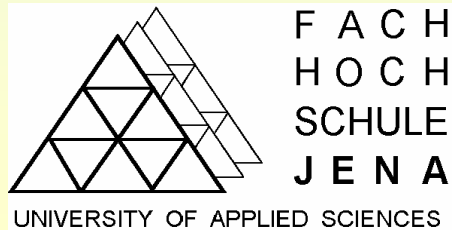


# Elektrische Meßtechnik: Zeit, Frequenz, Phase

---

WS 2007

Prof. Dr. sc. nat. Manfred Schmidt  
Fachhochschule Jena  
Fachbereich Elektrotechnik/  
Informationstechnik





# Zeit, Frequenz, Phase

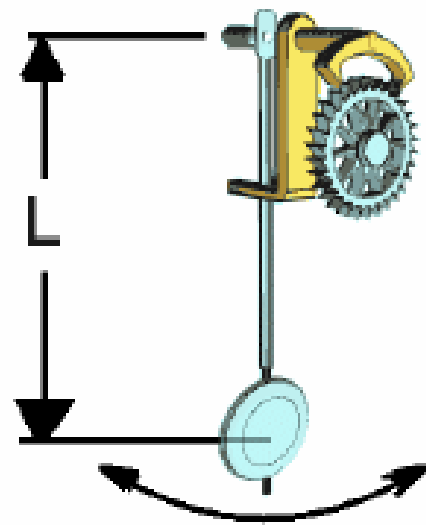
- **Allgemeine Zusammenhänge**
- Frequenz
- Zeit
- Phase



# Zeit und Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

# Schwinger - Resonatoren



**Pendulum Clock**

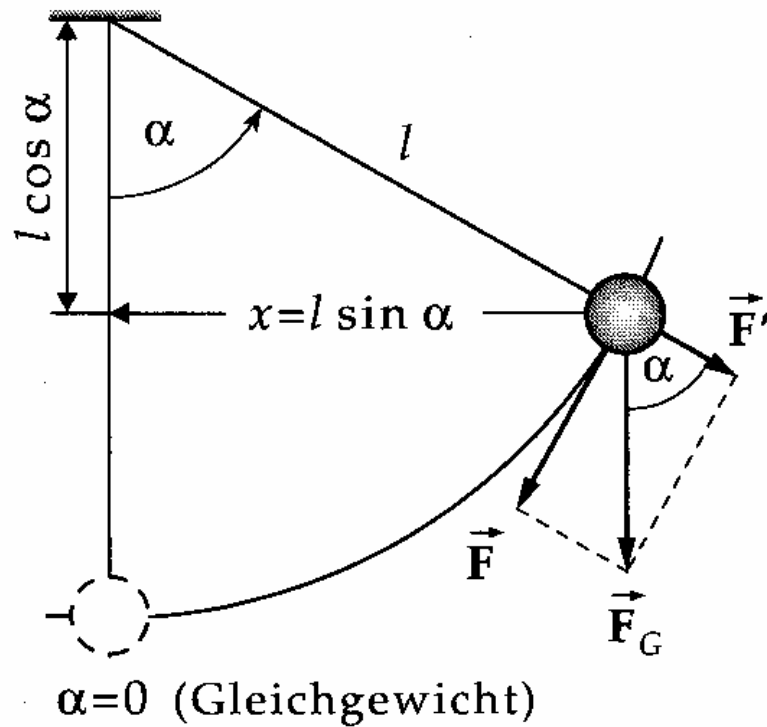
**Counting  
Mechanism**

**Oscillator**



**Balance Wheel Clock**

# Mathematisches Pendel



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

# Frequenz- bänder

- HF (high frequencies)  
 $f = 3 \dots 30 \text{ MHz}; \quad \lambda_0 = 100 \dots 10 \text{ m}$
- VHF (very high frequencies)  
 $f = 30 \dots 300 \text{ MHz}; \quad \lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ m} \quad (\text{Meterwellen})$
- UHF (ultra high frequencies)  
 $f = 300 \dots 3000 \text{ MHz}; \quad \lambda_0 = 1 \dots 0,1 \text{ m} \quad (\text{Dezimeterwellen})$
- SHF (super high frequencies)  
 $f = 3 \dots 30 \text{ GHz}; \quad \lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ cm} \quad (\text{Zentimeterwellen})$
- EHF (extremely high frequencies)  
 $f = 30 \dots 300 \text{ GHz}; \quad \lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ mm} \quad (\text{Millimeterwellen})$

# Frequenz- bänder

(orientiert an Hohlleiter-  
bändern)

Bandbezeichnung				Frequenz	Wellenlänge	
alt.		neu		f / GHz	$\lambda_0$ / m	
HF	3-30 MHz	A	0-250 MHz	0,1	3	
VHF	30-300 MHz			0,2	1,5	
UHF	300-1000 MHz	B	250-500 MHz	0,3	1	
				0,4	0,75	
		C	500-1000 MHz	0,5	0,6	
				0,6	0,5	
L	1-2 GHz	D	1-2 GHz	0,8	0,375	
				1,0	0,3	
S	2-4 GHz	E	2-3 GHz	2	0,15	
		F	3-4 GHz	3	0,1	
C	4-8 GHz	G	4-6 GHz	4	0,075	
		H	6-8 GHz	5	0,06	
				6	0,05	
X	8-12 GHz	I	8-10 GHz	8	0,0375	
		J	10-20 GHz	10	0,03	
J	Ku			12-18 GHz	20	0,015
K	18-27 GHz	K	20-40 GHz			
Q	Ka			27-40 GHz	30	0,01
	40-60 GHz	L	40-60 GHz	40	0,0075	
				50	0,006	
				60	0,005	
O	E	60-90 GHz	M	60-100 GHz	80	0,00375
				100	0,003	

# Frequenz- bänder

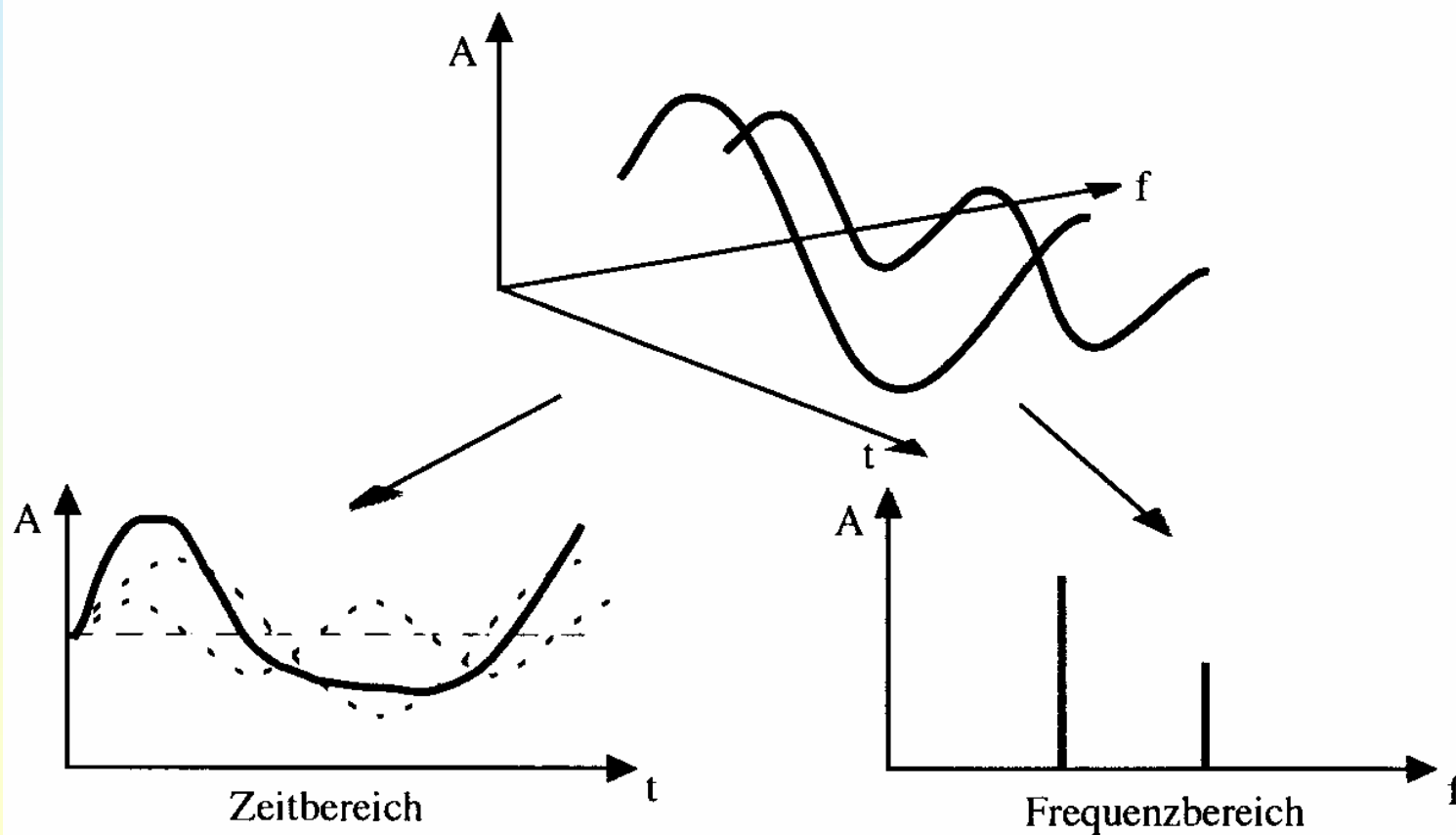
(orientiert an Hohlleiter-  
bändern)

- HF (high frequencies)  
 $f = 3 \dots 30 \text{ MHz}$ ;  $\lambda_0 = 100 \dots 10 \text{ m}$
- VHF (very high frequencies)  
 $f = 30 \dots 300 \text{ MHz}$ ;  $\lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ m}$  (Meterwellen)
- UHF (ultra high frequencies)  
 $f = 300 \dots 3000 \text{ MHz}$ ;  $\lambda_0 = 1 \dots 0,1 \text{ m}$  (Dezimeterwellen)
- SHF (super high frequencies)  
 $f = 3 \dots 30 \text{ GHz}$ ;  $\lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ cm}$  (Zentimeterwellen)
- EHF (extremely high frequencies)  
 $f = 30 \dots 300 \text{ GHz}$ ;  $\lambda_0 = 10 \dots 1 \text{ mm}$  (Millimeterwellen)

Bandbezeichnung				Frequenz $f / \text{GHz}$	Wellenlänge $\lambda_0 / \text{m}$
alt:	neu				
<b>HF</b>	3-30 MHz				
<b>VHF</b>	30-300 MHz	<b>A</b>	0-250 MHz	0,1	3
				0,2	1,5
<b>UHF</b>	300-1000 MHz	<b>B</b>	250-500 MHz	0,3	1
				0,4	0,75
		<b>C</b>	500-1000 MHz	0,5	0,6
				0,6	0,5
				0,8	0,375
				1,0	0,3
<b>L</b>	1-2 GHz	<b>D</b>	1-2 GHz		
<b>S</b>	2-4 GHz	<b>E</b>	2-3 GHz	2	0,15
		<b>F</b>	3-4 GHz	3	0,1
<b>C</b>	4-8 GHz	<b>G</b>	4-6 GHz	4	0,075
		<b>H</b>	6-8 GHz	5	0,06
				6	0,05
<b>X</b>	8-12 GHz	<b>I</b>	8-10 GHz	8	0,0375
				10	0,03
<b>J</b>	<b>Ku</b> 12-18 GHz	<b>J</b>	10-20 GHz		
<b>K</b>	18-27 GHz			20	0,015
<b>Q</b>	<b>Ka</b> 27-40 GHz			30	0,01
	40-60 GHz	<b>L</b>	40-60 GHz	40	0,0075
				50	0,006
		<b>M</b>	60-100 GHz	60	0,005
<b>O</b>	<b>E</b> 60-90 GHz			80	0,00375
				100	0,003



# Messebenen: Zeitbereich, Frequenzbereich



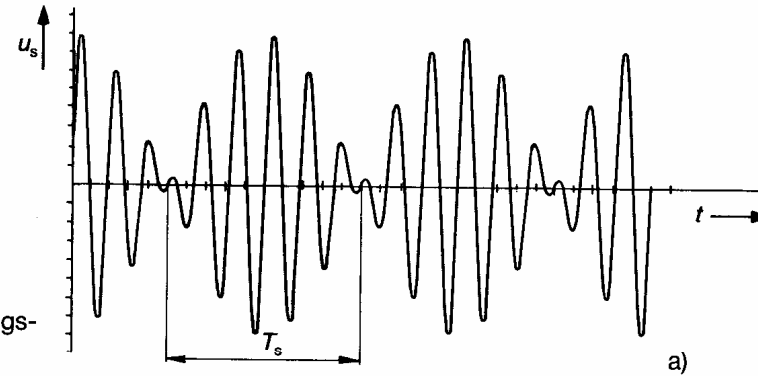
# Schwebung

- a)  $f_1 \approx f_2$   
b)  $f_2 = 10f_1$

$T_s$  Periodendauer  
der Schwebung

$$f_s = \frac{1}{T_s} = |f_1 - f_2| \text{ Schwebungs-}$$

frequenz



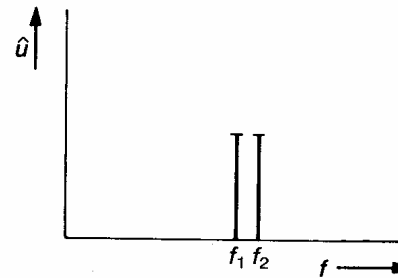
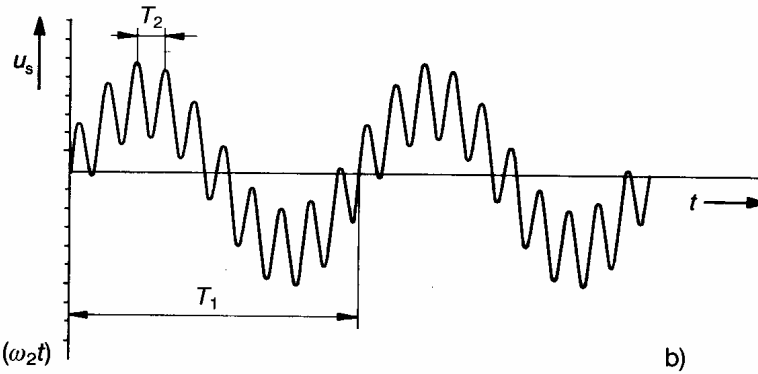
$$f_1 = \frac{1}{T_1}$$

$$f_2 = \frac{1}{T_2}$$

$$\omega_1 = 2 \cdot \pi \cdot f_1$$

$$\omega_2 = 2 \cdot \pi \cdot f_2$$

$$u_s = \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega_1 t) + \hat{u}_2 \cdot \sin(\omega_2 t)$$



# Mischung an nichtlinearen Bauelementen

$$f_A = |m \cdot f_S \pm n \cdot f_{LO}|$$

*mit*

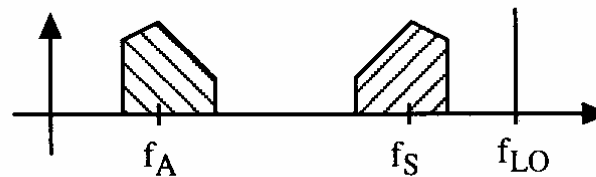
$$m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

# Frequenzlagen beim Mischprozeß

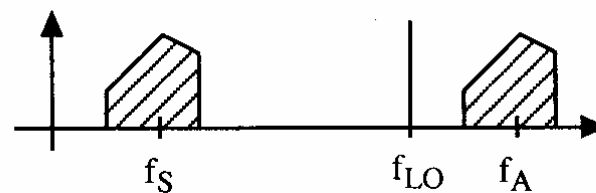


$f_S > f_A$  Abwärtsmischung

$$f_A = f_S - f_{LO} \quad \text{Gleichlage}$$

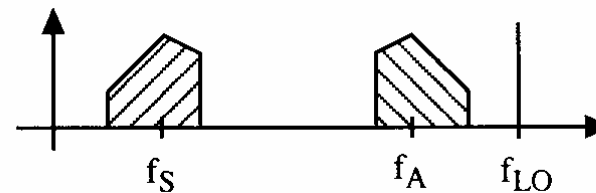


$$f_A = f_{LO} - f_S \quad \text{Kehrlage}$$



$f_S < f_A$  Aufwärtsmischung

$$f_A = f_S + f_{LO} \quad \text{Gleichlage}$$



$$f_A = f_{LO} - f_S \quad \text{Kehrlage}$$



# Zeit, Frequenz, Phase

- Allgemeine Zusammenhänge
- **Frequenz**
  - ◆ Mechanische Frequenzmesser
  - ◆ Frequenzmessung durch Vergleich (Schwebungsmesser, Oszilloskopischer Vergleich)
  - ◆ Resonanzfrequenzmesser
  - ◆ Digitale Frequenzmesser (Zähler)
- Zeit
- Phase

# Mechanischer Frequenzmesser: Zungenfrequenzmesser

a) Anzeige

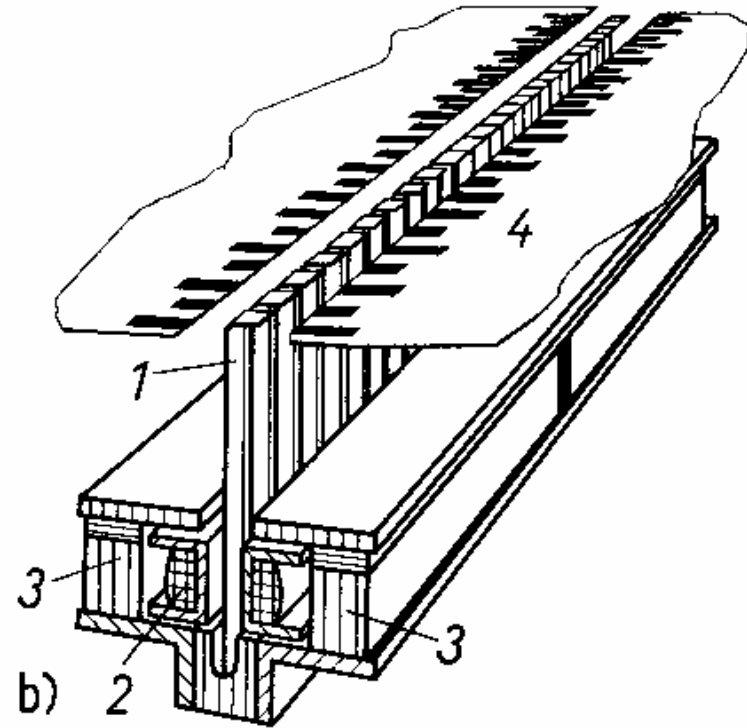
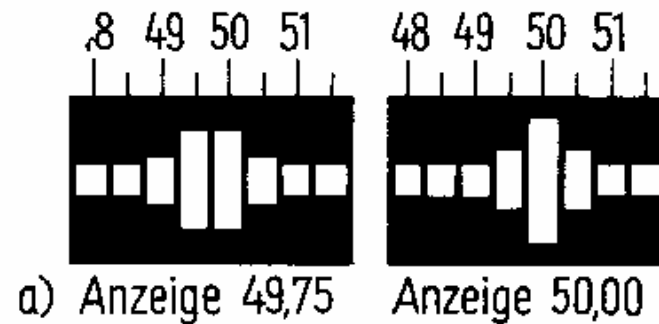
b) Aufbau

1 Stahlzungen

2 Erregerspule

3 Permanentmagnete

4 Skala

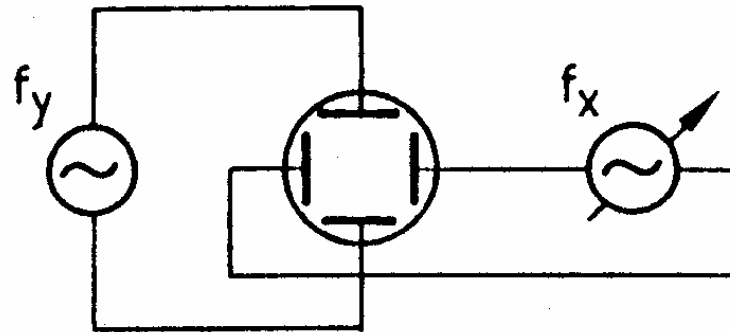




# Schwebungsfrequenzmesser

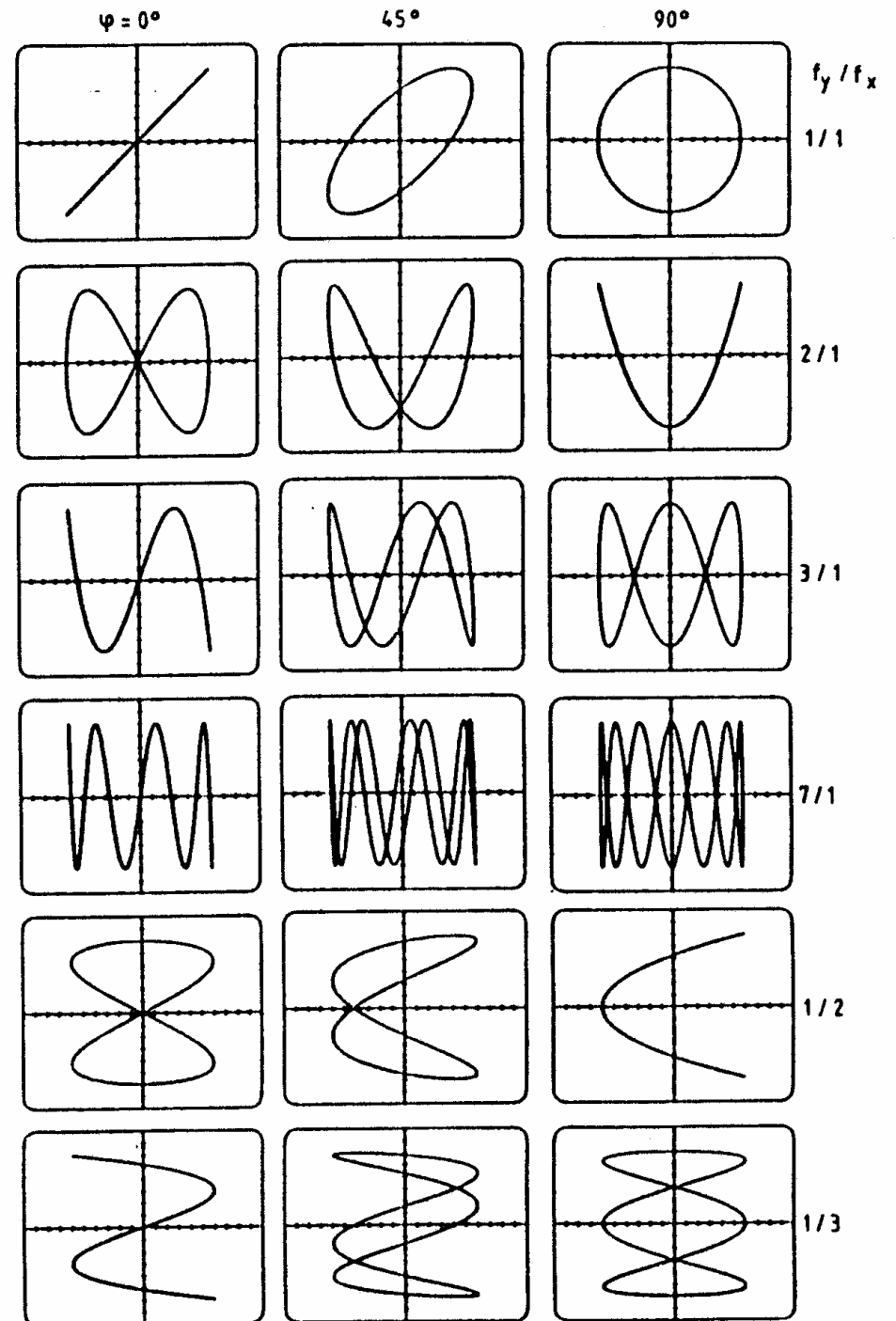
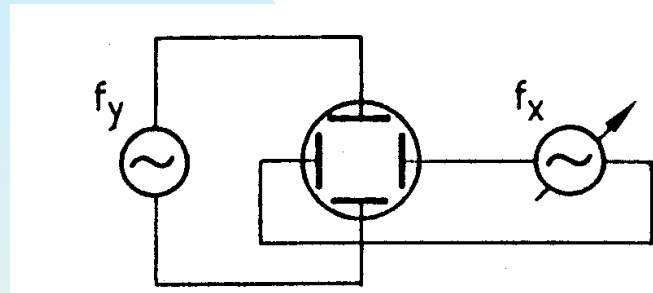
# Frequenzmessung mit dem Oszilloskop

- Kalibrierte Zeitbasis
- LISSAJOUS – Figuren (Frequenzvergleich)





# Frequenzmessung mit dem Oszilloskop



# Resonanzfrequenzmesser

- Resonanz als Messkriterium
- Abstimmbare Resonatoren mit geeichter oder errechneter Frequenzkala
- Auflösung aus Güte errechenbar

$$Q = \frac{f_0}{f_{3dB}}$$

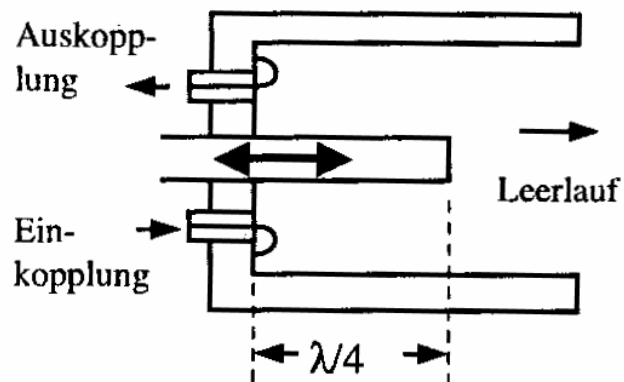
Resonanzfrequenz



3 dB - Bandbreite



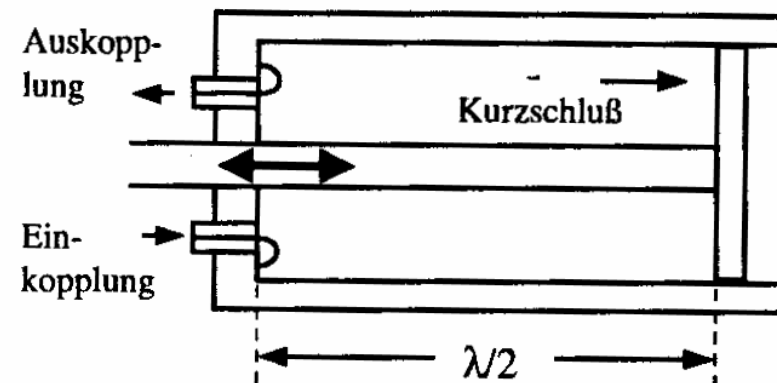
# Koaxiale Resonatoren



**Viertelwellenlängen-Resonator**

Eindeutigkeitsbereich 3:1  
(nächste Resonanz bei  $l=3 \cdot \lambda/4$ )

$Q = 1200$  bis  $4000$



**Halbwellenlängen-Resonator**

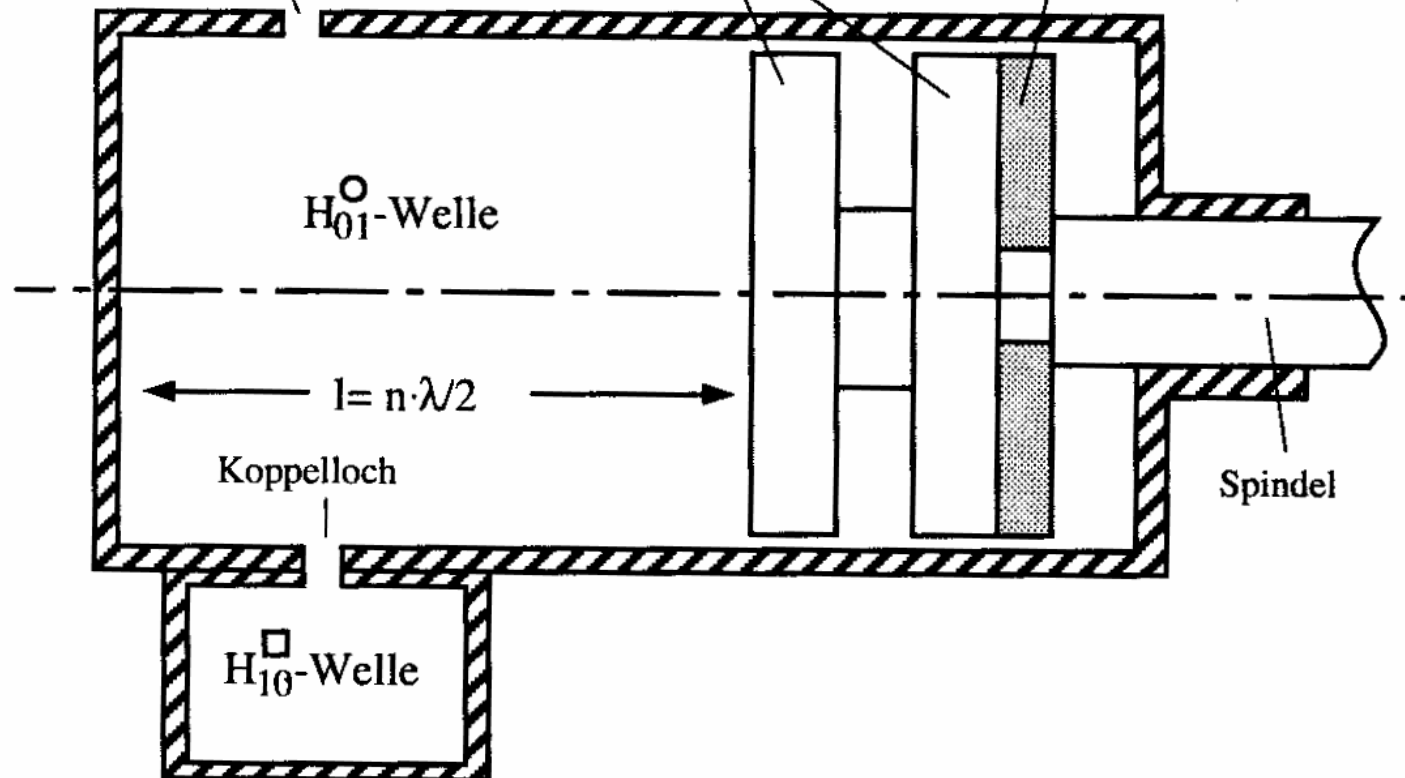
Eindeutigkeitsbereich 2:1  
(nächste Resonanz bei  $l=\lambda$ )

# Hohlleiter - Resonator

Auskopplung zum Leistungsmesser  
(bei Verwendung als Durchgangsresonator)

kontaktloser  
Kurzschlußschieber

Dämpfungsmasse



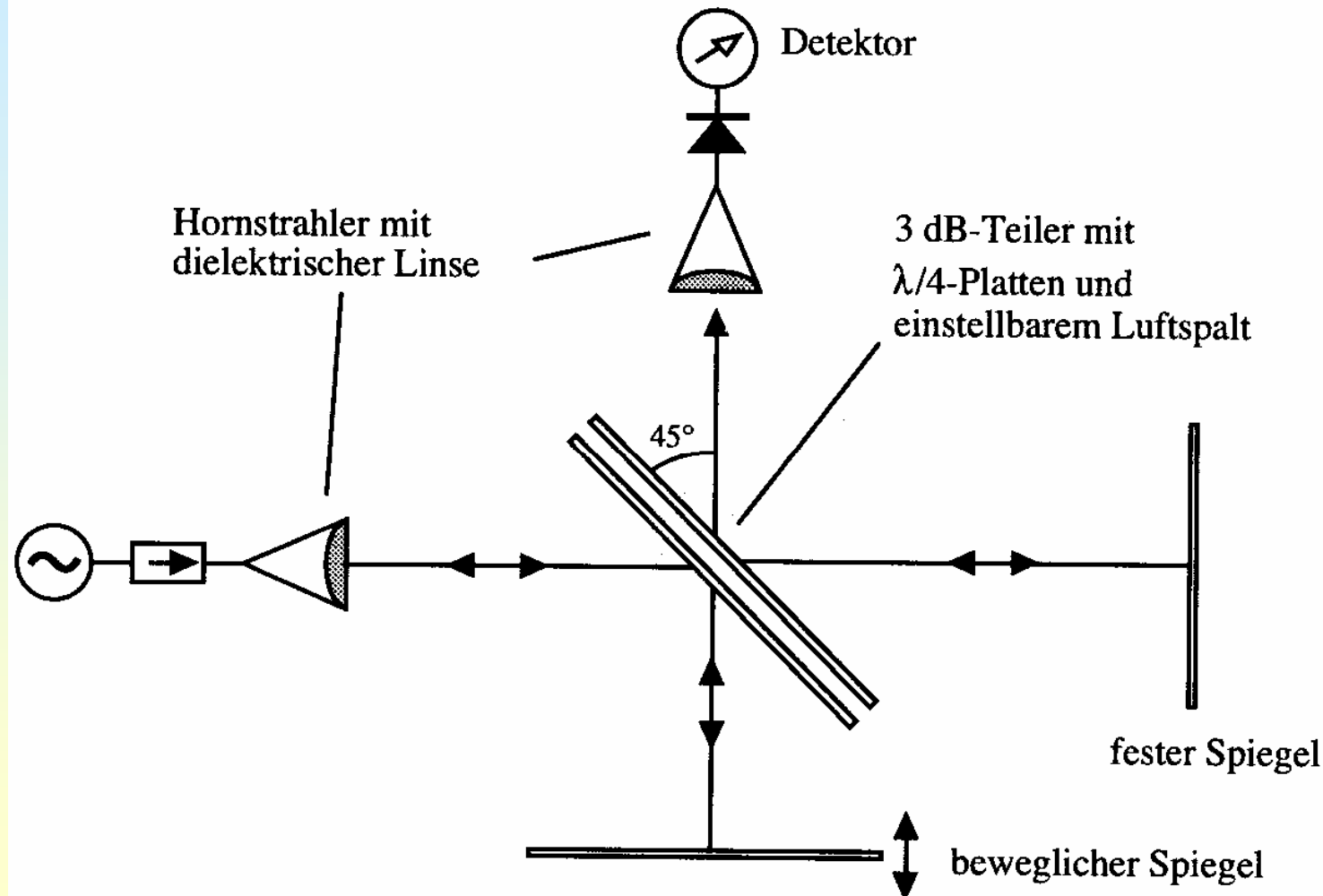
# Stehwellenmeßleitung

- Kurzgeschlossene Leitung mit verschiebbarer Meßsonde
- Speisung mit reinem Sinussignal
- Messung der Abstände der Nullstellen
- Abstand zweier Minima:

$$\Delta l = \frac{\lambda_L}{2}$$

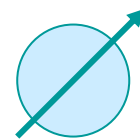
$$\lambda_L = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

# MICHELSON - Interferometer

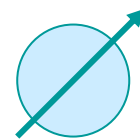
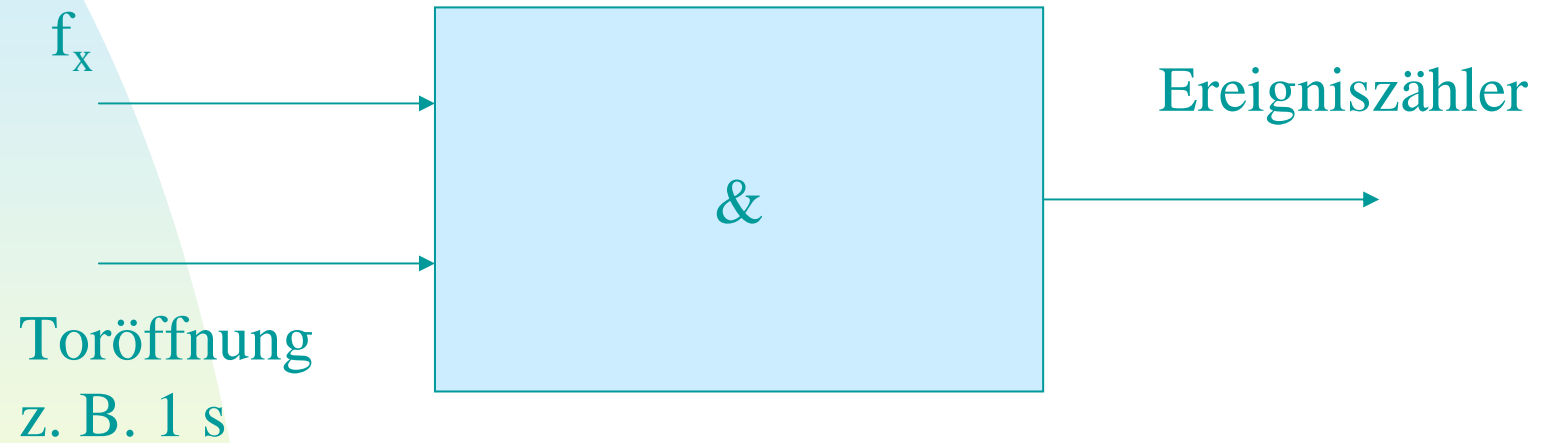


# Digitale Frequenzzähler

- Kein A/D-Wandler erforderlich
- Definition der Frequenz: Zahl der Perioden / Zeiteinheit
- $1 \text{ Hz} = 1 \text{ Periode} / 1 \text{ s}$
- „Ereignis“ - zähler



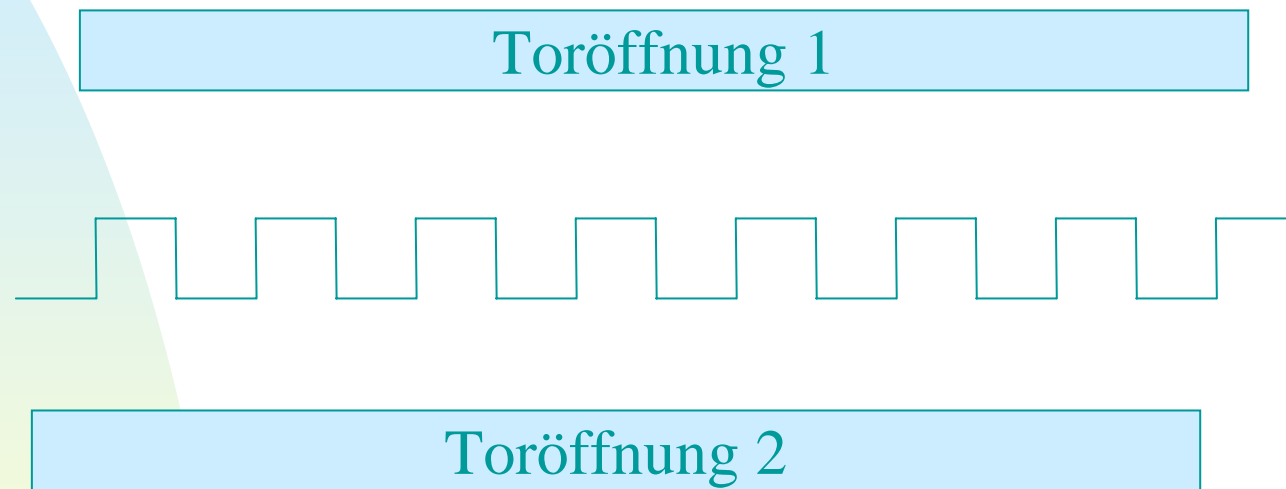
# Digitale Frequenzzähler



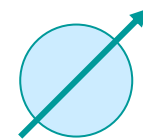


# Digitale Frequenzzähler:

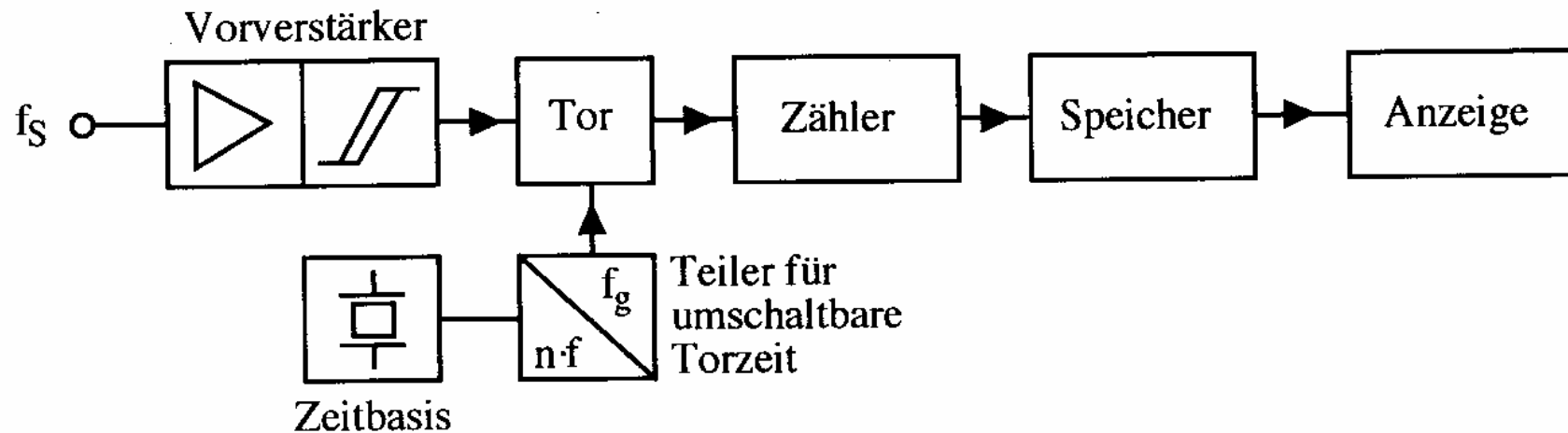
## Digitalisierungsunsicherheit



Toröffnung 1: 8 Perioden  
Toröffnung 2: 7 Perioden



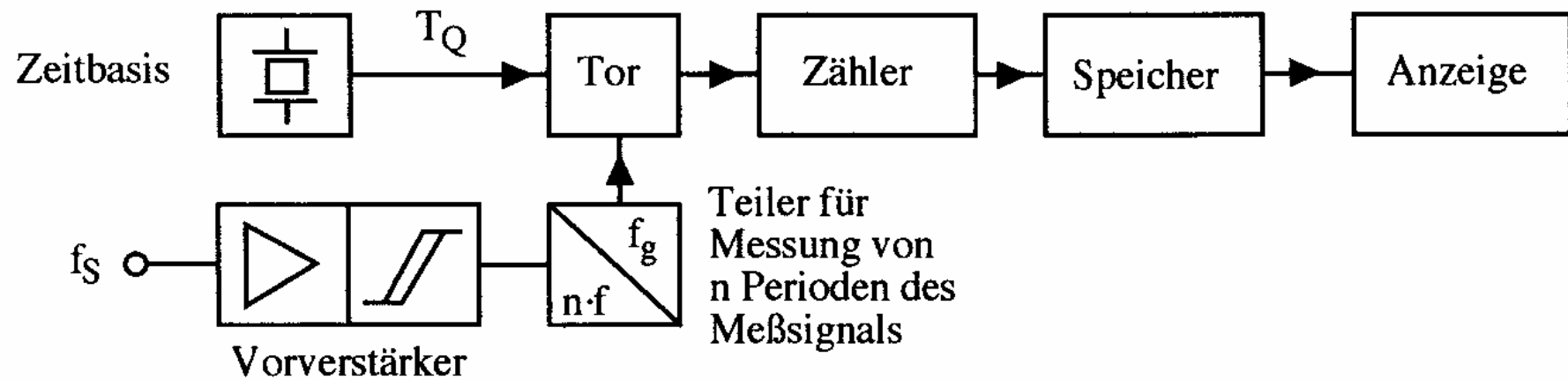
# Digitaler Frequenzzähler



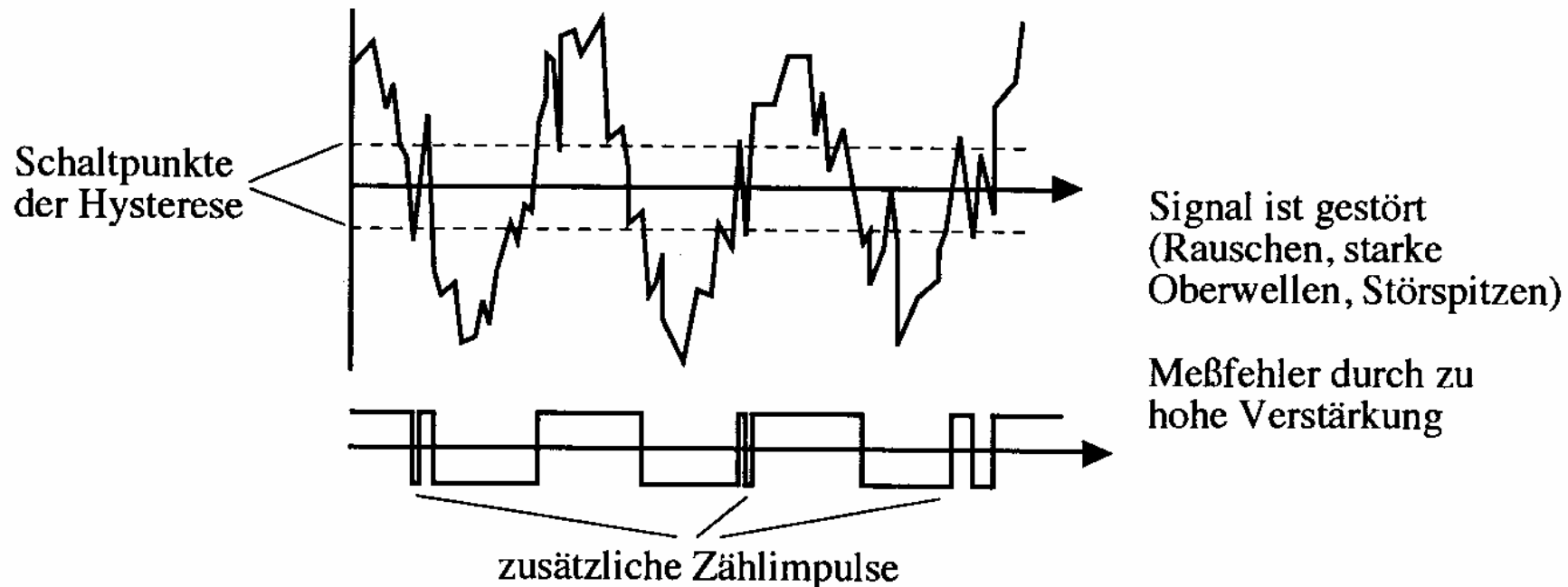
$$f_S = \frac{N}{T_g}$$

mit  $N$ : Zählergebnis  
 $T_g$ : Toröffnungszeit

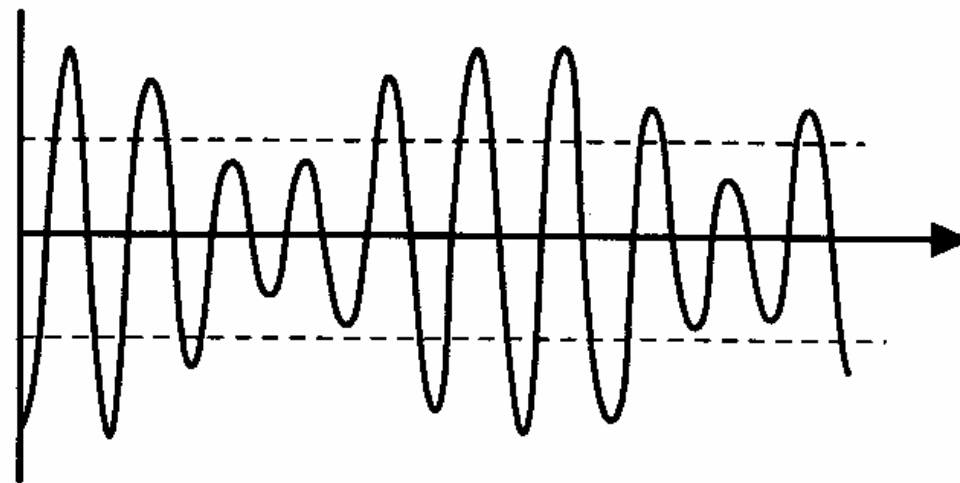
# Periodendauermesser



# Fehlerhafte Frequenzmessung durch falsche Triggerung (1)

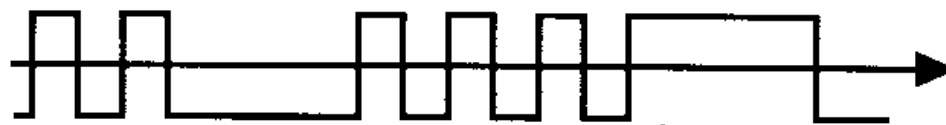


# Fehlerhafte Frequenzmessung durch falsche Triggerung (2)



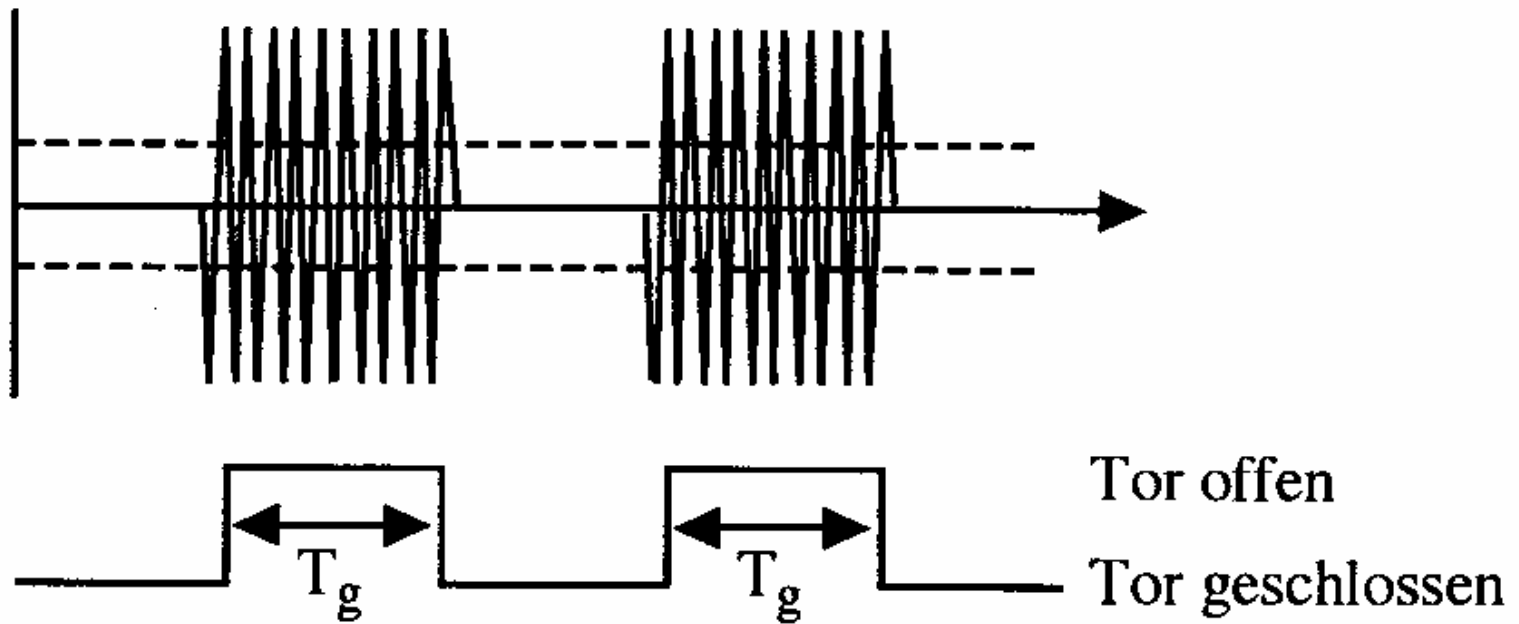
Signal ist  
amplitudenmoduliert

Meßfehler durch zu  
geringe Verstärkung



fehlende Zählimpulse

# Messung an Pulssignalen: Gating





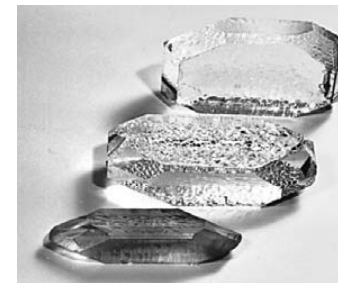
# Erzeugung der Referenzfrequenz für Zeitbasis (Toröffnungszeit)

# Quarzrohmaterial

- mechanischen Resonatoren der Schwingquarze werden aus Quarz der einkristallinen Variante des Siliziumdioxid  $\text{SiO}_2$  hergestellt
- einkristalline Zustandsform in der Natur nur sehr selten
- 1964 Beginn der Großproduktion von synthetischem Quarz
- heute fast nur noch aus synthetischem Material, da erreichbare Schwingungsgüte vergleichbar mit der von Naturquarz



**natürliche Quarzkristalle**

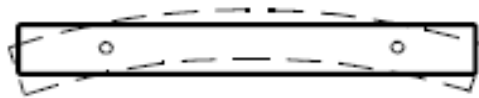


**synthetische Quarzkristalle**



# Schwingungsformen

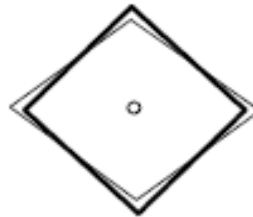
Biege-  
Schwingung



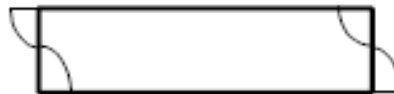
Dehnungs-  
Schwingung



Flächenscherungs-  
Schwingung



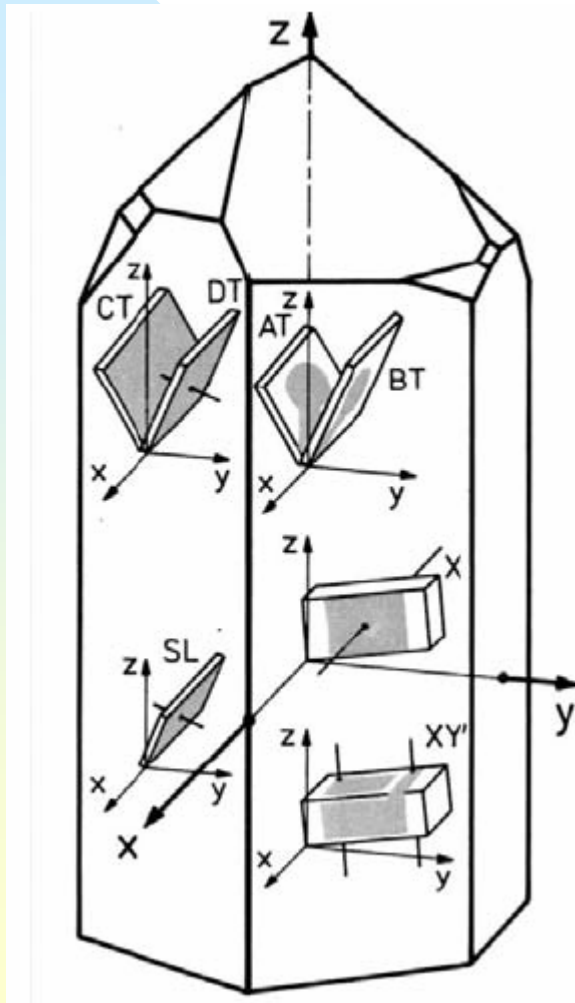
Dickenscherungs-  
Schwingung



von  
tiefen  
zu  
hohen  
Frequenzen

- Resonanzfrequenz der Quarzkristalle ist bei vorgegebenen Materialkonstanten durch die mechanischen Abmessungen bestimmt

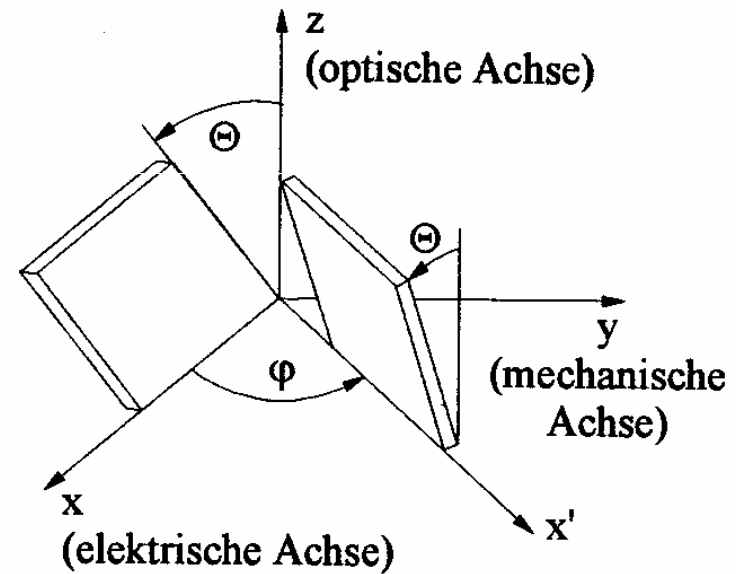
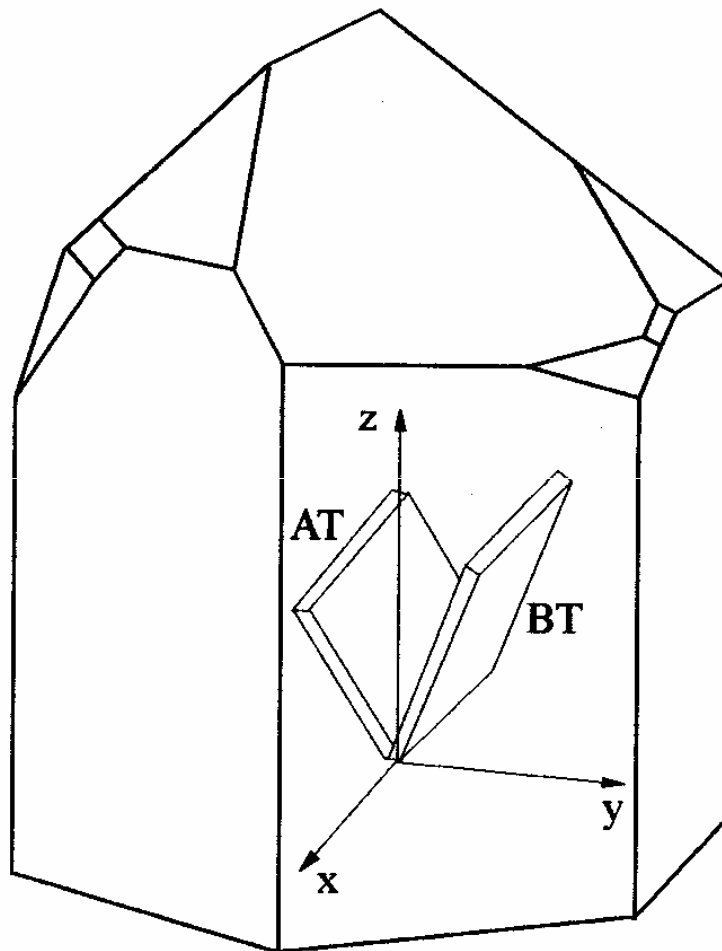
# Quarzschnitte



Frequenzbereiche der Quarzschnitte	
BIEGESCHWINGER	
X-Schnitt	10...100 kHz
XY'-Schnitt	4...85 kHz
NT-Schnitt	1...100 kHz
DEHNUNGSSCHWINGER	
X-Schnitt	40...200 kHz
MT-Schnitt	60...300 kHz
FLACHENSCHERSCHWINGER	
CT-Schnitt	300...1000 kHz
DT-Schnitt	180...400 kHz
SL-Schnitt	400...800 kHz
DICKENSCHERSCHWINGER	
AT-Schnitt	1...250 MHz
BT-Schnitt	1...30 MHz

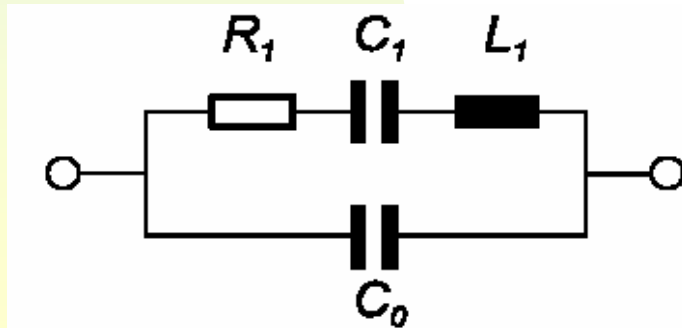
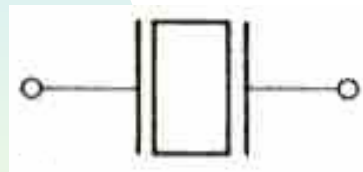
- zur Erzielung bestimmter Eigenschaften ergeben sich optimale Schnittwinkel unter dem die Schwingkörper aus dem Quarzkristall herausgeschnitten werden

# Quarzkristall ( $\text{SiO}_2$ ) mit Orientierung des AT – sowie des BT - Schnittes



## Ersatzschaltbild

- Ersatzschaltbild eines Quarzkristalls stellt die elektrische Wirkung des mechanischen Schwingers dar



$C_1$  ...dynamische Kapazität der elastischen Nachgiebigkeit

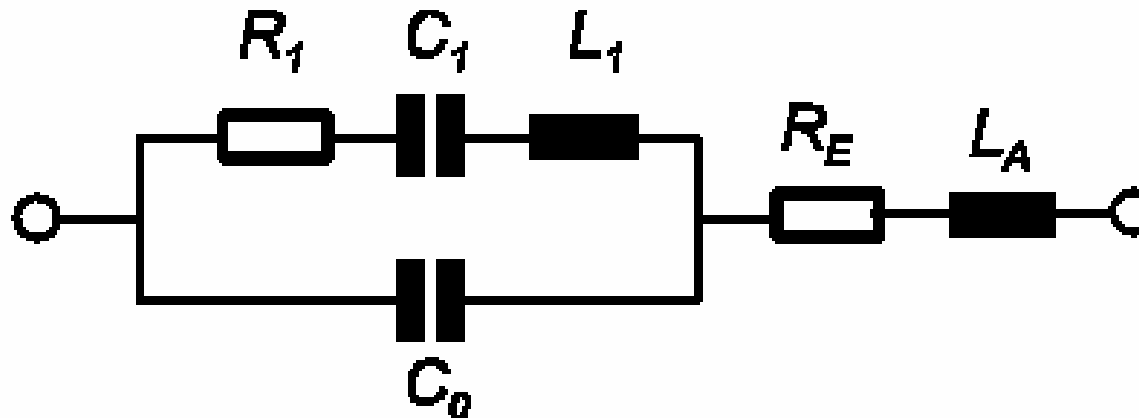
$L_1$  ...schwingenden Masse

$R_1$  ...Resonanzwiderstand, durch dynamische Schwingungsverluste

$C_0$  ...statische Kapazität  $C_0$

## Erweitertes Ersatzschaltbild

- für hohe Frequenzen ist in besonderen Fällen das einfache Ersatzschaltbild nicht ausreichend



$L_A$  ...Induktivitäten der Halterungselemente im Quarzgehäuse  
 $R_E$ ...elektrischer Widerstand der aufgedampften Elektroden

## Temperaturabhängigkeit der Frequenz

$$f = f_0 \left[ 1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \gamma(T - T_0)^3 \right]$$

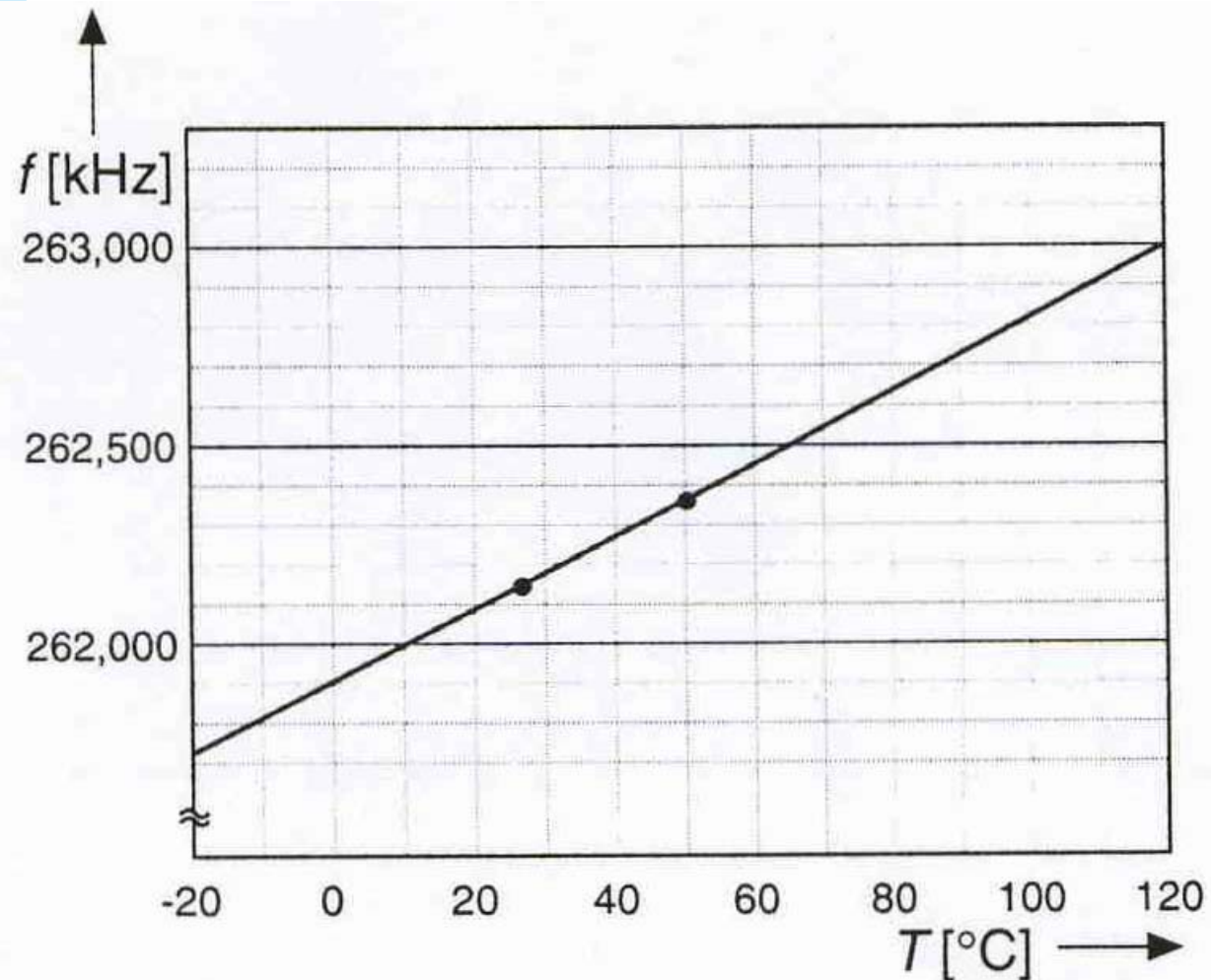
$\alpha$  ...linearer Temperaturkoeffizient

$\beta$  ...quadratischer Temperaturkoeffizient

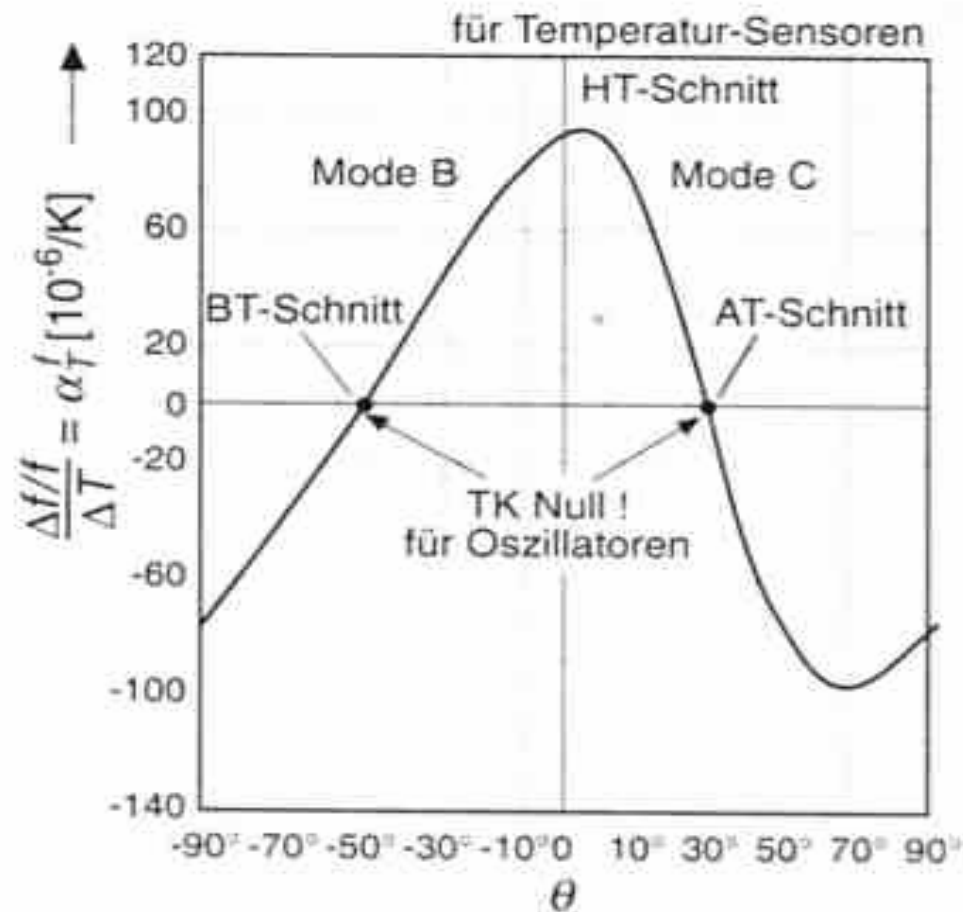
$\gamma$  ...kubischer Temperaturkoeffizient

$f_0$  ...Frequenz, die sich bei der Bezugstemperatur  $T_0$  einstellt

## Temperaturabhängigkeit der Eigenfrequenz eines Quarz- Temperatursensors



## Abhängigkeit des linearen Temperaturkoeffizienten vom Schnittwinkel

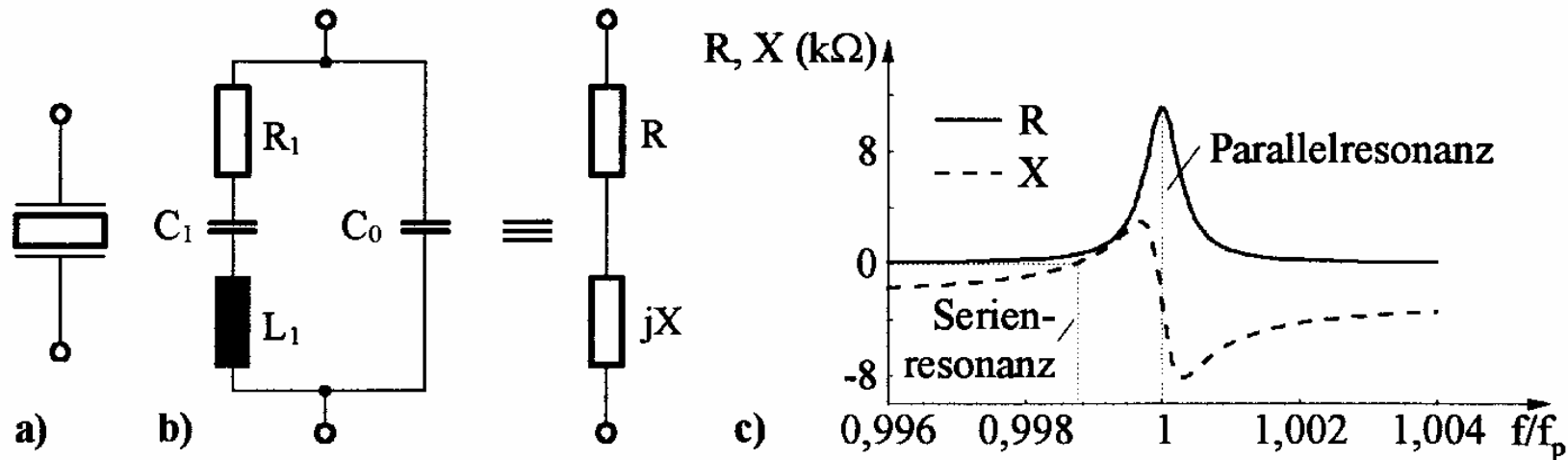


- der lineare Temperaturkoeffizient der Eigenfrequenz kann durch Wahl besonderer kristallographischer Schnittwinkel erheblich vergrößert werden



# Schwingquarz

## Ersatzschaltbild, Wirk- und Blindanteil der Eingangsimpedanz



1-MHz-Schwingquarz:  $C_0 = 60 \text{ pF}$ ,  $C_1 = 0,016 \text{ pF}$ ,  $L_1 = 1,5 \text{ H}$ ,  $R_1 = 60 \Omega$

# Komplexe Eingangsadmittanz und Eingangsimpedanz des Quarzes

$$\underline{Y}_Q(\omega) = G + jB = \frac{R_1}{R_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2} + j \left( \omega C_0 - \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}}{R_1^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right)^2} \right)$$

Wegen der hohen Güte kann i. a. der Verlustwiderstand  $R_1$  vernachlässigt werden.

$$\underline{Z}_Q \approx jX = \frac{j}{\omega} \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{C_0 + C_1 - \omega^2 L_1 C_1 C_0}$$

# Serien- und Parallelresonanz

$$\underline{Z}_Q \approx jX = \frac{j}{\omega} \frac{\omega^2 L_1 C_1 - 1}{C_0 + C_1 - \omega^2 L_1 C_1 C_0} .$$

- Polstelle von  $\underline{Z}_Q$  ergibt Parallelresonanz

$$f_p = \frac{1}{2\pi \sqrt{L_1 C_1}} \sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}$$

- Reaktanzanteil  $X = 0$ : Serienresonanz

$$f_s = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} .$$

# Relativer Frequenzabstand zwischen Parallel- und Serienresonanz

$C_1 \ll C_0 :$

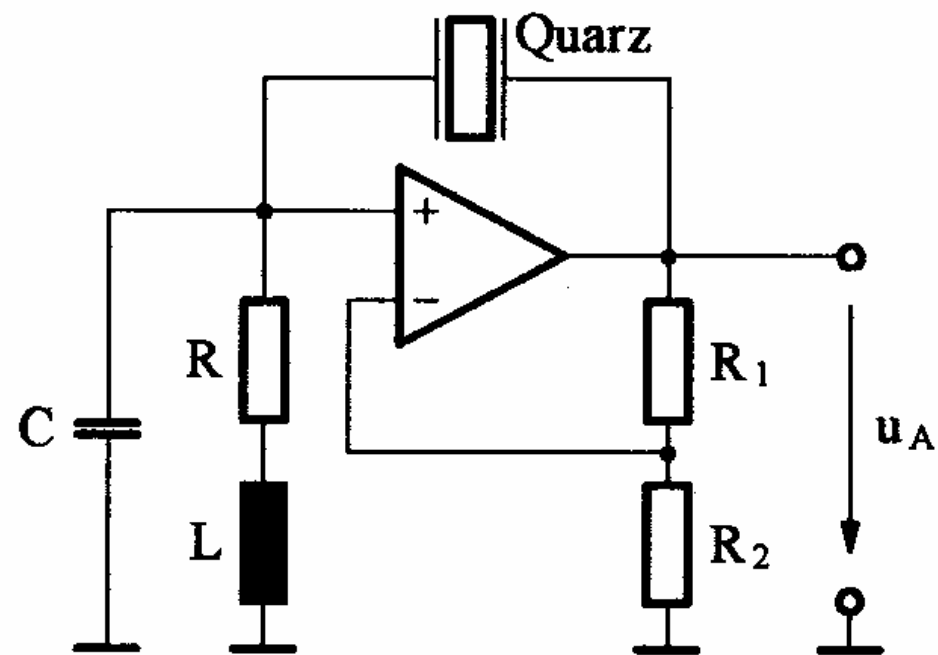
$$\frac{f_p - f_s}{f_s} \approx \frac{1}{2} \frac{C_1}{C_0}$$

# Güte Q

$$Q = \frac{1}{\tan \delta_s} = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}.$$

Typische Werte:  $5 \cdot 10^3$  ....  $5 \cdot 10^5$

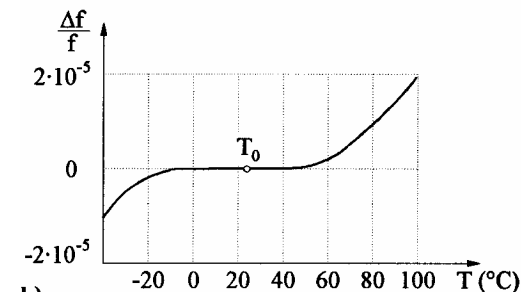
# Klassische Oszillatorschaltung



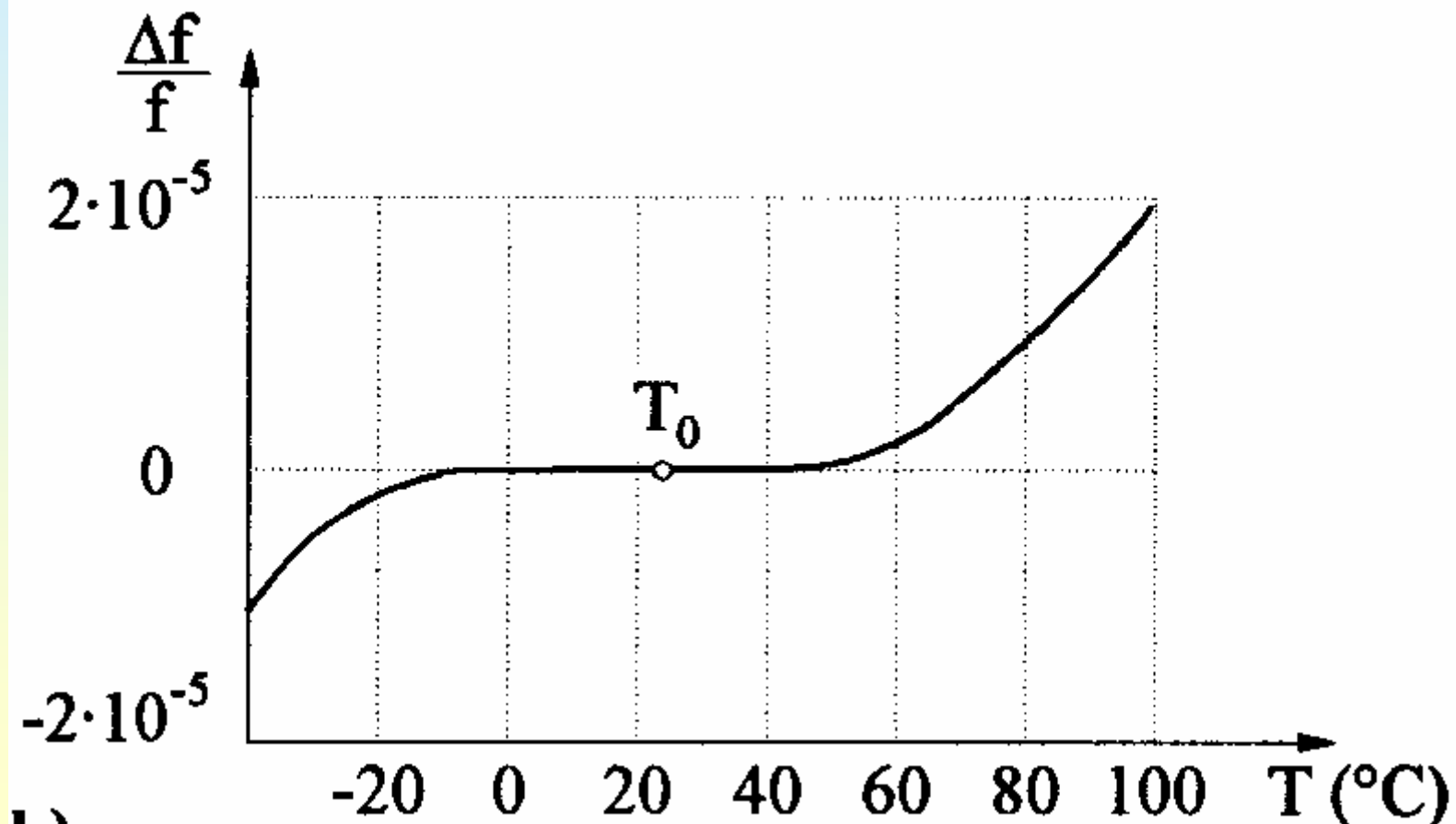
Serienresonanz

# Charakteristische Parameter

	ohne Temperaturregelung	mit Temperaturregelung
Kurzzeitkonstanz (1 Sekunde)	$< 3 \cdot 10^{-9}$	$< 10^{-11}$
Temperaturdrift (0° C - 50°)	$< 10^{-5}$	$< 10^{-8}$
Alterungsrate	$< 10^{-8}/\text{Tag}$	$< 10^{-9}/\text{Tag}$



# Quarzoszillator im Thermostaten





# Typisches Beispiel für Genauigkeit der Quarzeitbasis

Erhöhte Temperaturstabilität

Geringe Alterung

	TCXO	Option 001	Option 010
Alterung	$5 \cdot 10^{-8}$ pro Tag	$5 \cdot 10^{-10}$ pro Tag	$5 \cdot 10^{-11}$ pro Tag
Kurzzeit-Stabilität	$1 \cdot 10^{-9}$ pro Sekunde	$1 \cdot 10^{-10}$ pro Sekunde	$1 \cdot 10^{-10}$ pro Sekunde
Temperatur-sprung 50K	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-9}$
Versorgungs-spannungs-schwankung 10%	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-10}$

Temperatur-stabilisierter Quarzthermostat

Bei Synchronisation mit dem Zeitstandard der PTB (Physikalisch-Technische Bundesanstalt):

Genauigkeit  $10^{-12}$

Quelle: hp

# Messunsicherheit bei Zeitintervallmessung

## Absolute Unsicherheit

$$\Delta T_X = \frac{\partial T_X}{\partial f_{\text{ref}}} \Delta f_{\text{ref}} + \frac{\partial T_X}{\partial N_X} \Delta N_X$$

## Relative Unsicherheit

$$\left| \frac{\Delta T_X}{T_X} \right| = \left| \frac{\Delta f_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}} \right| + \left| \frac{\Delta N_X}{N_X} \right|$$

Quantisierungsfehler



# Messunsicherheiten bei Zeitintervallmessung

## Absolute Unsicherheit

$$\Delta T_X = \frac{\partial T_X}{\partial f_{\text{ref}}} \Delta f_{\text{ref}} + \frac{\partial T_X}{\partial N_X} \Delta N_X$$

## Relative Unsicherheit

$$\left| \frac{\Delta T_X}{T_X} \right| = \left| \frac{\Delta f_{\text{ref}}}{f_{\text{ref}}} \right| + \left| \frac{\Delta N_X}{N_X} \right|$$

Quantisierungsfehler

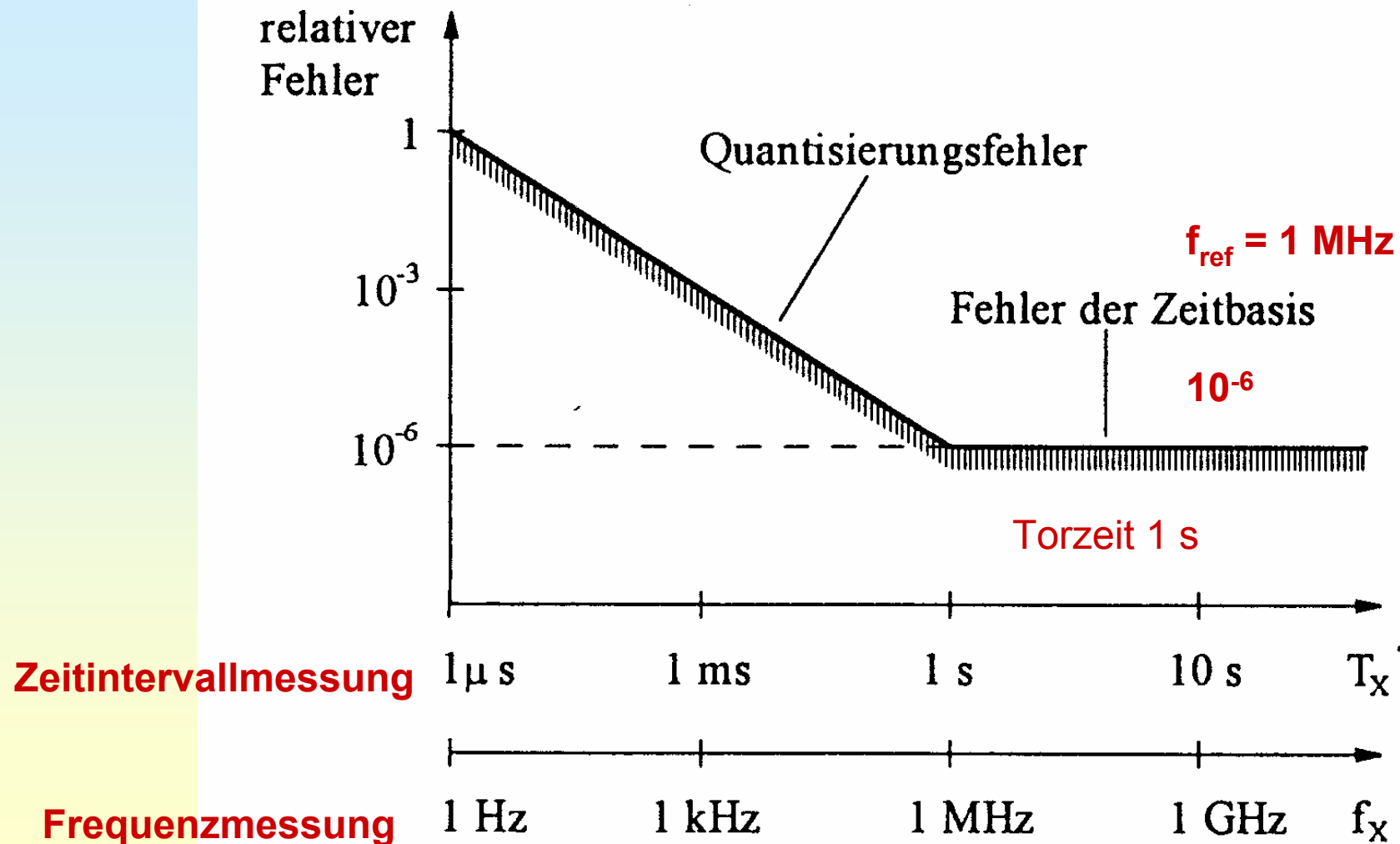
$$\left| \frac{\Delta N_X}{N_X} \right| = \left| \frac{\pm 1}{N_X} \right| = \frac{1}{N_X} = \frac{1}{f_{\text{ref}} T_X}$$

# Messunsicherheit bei Frequenzmessung

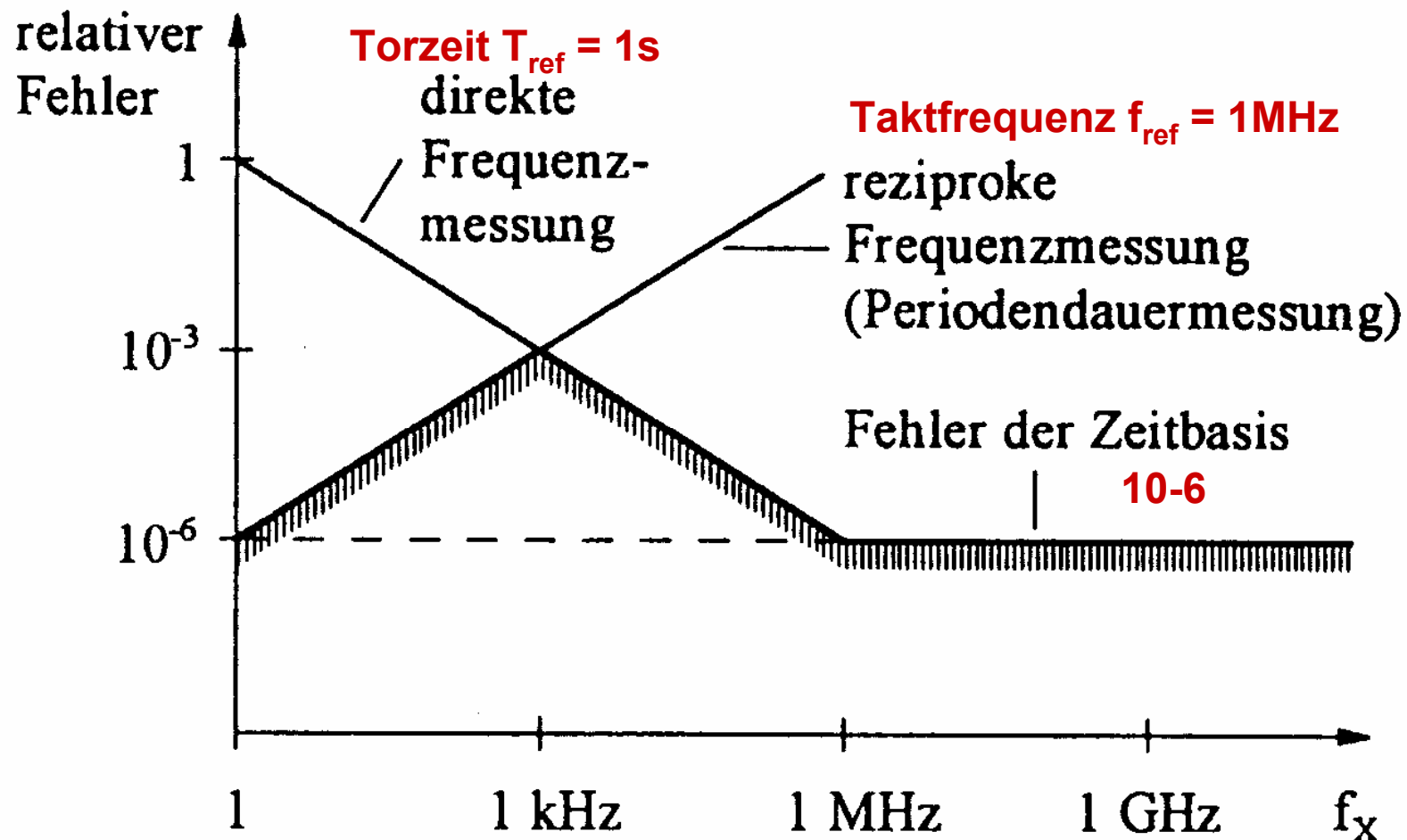
**Maximale relative Unsicherheit:**

$$\left| \frac{\Delta f_X}{f_X} \right| = \left| \frac{\Delta T_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}}} \right| + \left| \frac{\Delta N_X}{N_X} \right| = \left| \frac{\Delta T_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}}} \right| + \frac{1}{N_X} = \left| \frac{\Delta T_{\text{ref}}}{T_{\text{ref}}} \right| + \frac{1}{T_{\text{ref}} f_X}$$

# Relative Unsicherheit bei Frequenz- bzw. Zeitintervallmessung



# Relative Unsicherheit bei der digitalen Frequenzmessung (direkte Messung und Reziprokmesung)



# Frequenz- und Zeitintervallzähler

- $f_x = N_x / T_0$
- Der Frequenzzähler zählt die Anzahl  $N_x$  der Perioden der unbekannten Frequenz während einer durch die Zeitbasis festgelegten Zeitspanne  $T_0$ .
- $\Delta t_x = N_x T_0 = N_x / f_0$
- Der Zeitintervallzähler zählt die Anzahl  $N_x$  der Perioden der Zeitbasisfrequenz während der unbekannten Zeitspanne  $\Delta t_x$ .



# Universalzähler geeignet für

- Frequenzmessung
- Frequenzverhältnismessung
- Periodendauermessung
- Zeitintervall- und  
Impulsbreitenmessung



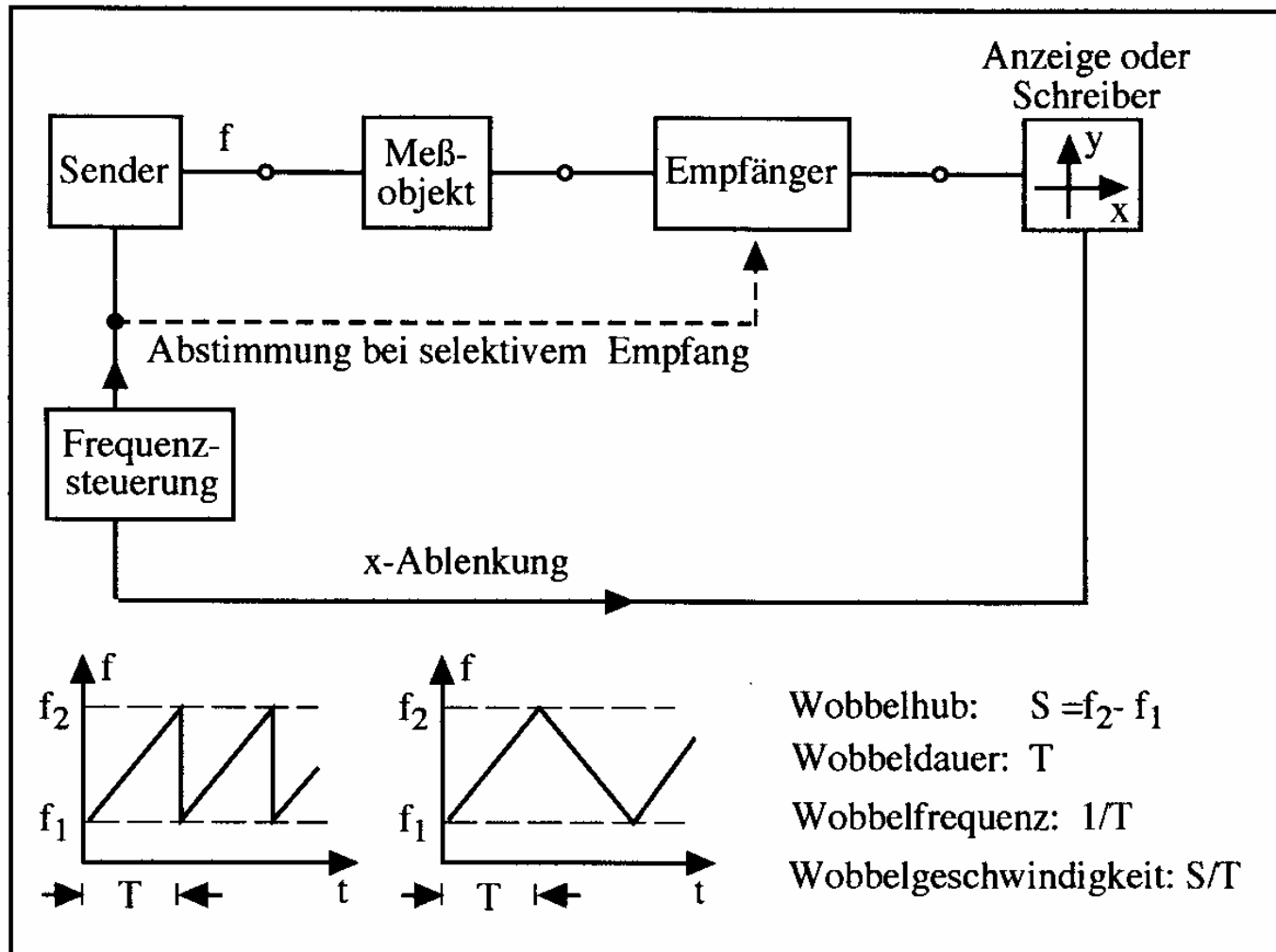
# Eigenschaften und Spezifikationen von Generatoren

<b>Frequenzbereich</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Frequenzauflösung</li><li>- Frequenzstabilität</li><li>- spektrale Reinheit (Störsignalabstand)</li></ul>	<b>Amplitudenbereich</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Amplitudenauflösung</li><li>- Amplitudenstabilität</li></ul>
<b>Modulationsbereich</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Modulationsmöglichkeiten (AM, FM, PM, Puls)</li><li>- Schaltgeschwindigkeit</li></ul>	<b>Sonstiges</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Störstrahlung durch Gehäuse</li><li>- Mechanische Daten (Gewicht, Mobilität, Arbeitsgeräusch)</li><li>- Anschlußmöglichkeiten</li><li>- Preis</li></ul>

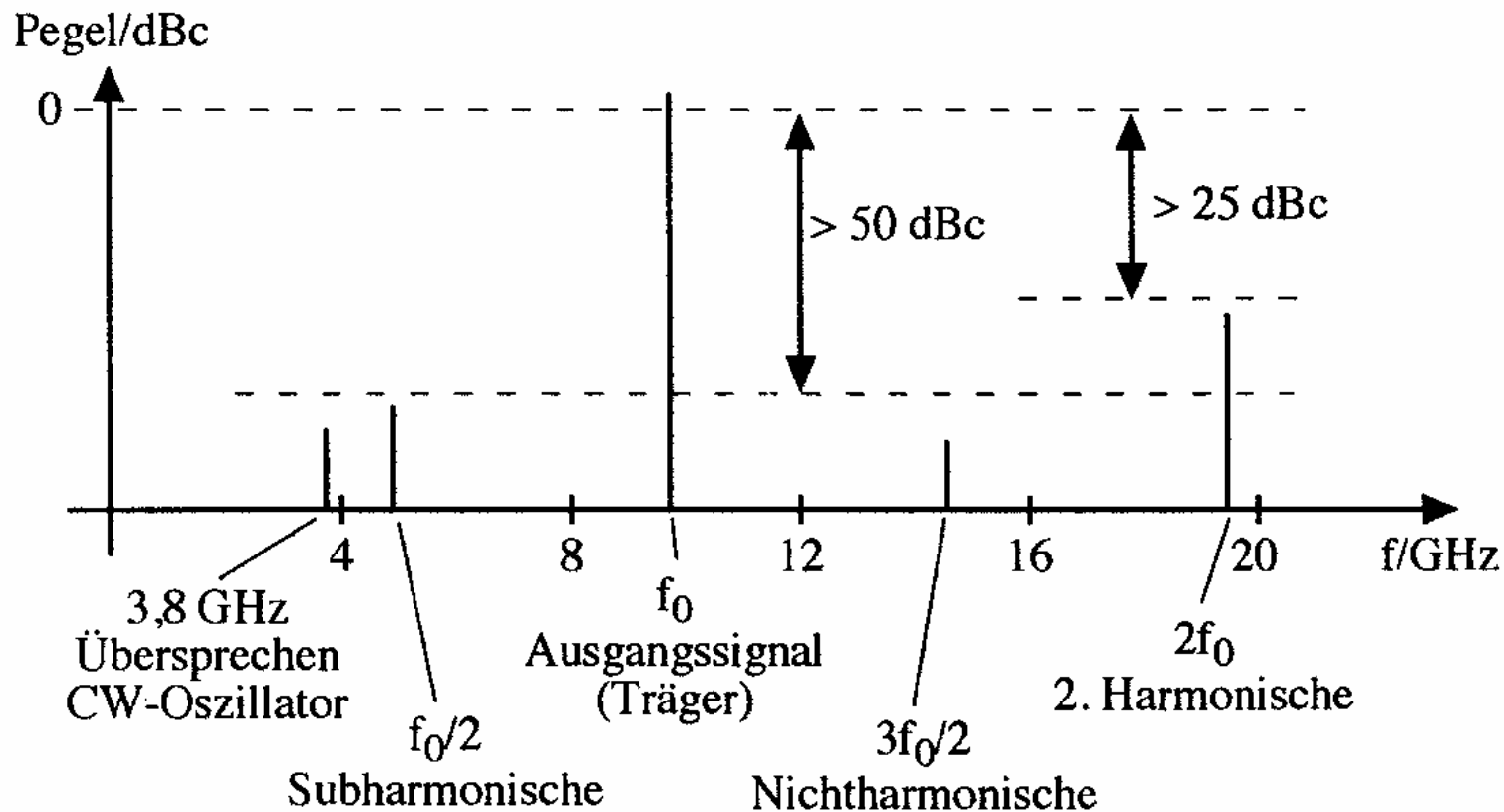
# Klassifikation von Messgeneratoren

	freilaufend	synthetisiert
festfrequent	Signalgenerator	Synthesegenerator
wobbelbar	Wobbelgenerator	wobbelbarer Synthesizer

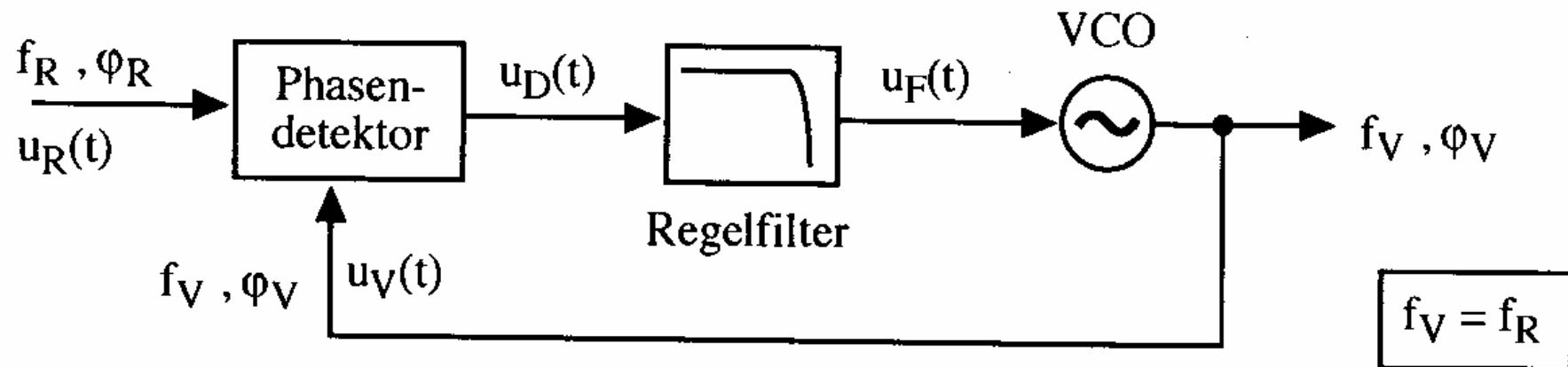
# Wobbelmessplatz



# Ausgangsspektrum eines Wobblers



# Phasenregelschleife (PLL)

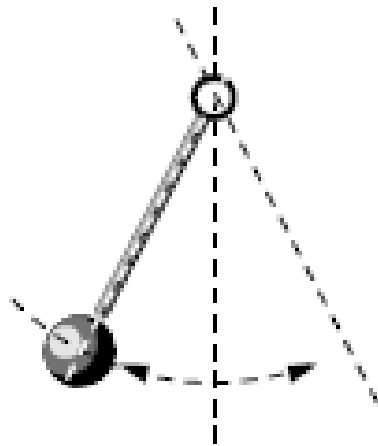




# Zeit, Frequenz, Phase

- Allgemeine Zusammenhänge
- Frequenz
- **Zeitmessung**
- Phase

# What is a Clock? An Oscillator + a Counter

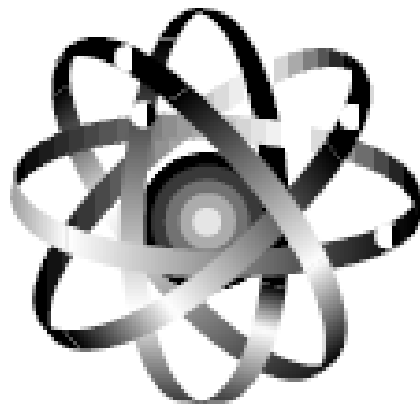


Oscillator  
(Frequency Device)

+



Counter  
(Counts Periodic Events)

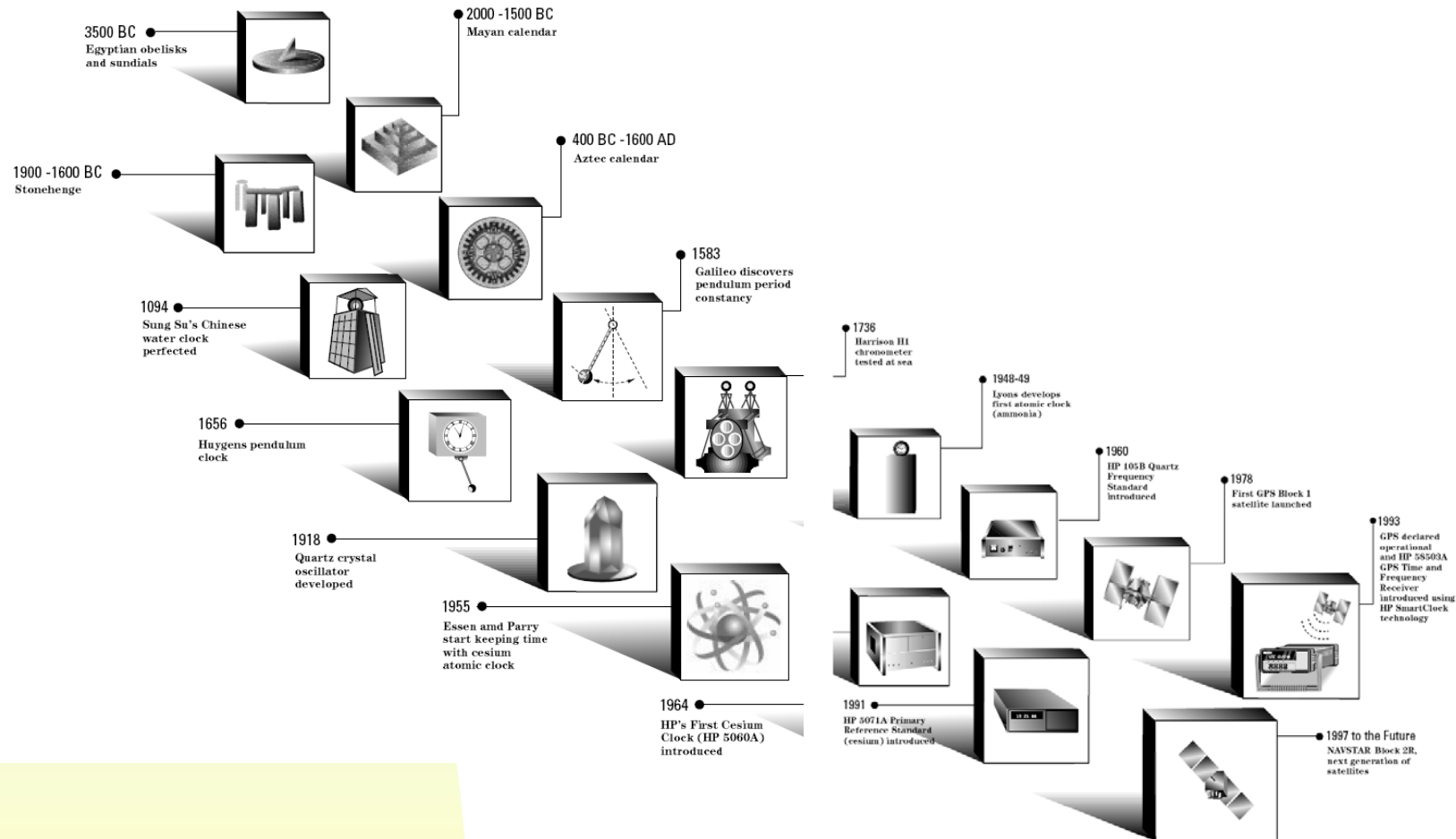


Cs - 133 Atom

+

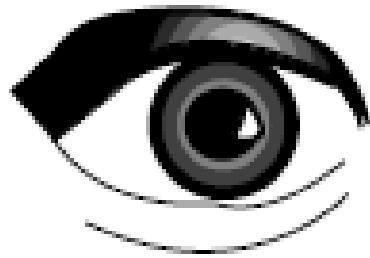
Fast Electronic Counter

# Historische Entwicklung

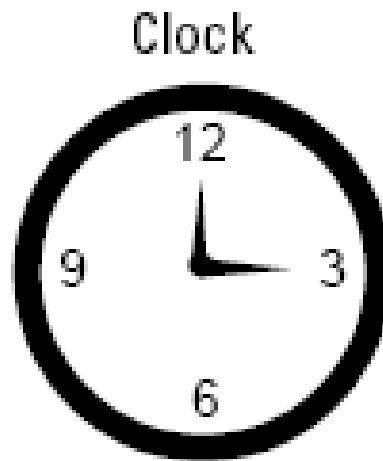




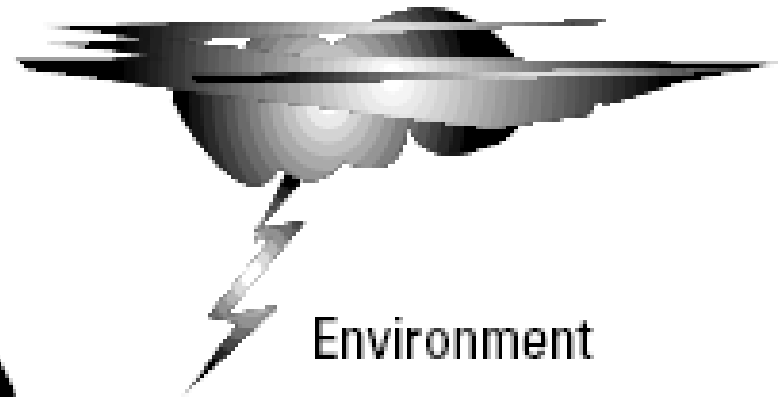
# Perceived Cause of Clock Deviations



Measurement



Clock



Environment

**Perceived Performance =**

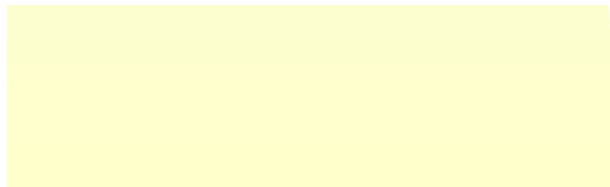
Measurement  
Noise

+

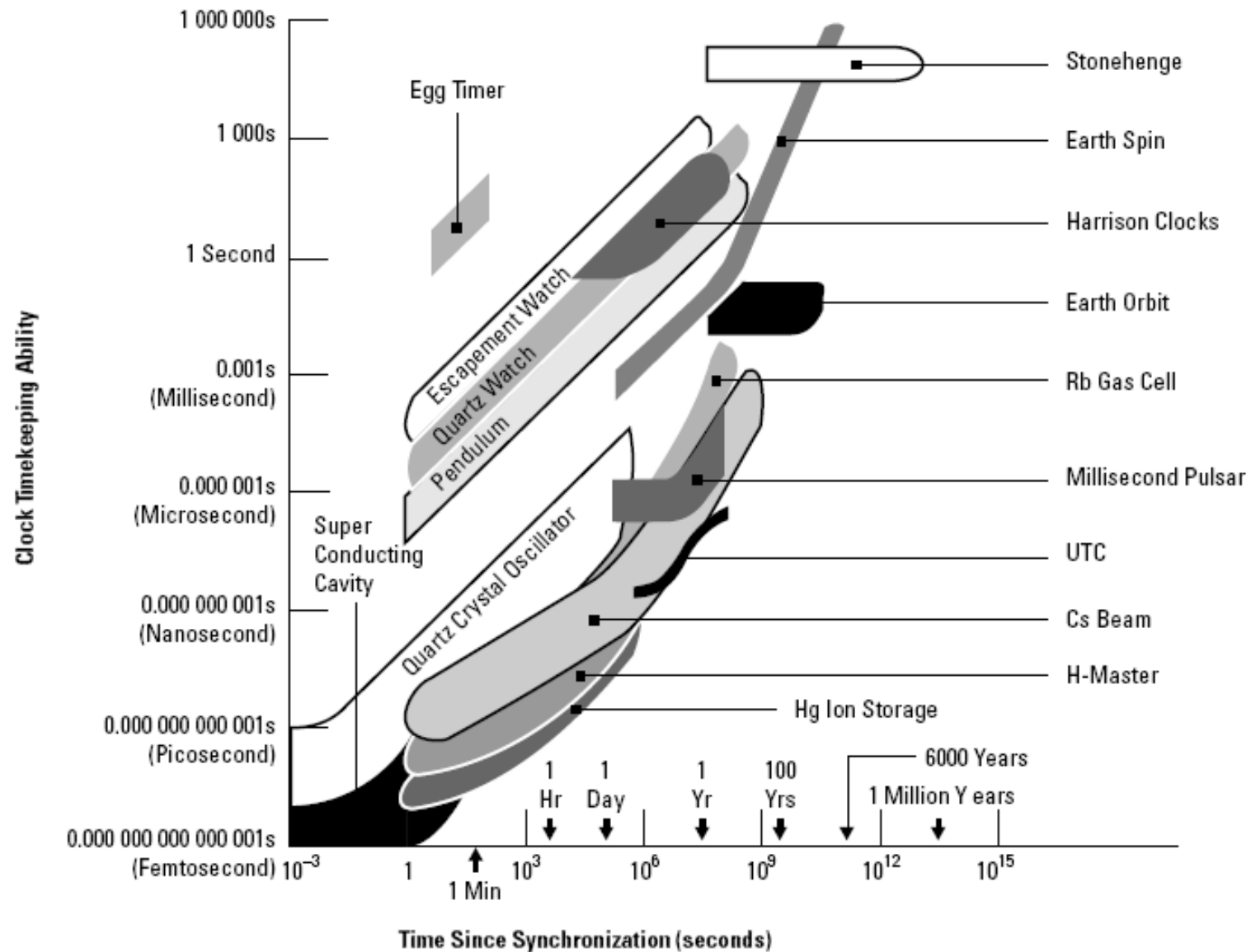
Random and Systematic  
Errors within Clock

+

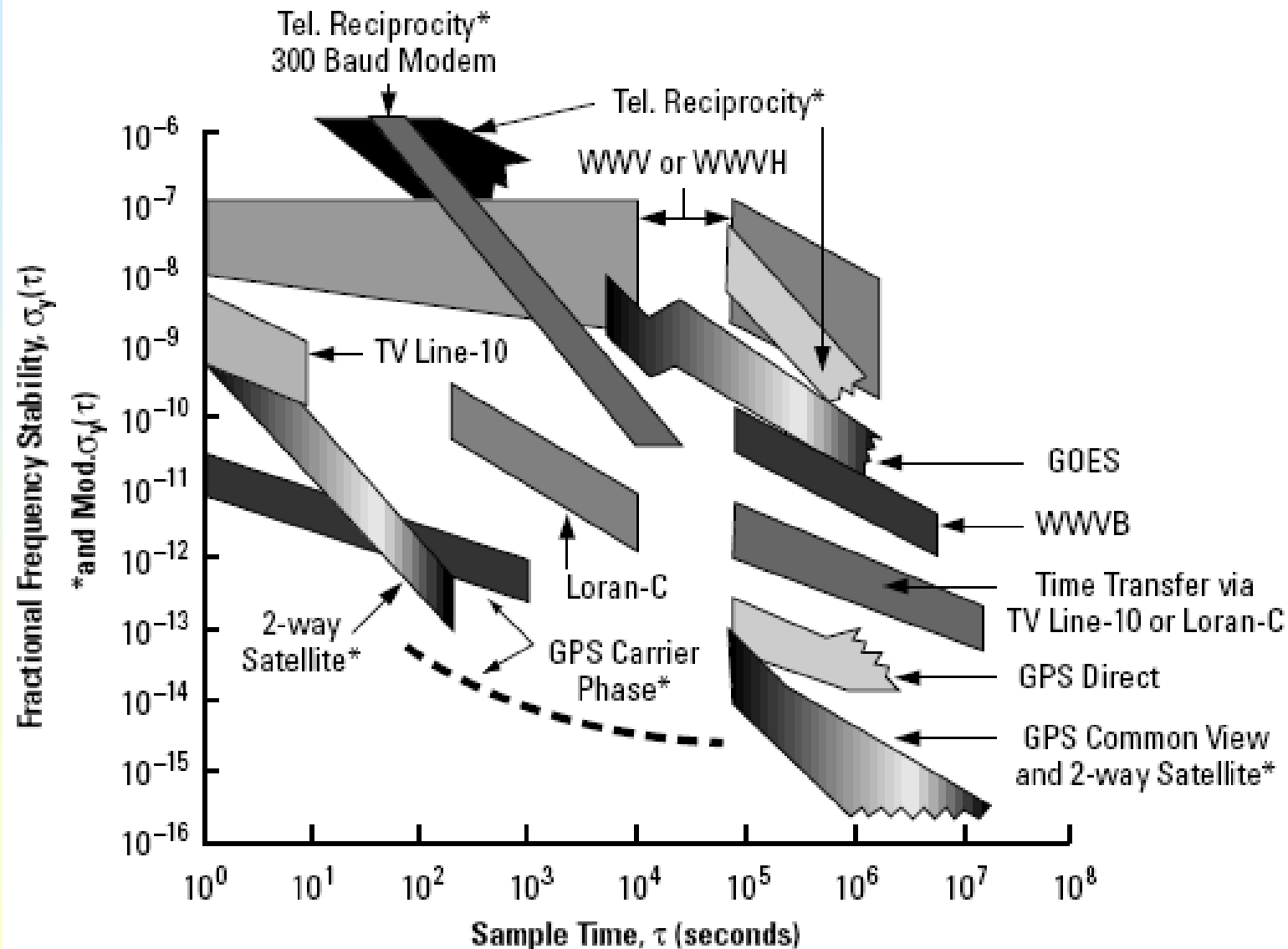
Environmental  
Perturbations



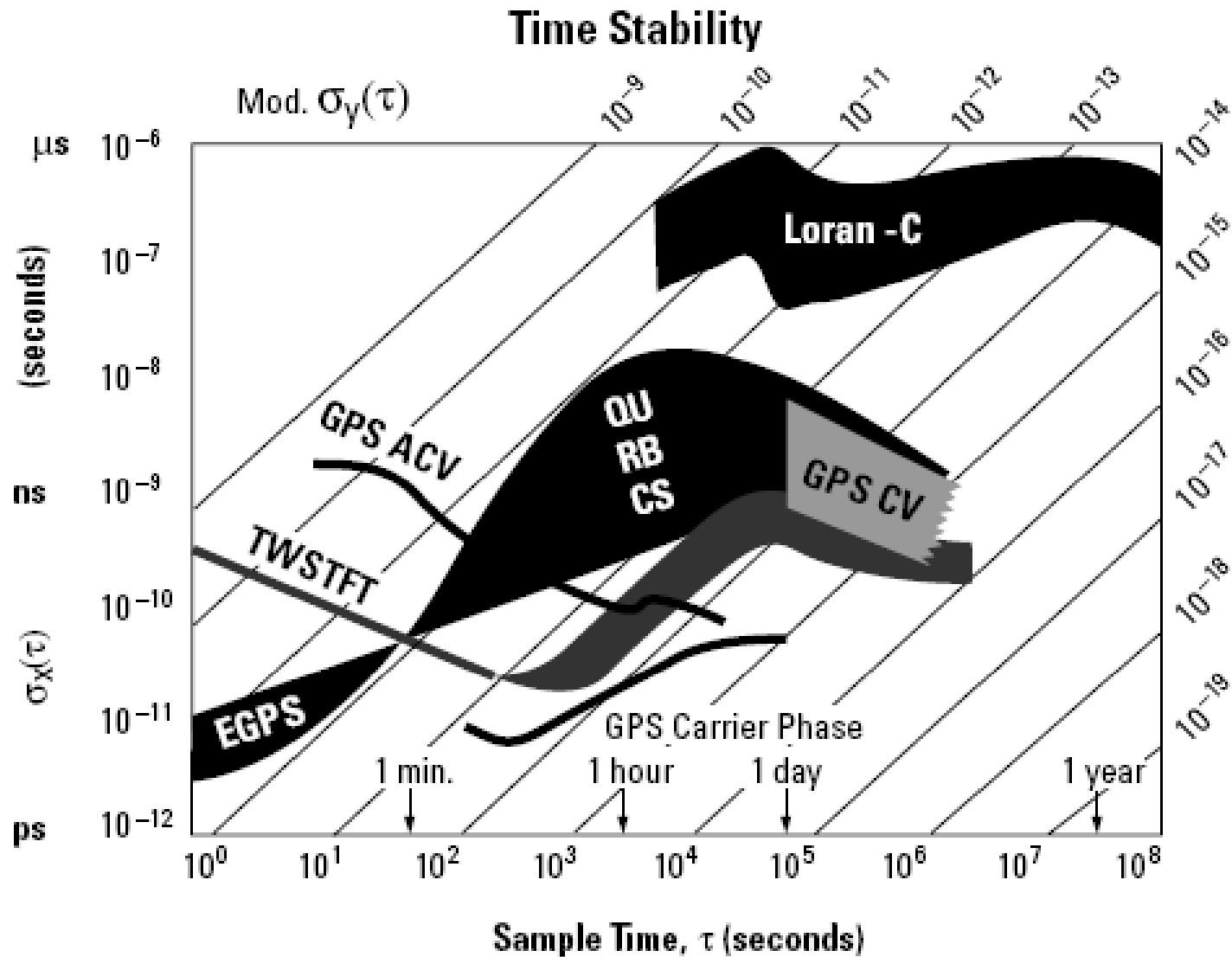
# Vergleich von Zeit-“normalen“



# Frequenzinstabilität traditionell verwendeter Zeit-“geber“

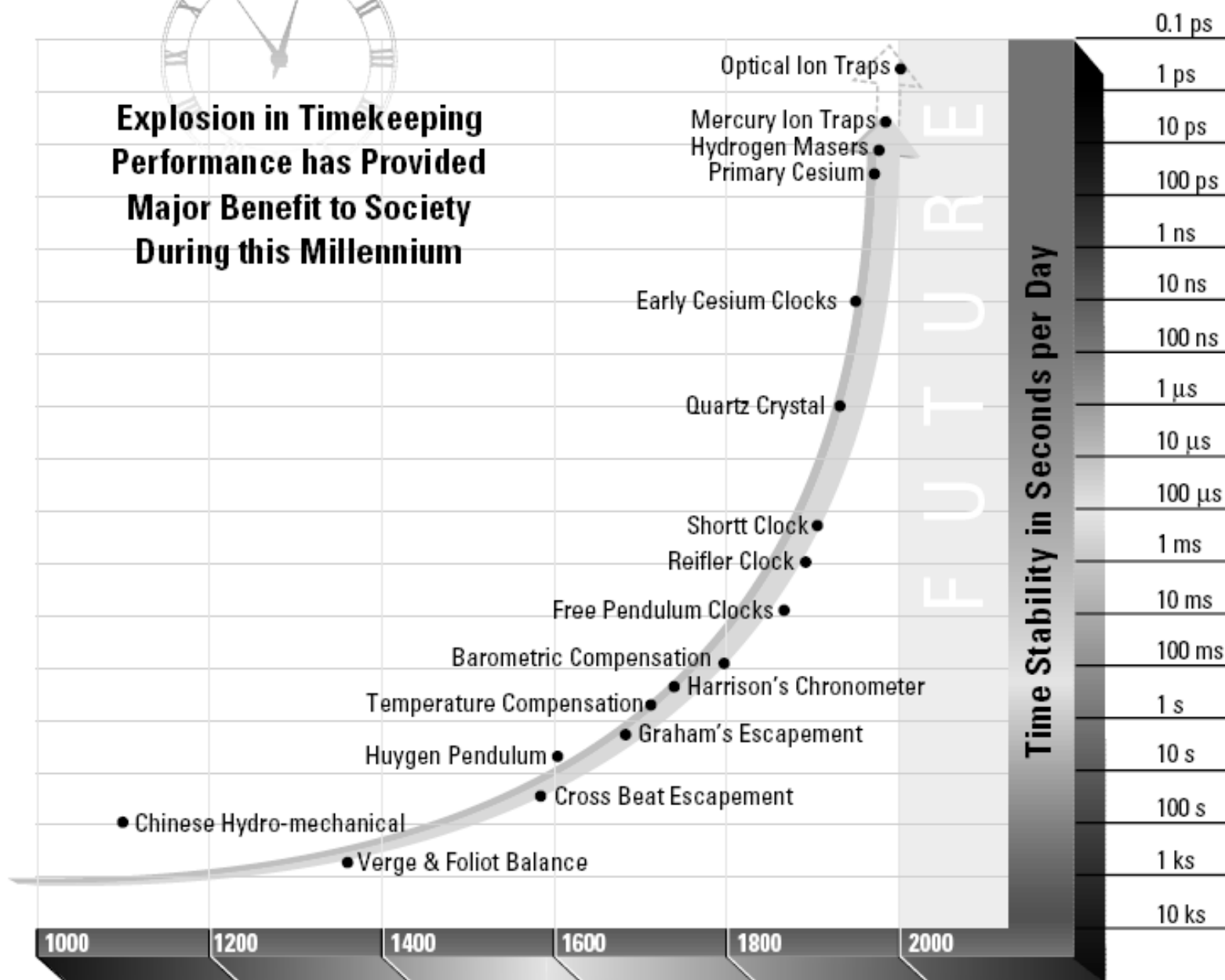


# Stabilität von Zeitnormalen



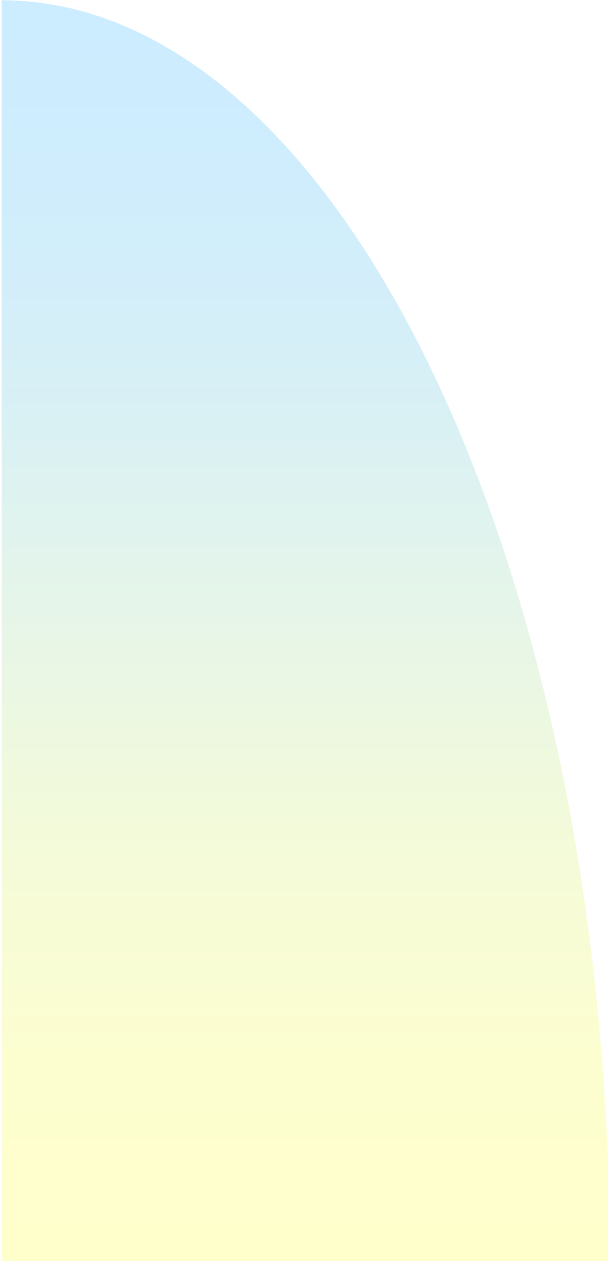


**Explosion in Timekeeping  
Performance has Provided  
Major Benefit to Society  
During this Millennium**

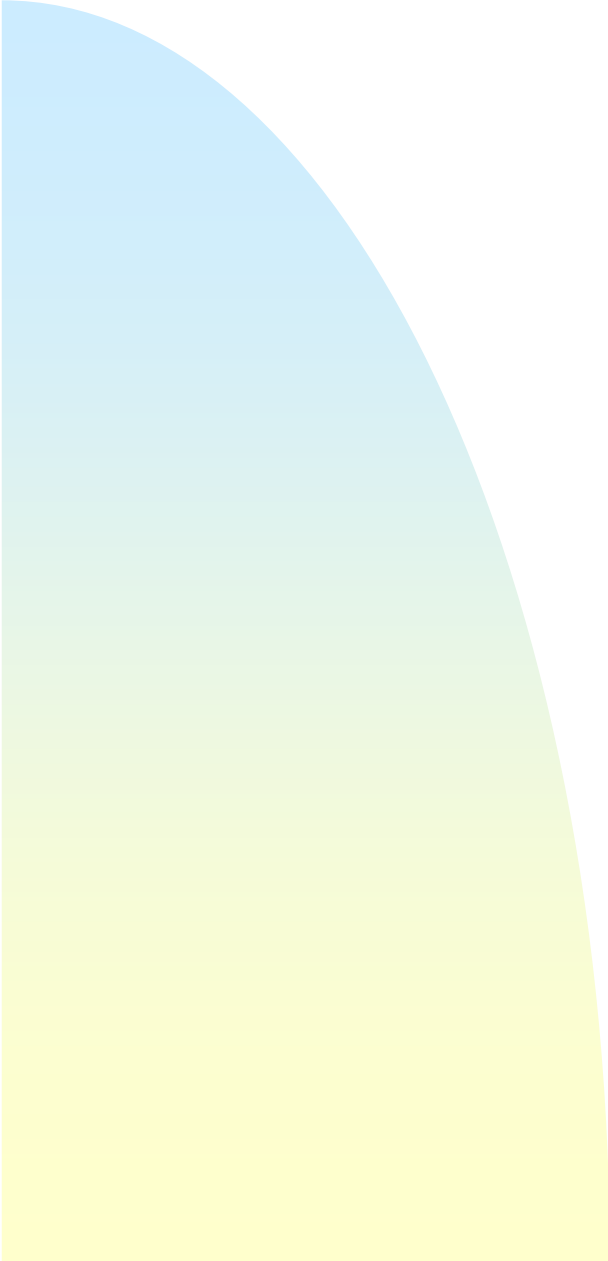


**Year - A.D.**

# Unsicherheit der Zeitdarstellung bzw. Zeitmessung

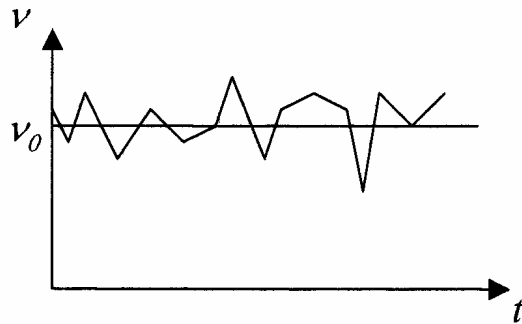
- 
- A decorative vertical bar on the left side of the slide, featuring a smooth gradient from light blue at the top to light yellow at the bottom, with a curved right edge.
- Statistische Behandlung von Messunsicherheiten
  - GAUß – Verteilung der Messwerte
  - GAUß'sches Gesetz der Fortpflanzung von Unsicherheiten

# Unsicherheit der Zeitdarstellung bzw. Zeitmessung

- 
- Statistische Behandlung von Messunsicherheiten
  - GAUß – Verteilung der Messwerte
  - GAUß'sches Gesetz der Fortpflanzung von Unsicherheiten
  - Ist dieses statistische Handwerkszeug geeignet?

# Maß für Beschreibung der Unsicherheit

Normalerweise: Standardabweichung



$$\sigma_v^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{k=1}^N (v_k - v_0)^2$$

Kein relatives Maß und  
nur sinnvoll, wenn  $v_0 = \text{const.}$

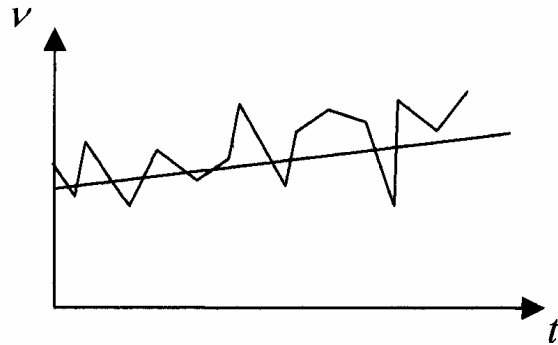




# ALLAN – Varianz

David W. ALLAN

Angepaßt an das Problem: Allan-Varianz

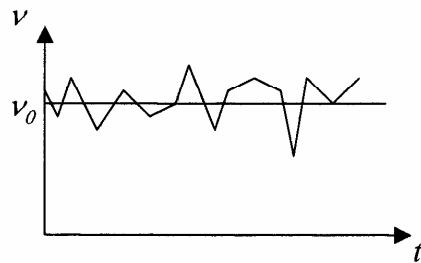


$$\sigma^2(\tau, N) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\nu_0 \tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} \nu_{\text{Messung}}(t) dt$$

# ALLAN - Varianz

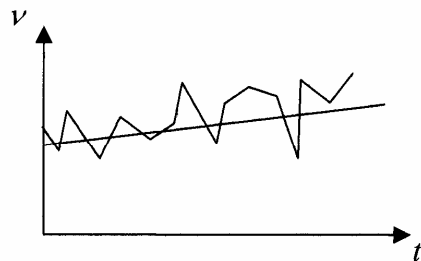
Normalerweise: Standardabweichung



$$\sigma_v^2 = \frac{1}{(N-1)} \sum_{k=1}^N (\nu_k - \nu_0)^2$$

Kein relatives Maß und  
nur sinnvoll, wenn  $\nu_0 = \text{const.}$

Angepaßt an das Problem: Allan-Varianz



$$\sigma^2(\tau, N) = \frac{1}{2(N-1)} \sum_{k=1}^{N-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2$$

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\nu_0 \tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} \nu_{\text{Messung}}(t) dt$$

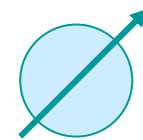
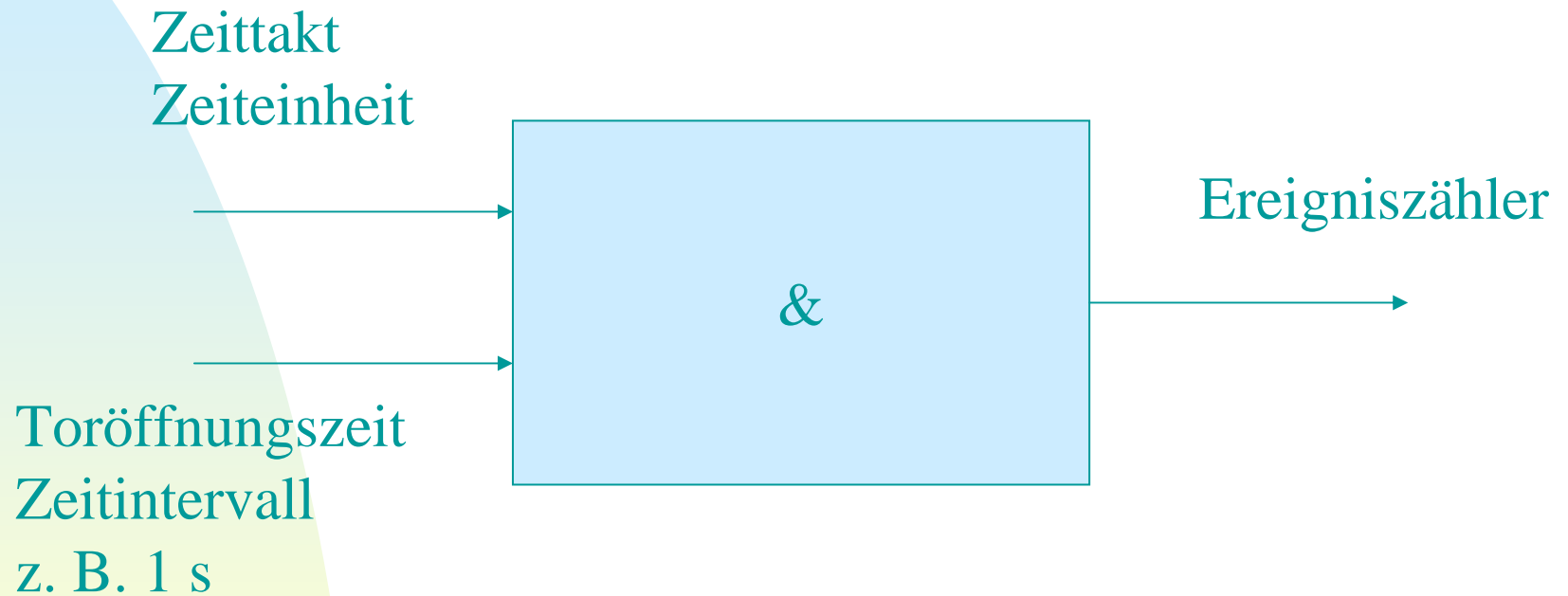
Die Allan-Varianz ist das quadratische Mittel der durch zwei Vergleichsmessungen der Zeitdauer  $\tau$  gewonnenen relativen Abweichungen von der Ausgangsfrequenz.

# Erläuterung

Die Allan-Varianz ist das quadratische Mittel der durch zwei Vergleichsmessungen der Zeitdauer  $\tau$  gewonnenen relativen Abweichungen von der Ausgangsfrequenz.

Die Allan-Varianz wird auf kurzen Zeitskalen durch statistisches Rauschen (in hochpräzisen modernen Frequenzstandards ist dies das Quantenrauschen) bestimmt. Auf längeren Zeitskalen kommen unkontrollierte statistische Drifts zum Tragen, die die ultimativ erreichbare Stabilität limitieren.

# Zeitmessung





# Uhrzeit

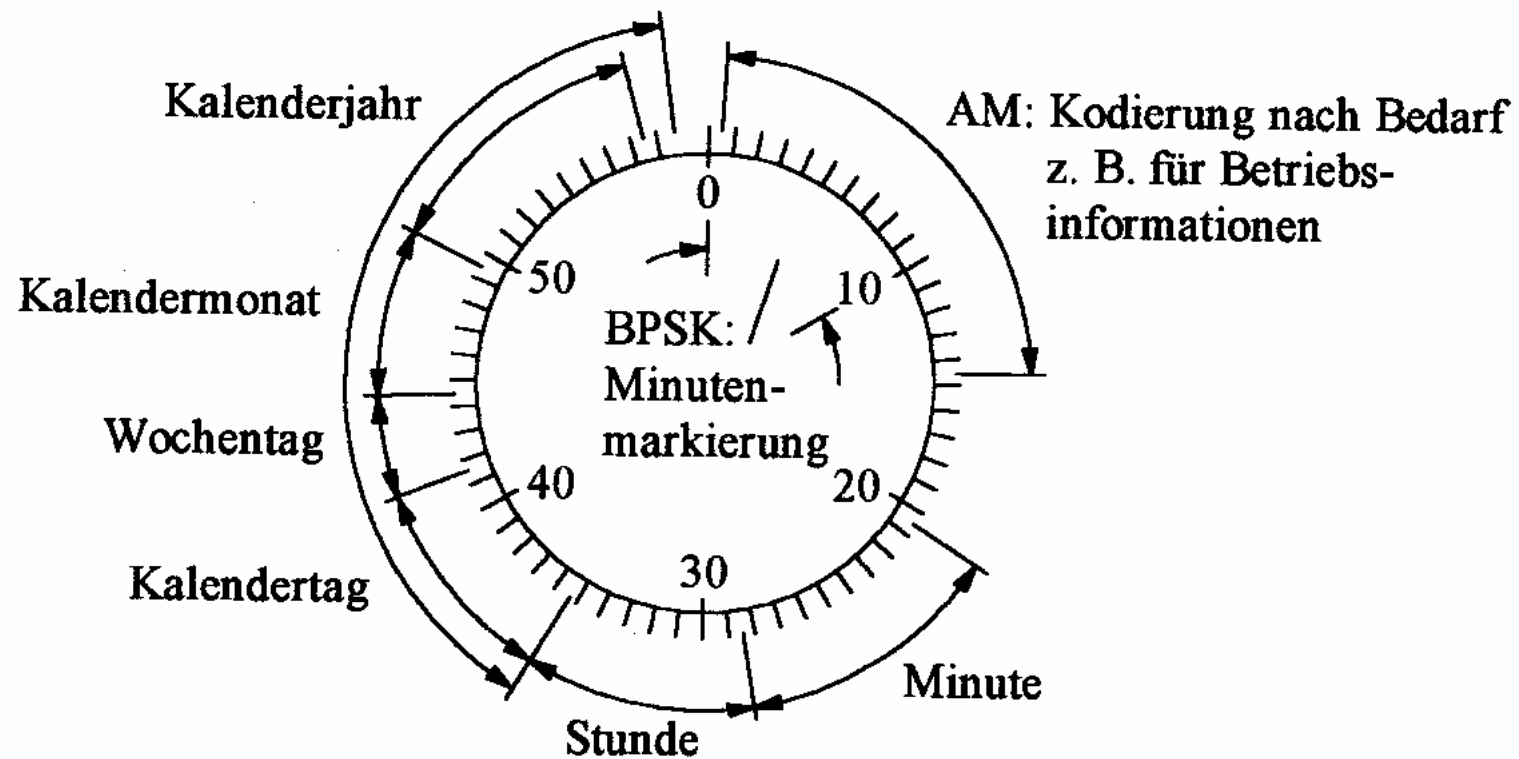
- Darstellung / Codierung in s, min, h
- 24 h/d
- 60 min/h
- 60 s/min
  
- Pendeluhren, Uhren mit Unruh
- Quarzuhren
- Funkuhren



# DCF - 77

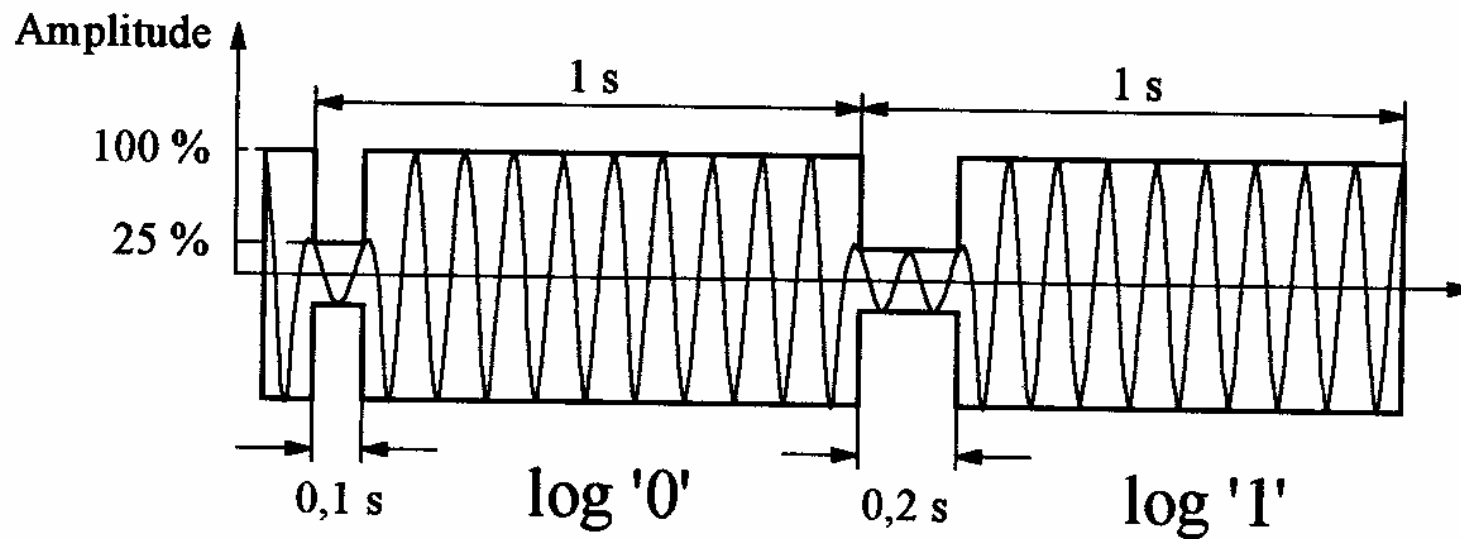
- Mainflingen bei Frankfurt / Main
- 50° 01' N, 09° 00' E
- Abgestrahlte Leistung 27 kW
- Frequenz und Zeit werden von der PTB Braunschweig besser als  $10^{-12}$  bereitgestellt

# Zeitzeichensender DCF-77 Minutenprotokoll



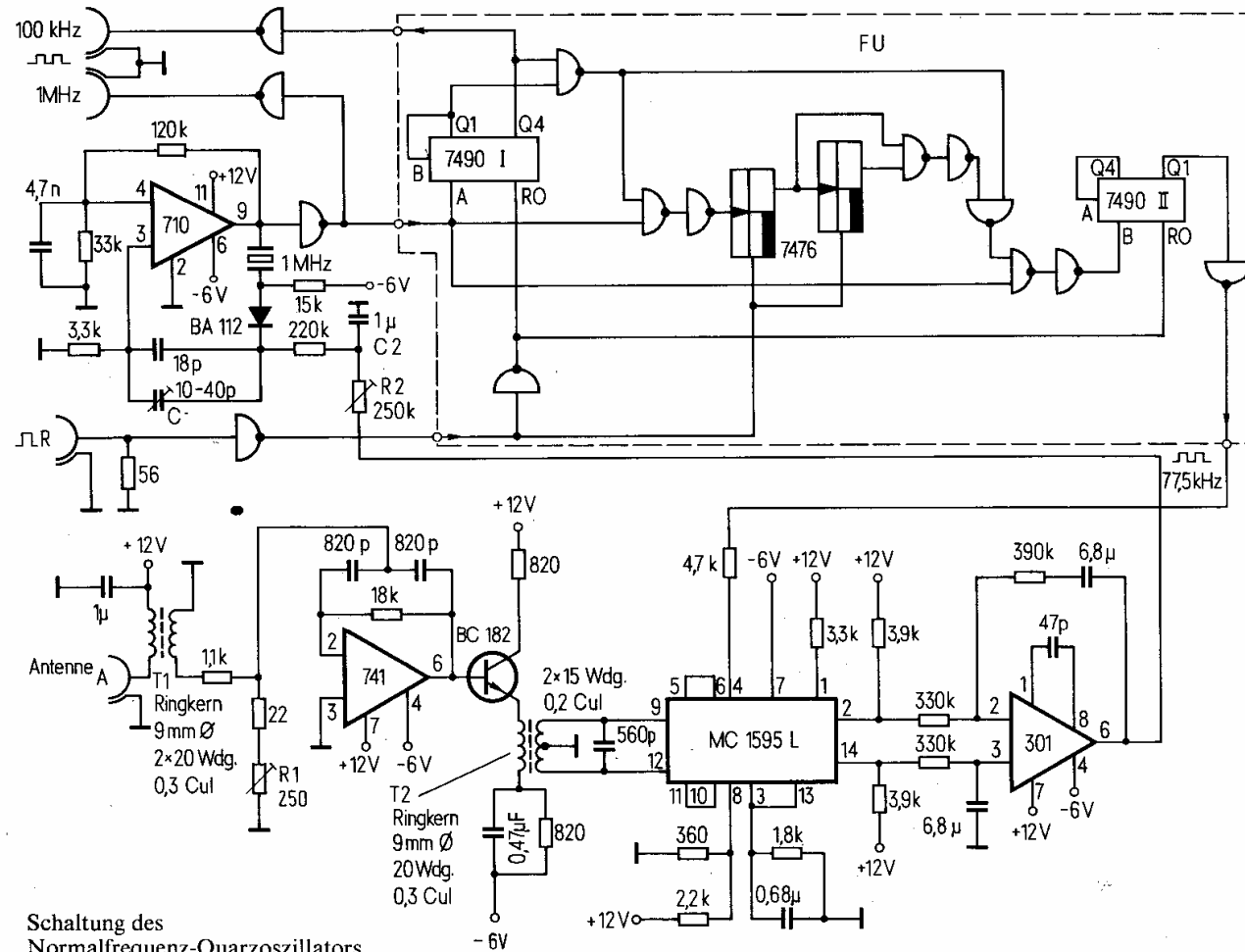
# DCF-77: Modulation

## logische '0', logische '1'





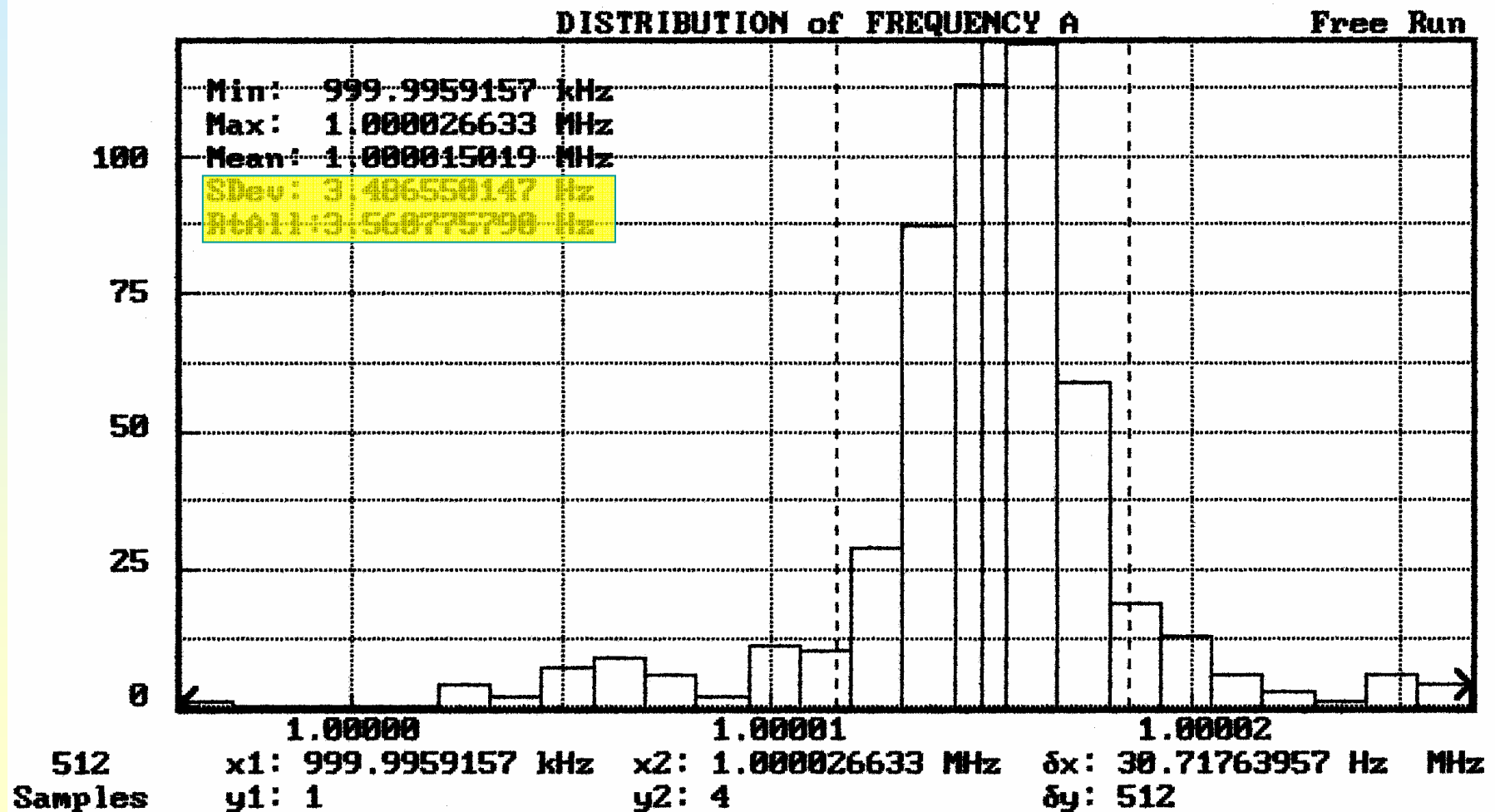
# DCF - gesteuerter VCO nach BECKER und ROHBECK



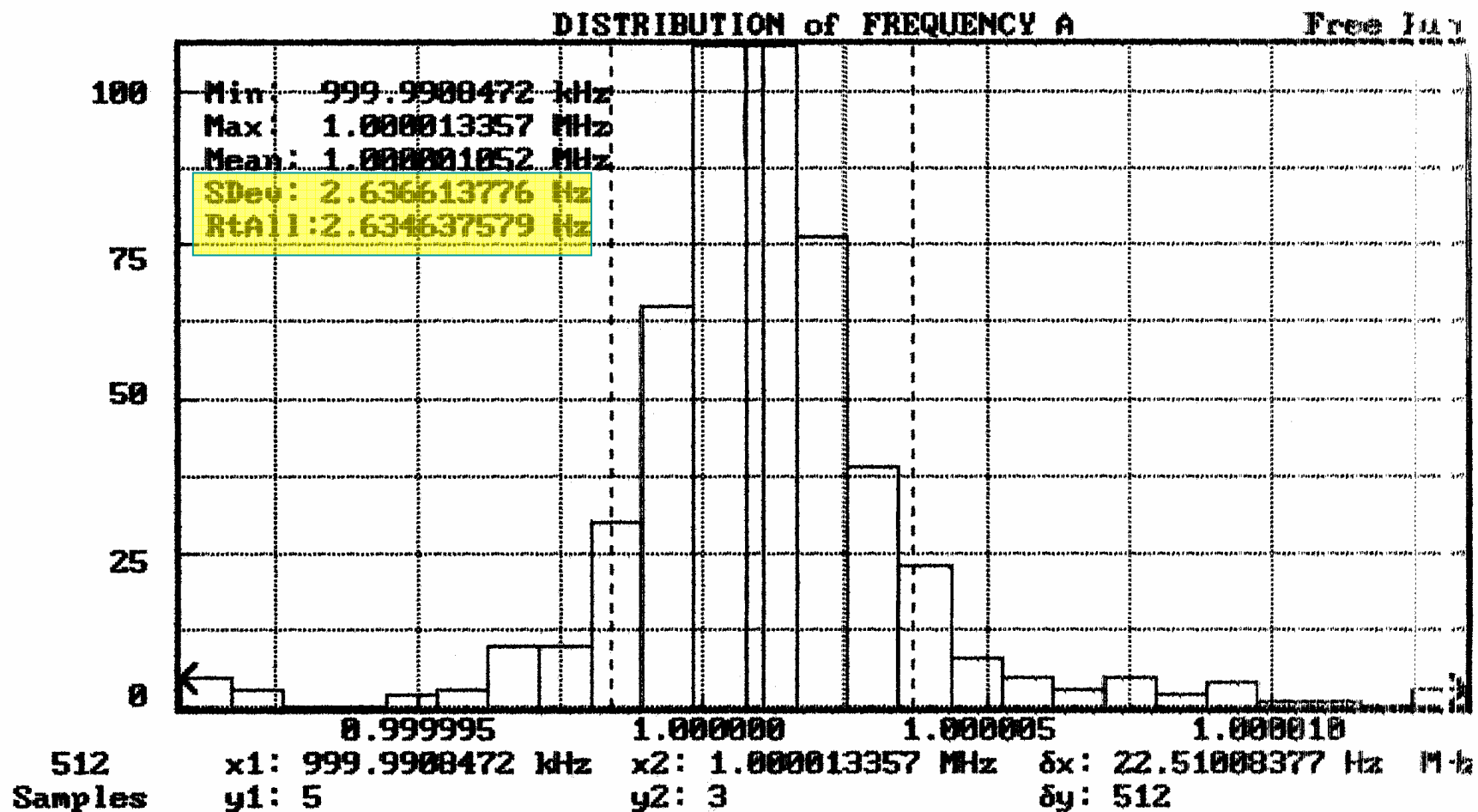
# DCF - gesteuerter VCO nach BECKER und ROHBECK

Meßzeit t s	Standardabweichung $10^{-10}$	$\sigma_{\Delta f/f}$
1	70	
2	40	
5	16	
10	9	
20	6	
50	3,5	
100	2,6	
500	1,0	
1000	0,7	

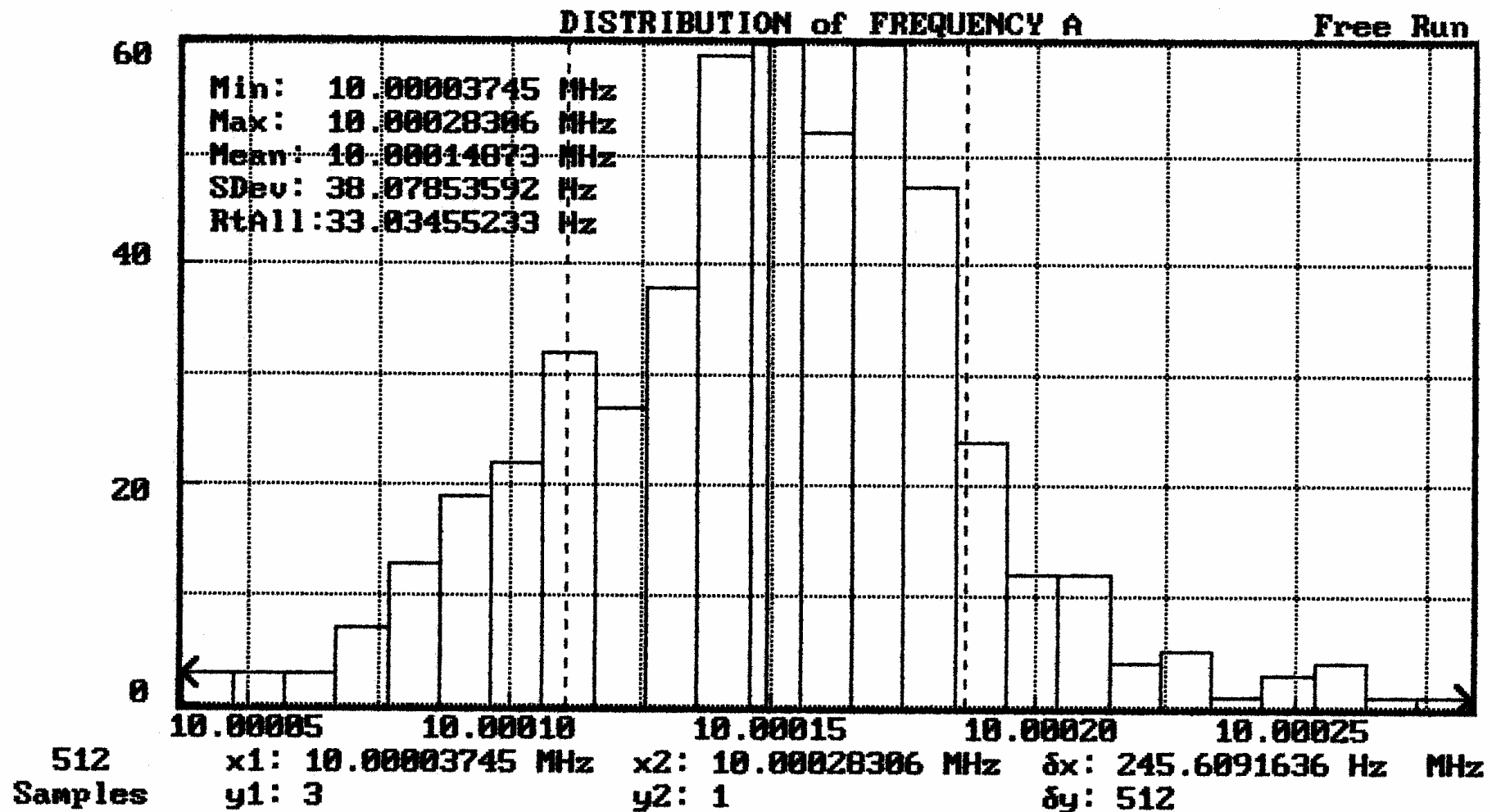
# Messergebnisse: Freilaufender VCO



# Messergebnisse: Gerasteter VCO Phasenstarre Anbindung an DCF -77

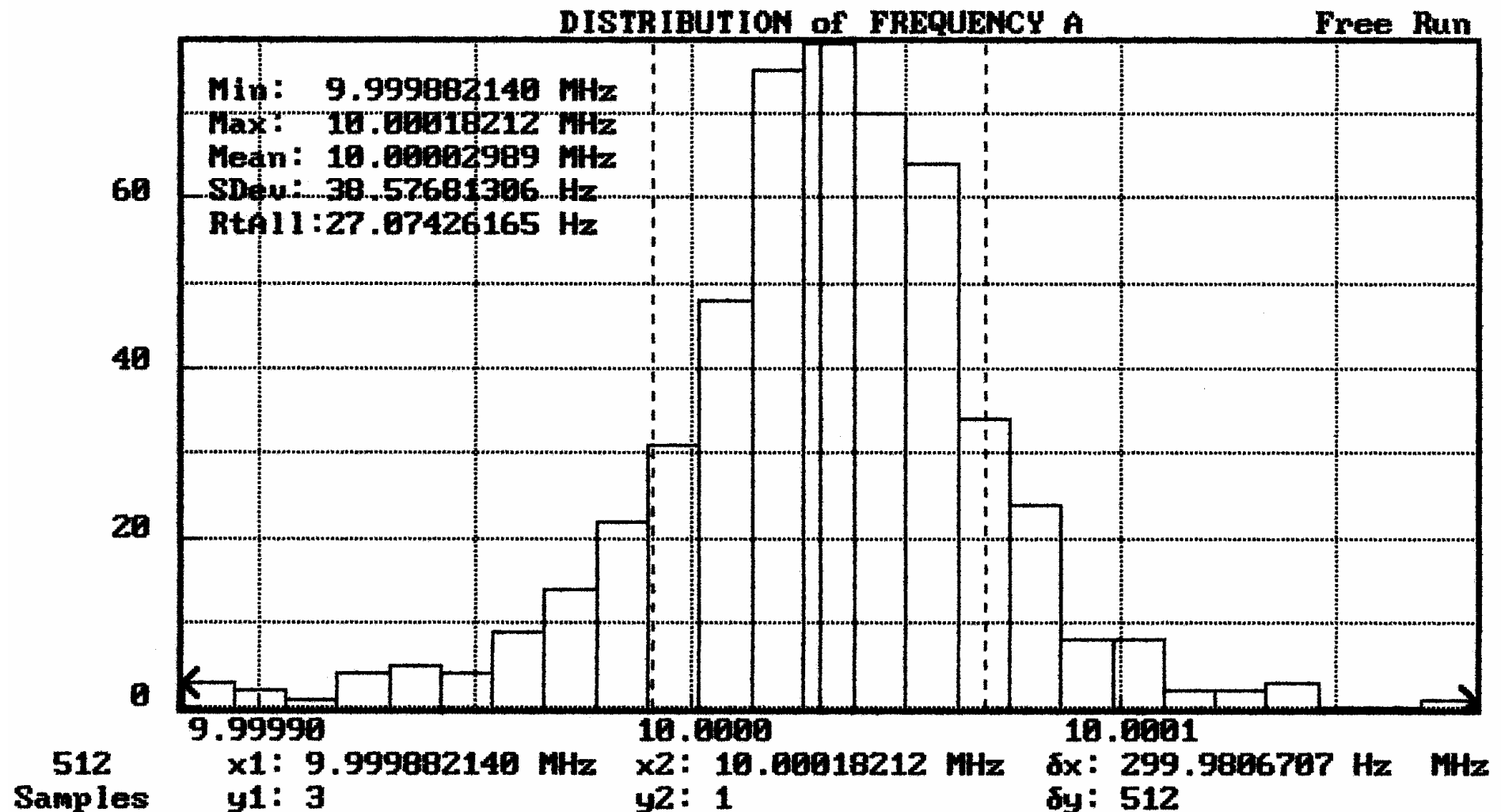


# Messergebnisse: Freilaufender VCO

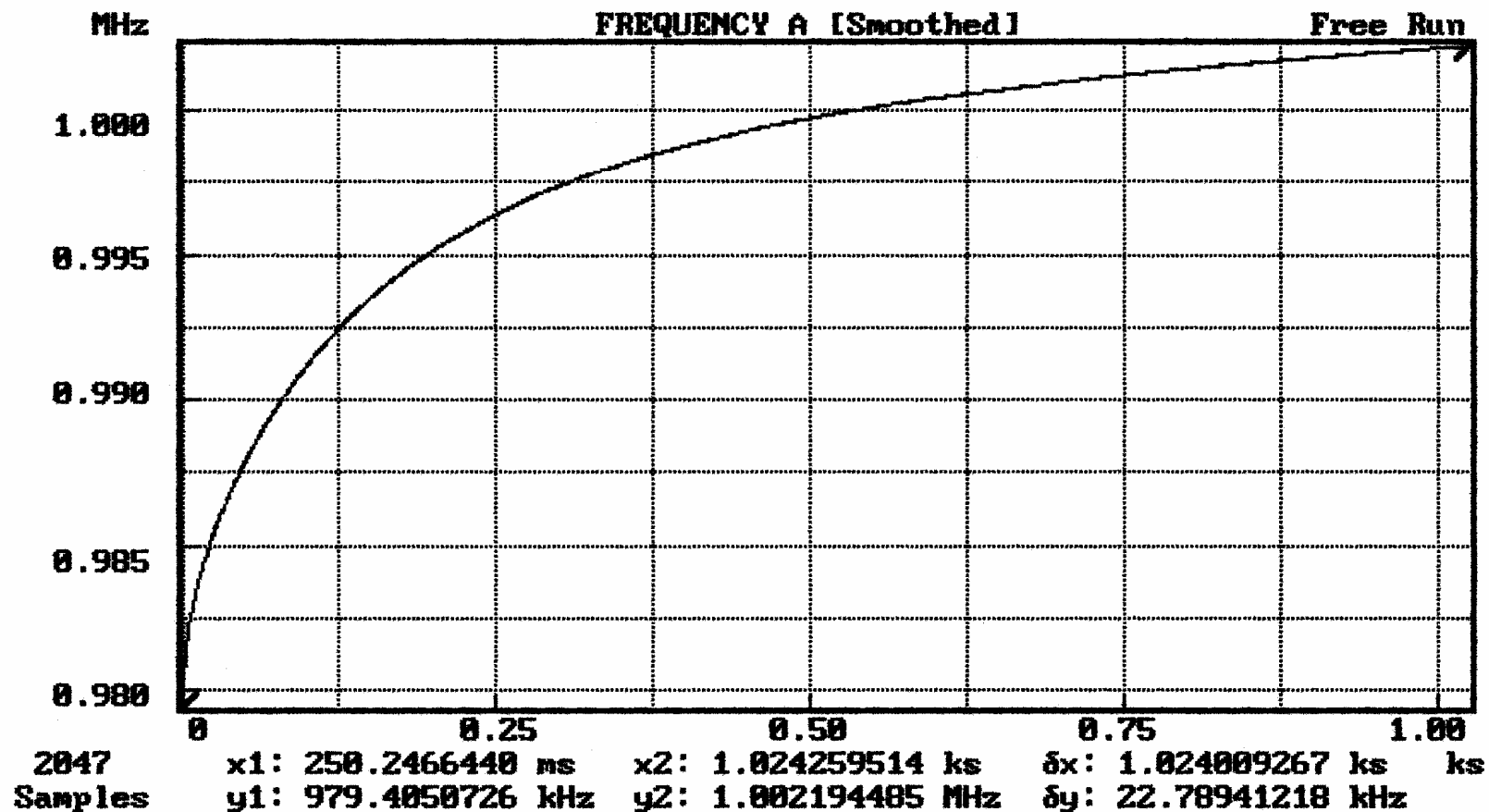


# Messergebnisse: Gerasteter VCO

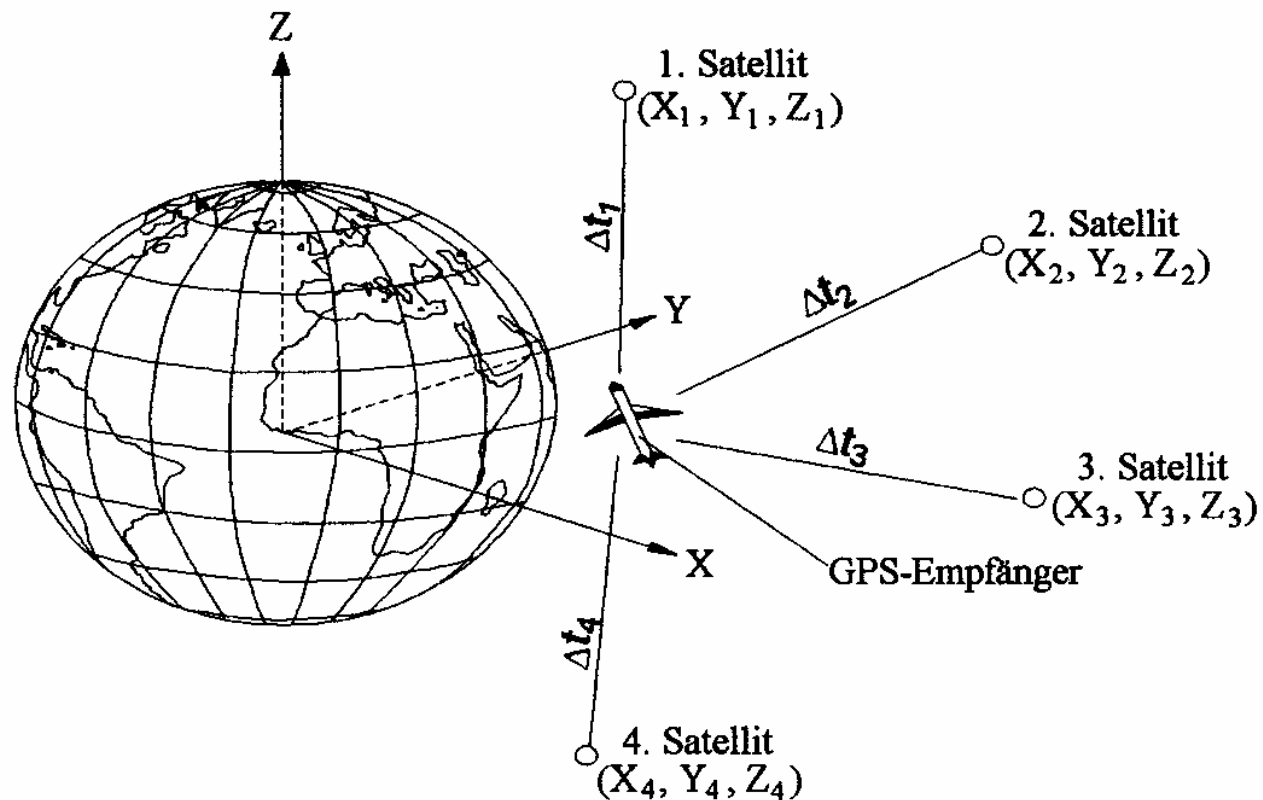
## Phasenstarre Anbindung an DCF - 77



# Drift (Einlaufkurve) eines einfachen Generators (PM 5705)



# Global Positioning System GPS







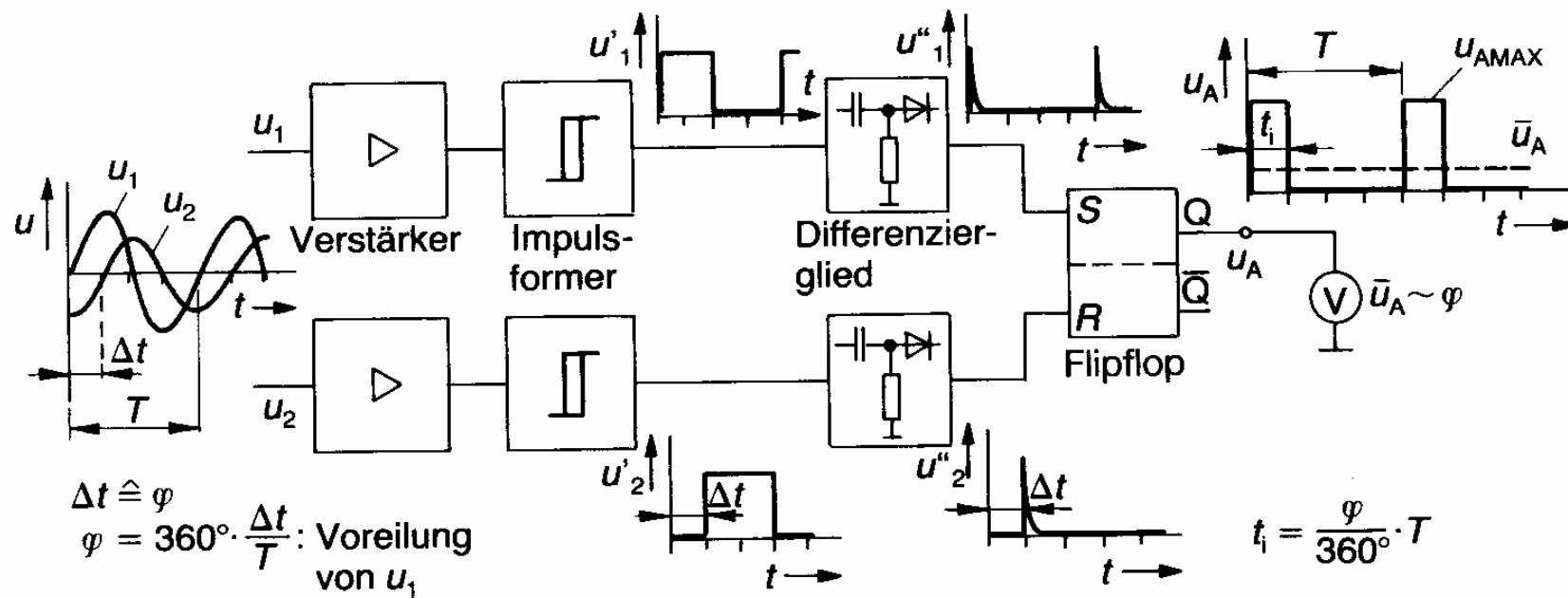
# Zeit, Frequenz, Phase

- Allgemeine Zusammenhänge
- Frequenz
- Zeitmessung
- **Phasenmessung**

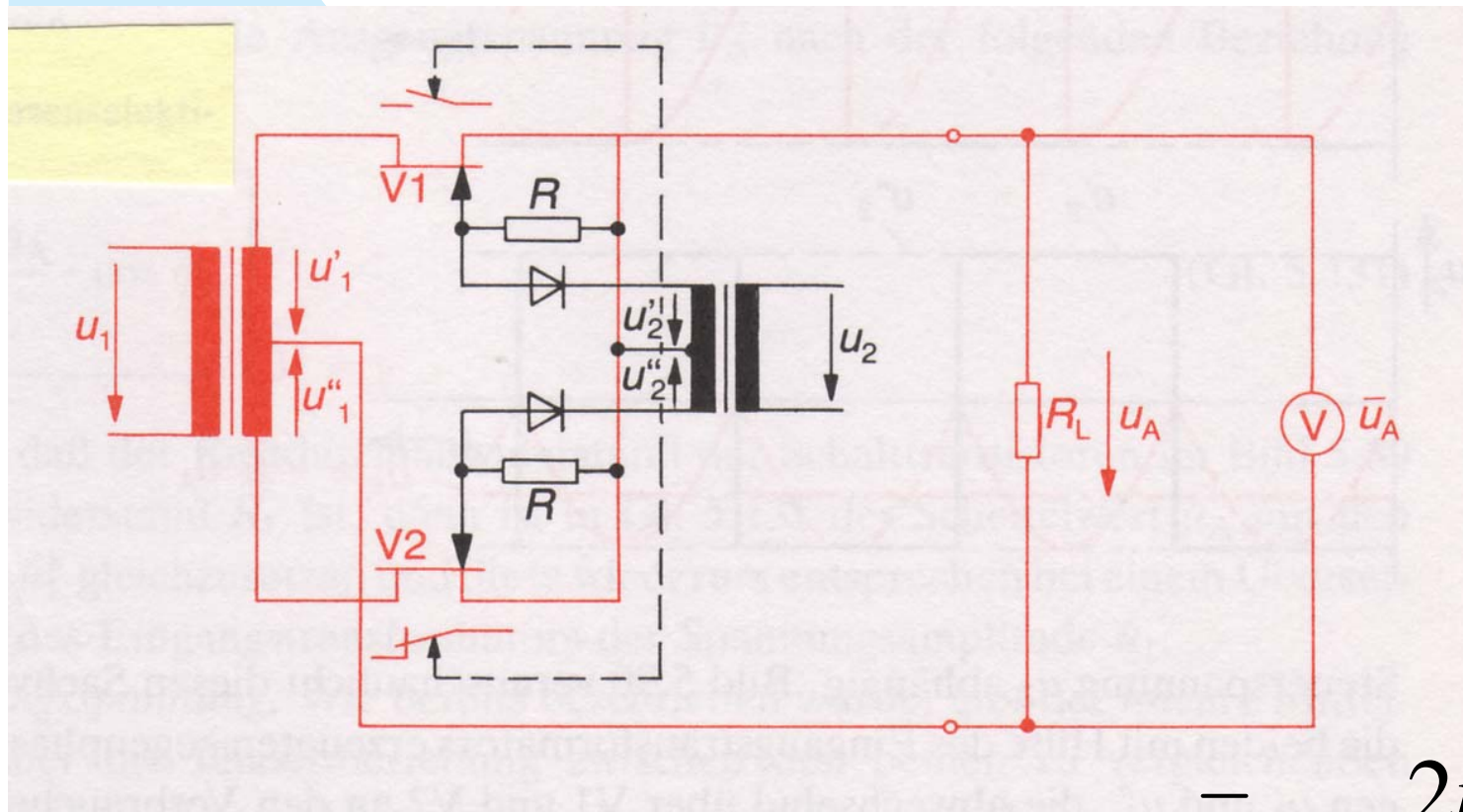
# Phasenwinkelmessung

- Phasenwinkel charakterisiert den Schwingungszustand einer periodischen Schwingung
- Messung mit Oszilloskop
  - ◆ LISSAJOUS-Figuren
  - ◆ Kalibrierte Zeitbasis
- $\varphi$  -  $t$  – Umformer
- Phasenempfindlicher Gleichrichter

# $\varphi$ - t - Umformer



# Phasenempfindlicher Geichrichter



$$\bar{u}_A = \frac{2\hat{u}_1}{\pi} \cdot \cos \varphi$$

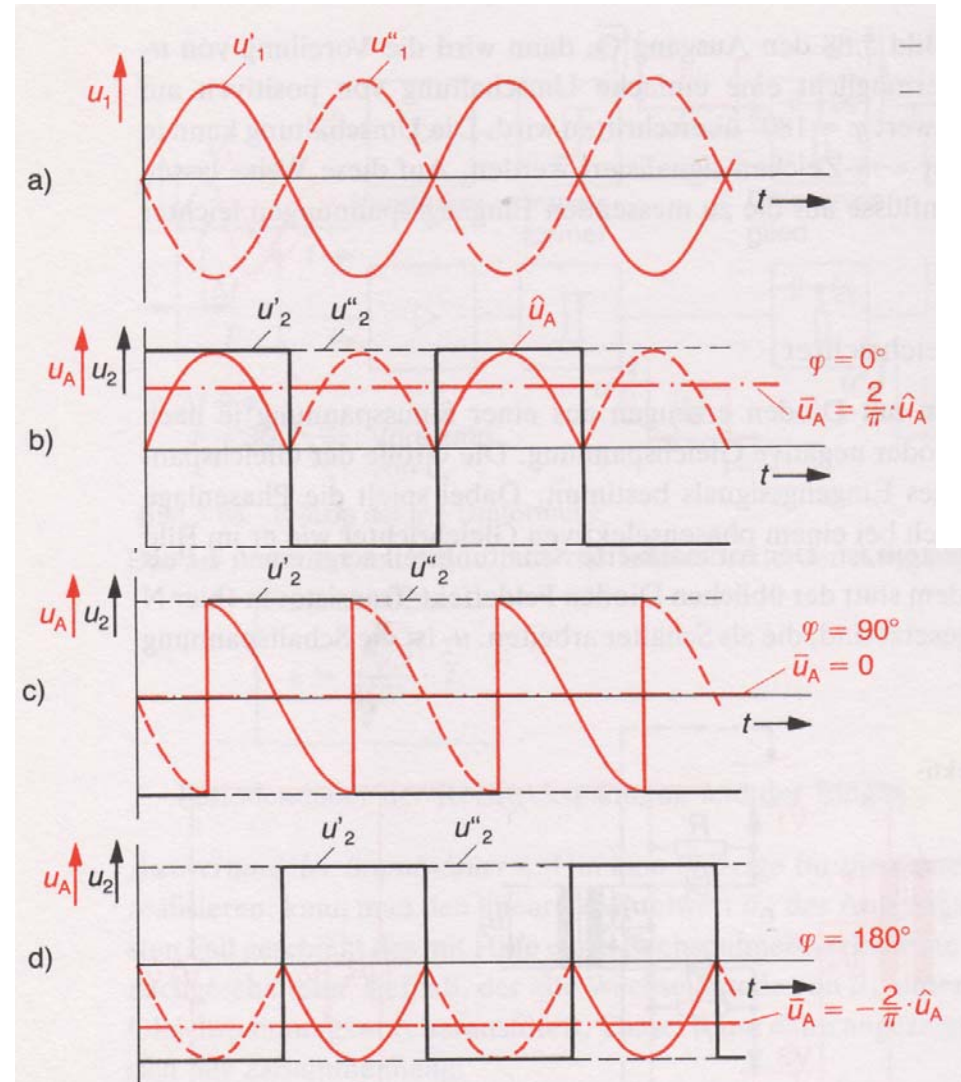
# Signalverläufe

Eingangsspannungen

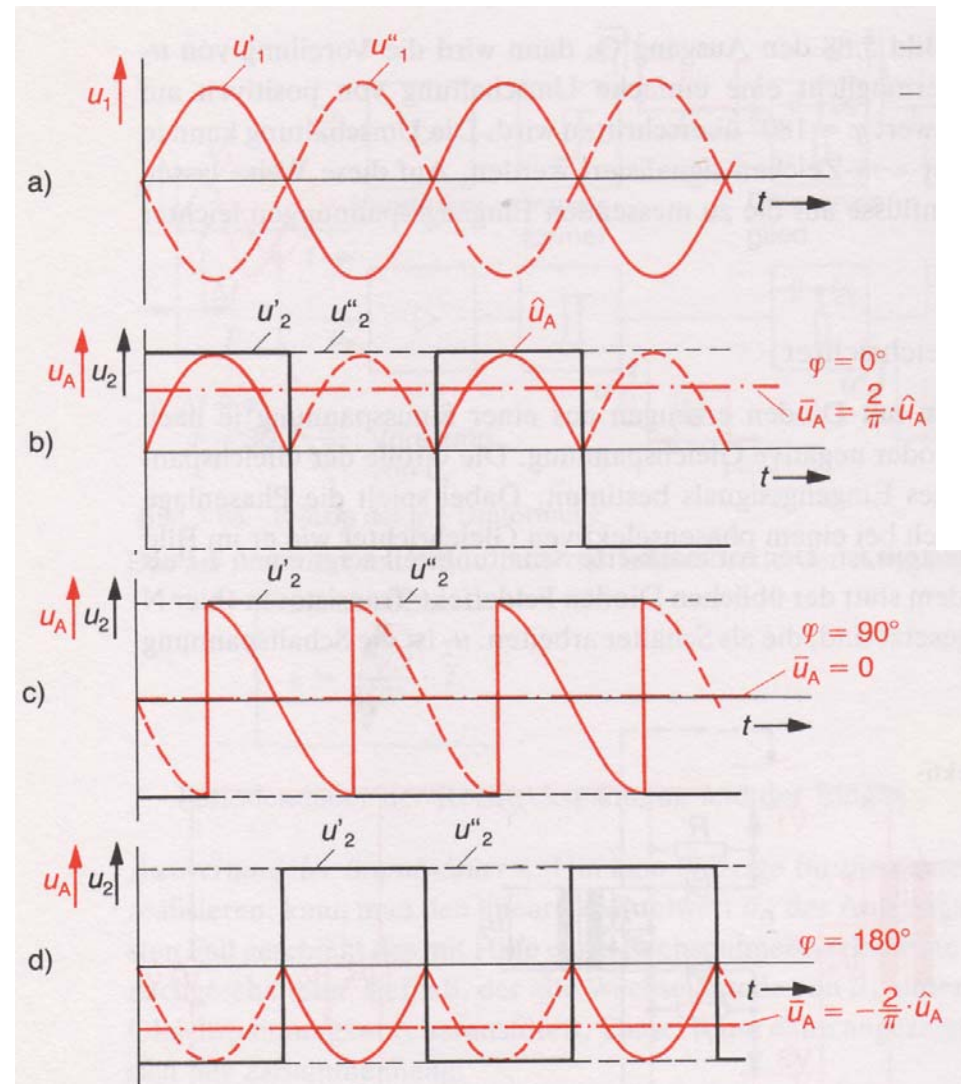
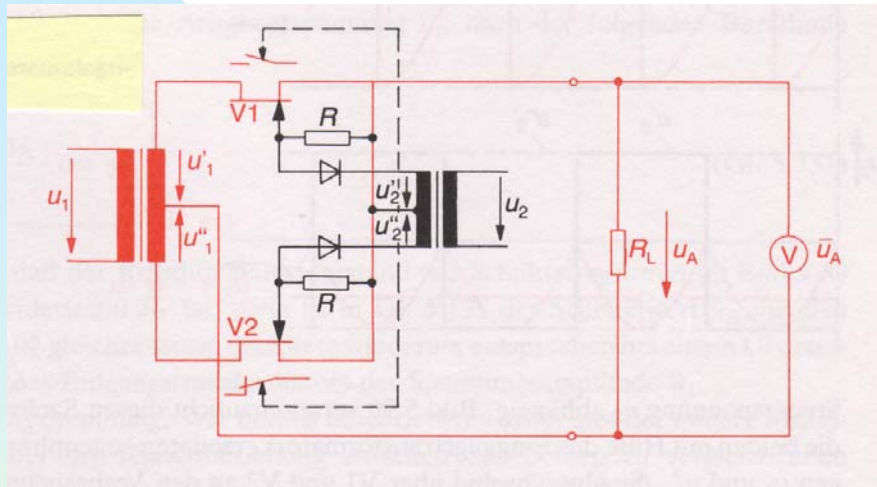
Eingangs- und Referenzspannung  
sind gleichphasig

90° Phasenverschiebung

Eingangs- und Referenzspannung  
sind gegenphasig (180°)



# Signalverläufe





# Spezielle Literatur

- hp AN 1289: The Science of Timekeeping