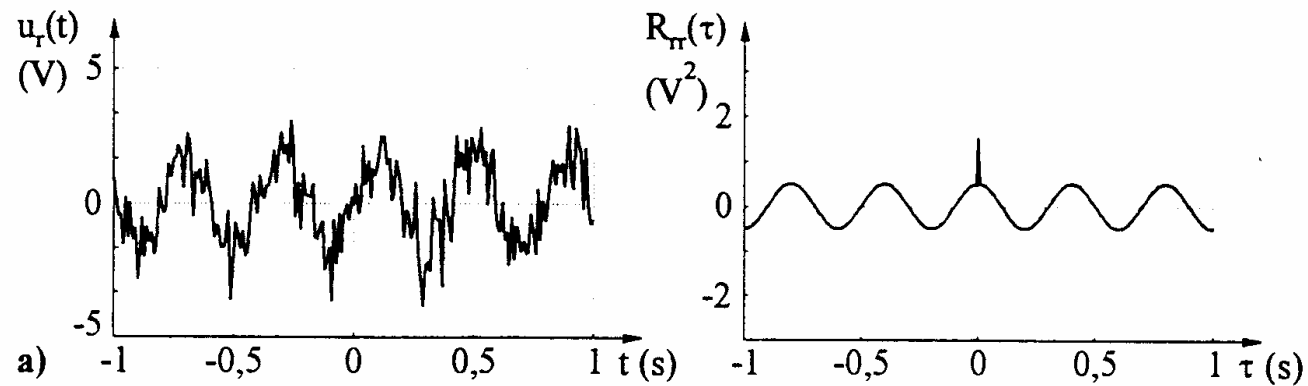
# Beispiel für Autokorrelation



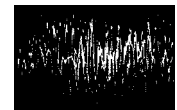
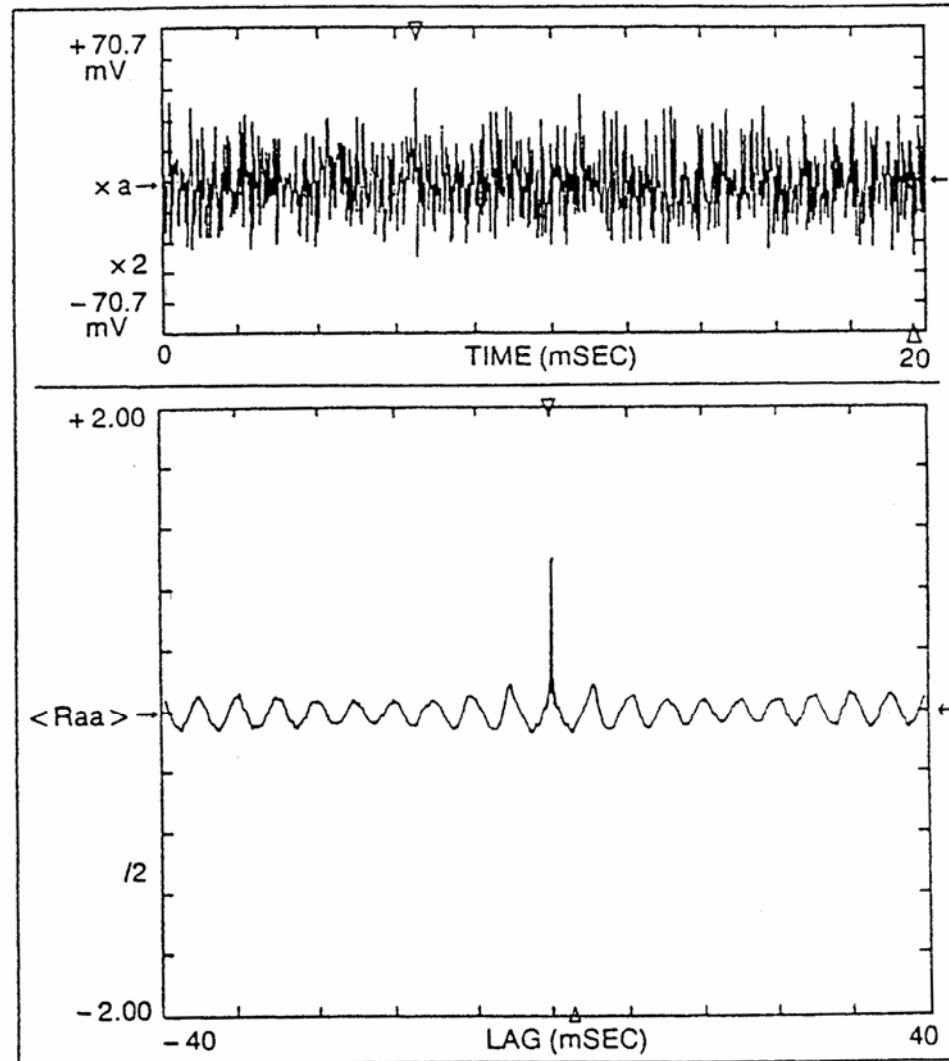
- a) Normalverteiltes Rauschen
- b) Bandbegrenztes Rauschen



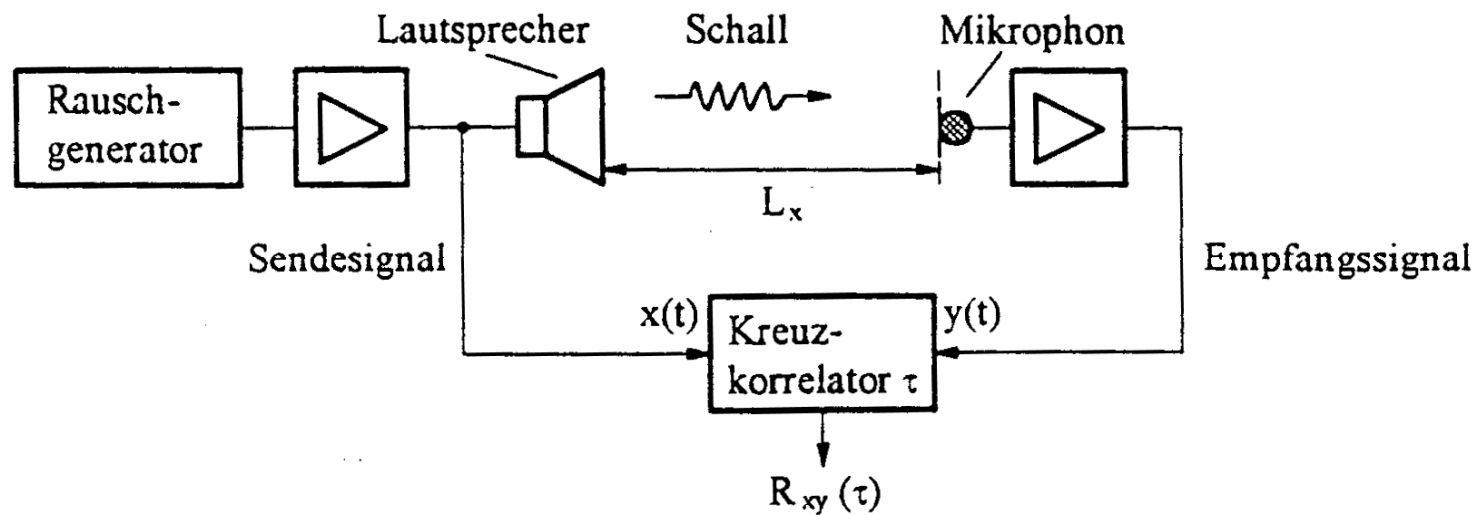
# Beispiel für Autokorrelation: Ermittlung von Periodizitäten



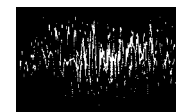
# Beispiel für Autokorrelation: Erkennung von Periodizitäten im Rauschsignal



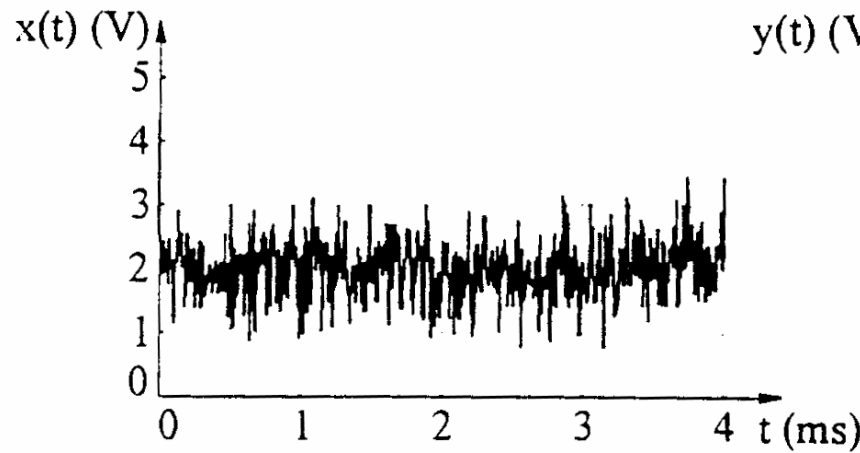
# Beispiel für Kreuzkorrelation: Distanzmessung mit Hilfe akustischer Rauschsignale



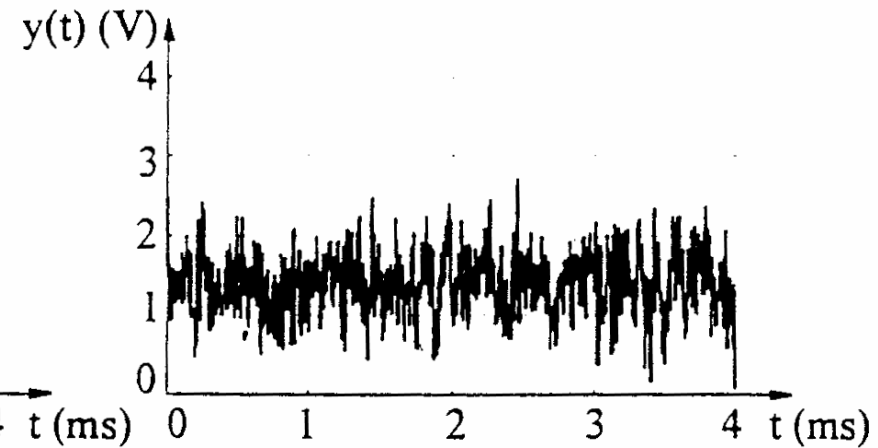
Rauschen als „nützliches“ Signal!



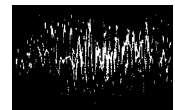
# Beispiel für Kreuzkorrelation: Akustische Distanzmessung



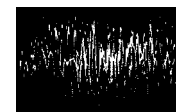
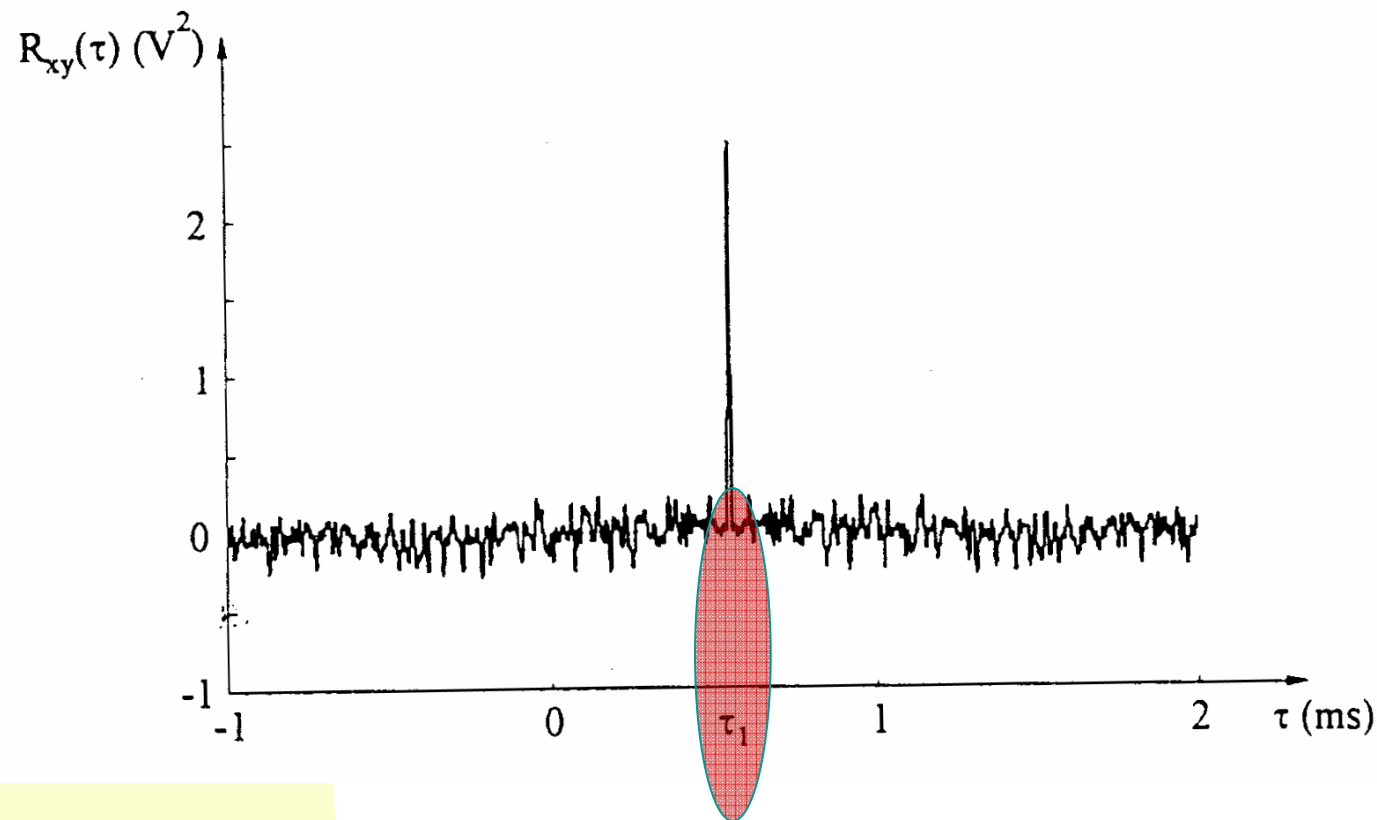
a) Sendesignal



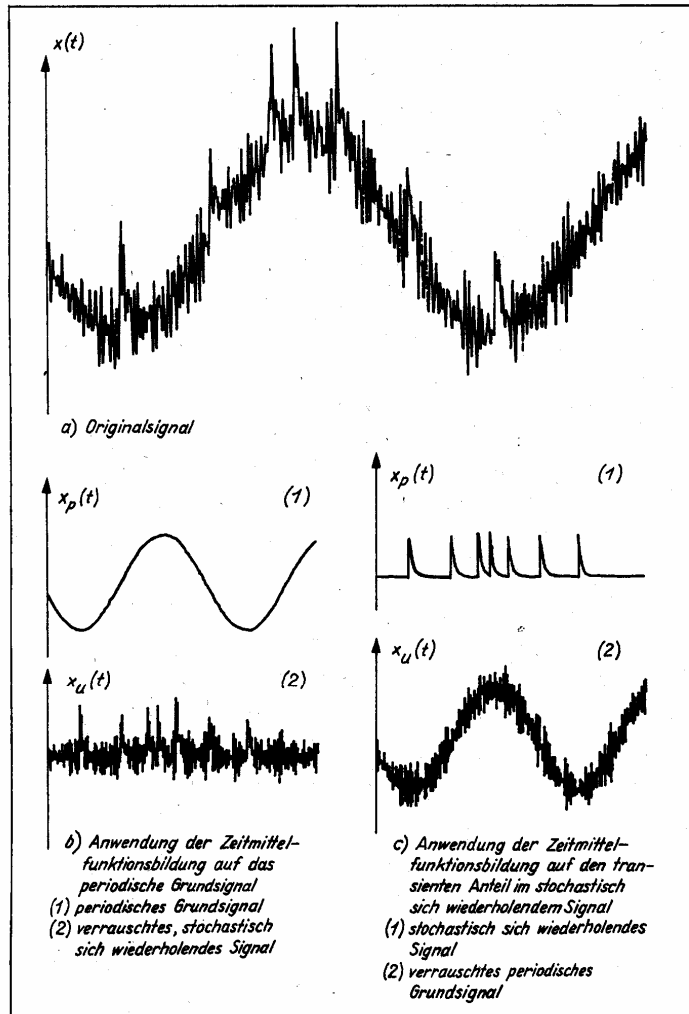
b) Empfangssignal



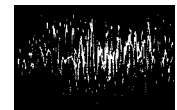
# Beispiel für Kreuzkorrelation: Akustische Distanzmessung



# Dekorrelationsverfahren



- Periodisch oder stochastisch sich wiederholendes Signal, einem stochastischen Signal überlagert
- Additive Überlagerung eines ortsfesten losen Teils, das eine strömungsinduzierte mechanische Schwingung ausführt mit dem Untergrund der Strömungsgeräusche





# Literatur

