Verfahren zur Ermittlung von Messunsicherheiten und Angabe des vollständigen Messergebnisses

Material zur Vorlesung Messtechnik I

nach GUM

Version 1.0

Überblick

- Messunsicherheit, <u>nicht</u> Fehler
- ideales Verfahren sollte
  - allgemein anwendbar - universell
  - in sich konsistent
  - einfach
  - realistische Ansätze liefern
- Grundlage:
  - „GUM – Guide to the expression of Uncertainty in Measurement"
  - Leitfaden zur Angabe von Unsicherheiten beim Messen, DIN, 1. Auflage 1995, Beuth-Verlag

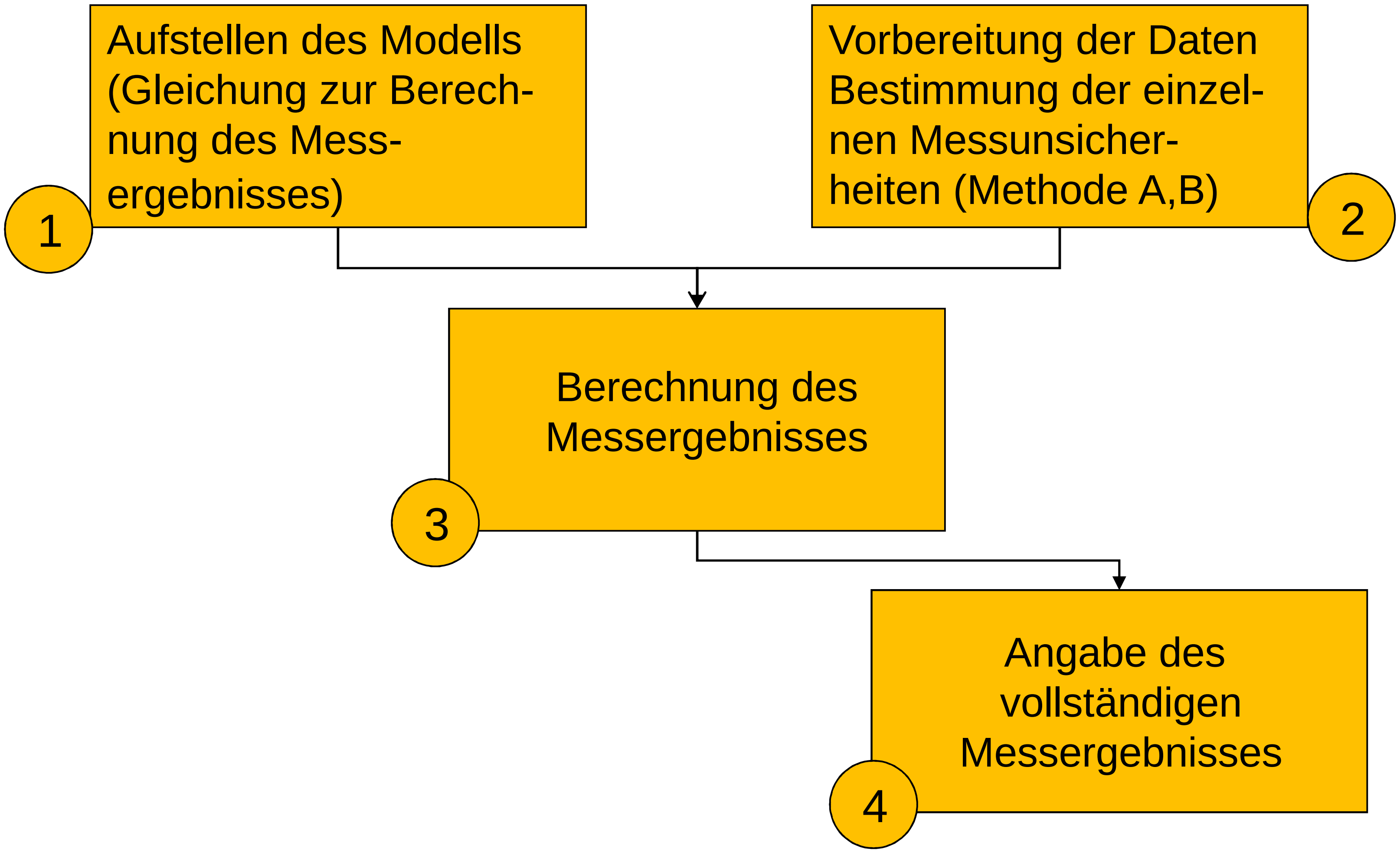
Definitionen

- Messunsicherheit:
  - Dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die vernünftiger Weise der Messgröße zugeordnet werden können.
- Standardunsicherheit:
  - Als Standardabweichung ausgedrückte Unsicherheit des Ergebnisses der Messung.
- Kombinierte Standardunsicherheit
  - Standardunsicherheit eines Messergebnisses, wenn dieses aus den Werten einer Anzahl anderer Messgrößen gewonnen wird.

Definitionen

- erweiterte Messunsicherheit
  - Kennwert (Vertrauensniveau), der einen Bereich um das Messergebnis kennzeichnet, von dem erwartet werden kann, dass er einen bestimmten Anteil der Verteilung der Werte umfasst, die der Messgröße vernünftiger Weise zugeordnet werden können.
- Erweiterungsfaktor
  - Zahlenfaktor k, mit dem die kombinierte Standardunsicherheit multipliziert wird, um eine erweiterte Messunsicherheit zu erhalten.

Schritte zur Angabe der Messunsicherheit und vollständigem Messergebnis



Modell für die Ausgangsgröße

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \ldots X_N)$$

Y: zu bestimmende Ausgangsgröße
X_1.... X_N: Eingangsgrößen

Die Größen von $X_1 \ldots X_n$ und ihre Unsicherheiten werden DIREKT während der aktuellen Messung ermittelt, und zwar

- aus einer einzelnen Beobachtung
- aus einer Messreihe
- aus einer auf der Erfahrung beruhenden Beurteilung

$$y = f(x_1, \ldots x_N)$$

y: Schätzwert für Y
x_i: Schätzwerte für X_i

Ermittlungsmethoden der Messunsicherheit

Ermittlungsmethoden

Ermittlungsmethode A

Ermittlungsmethode B

Teilunsicherheiten werden durch statistische Methoden ermittelt

- Messreihen, bekannte bzw. angenommene statistische Verteilung der Messwerte

Teilunsicherheiten werden durch andere als statistische Methoden ermittelt

-Angaben über Messunsicherheiten von Herstellern, aus Erfahrungen, aus der Literatur

Ermittlungsmethode A

- Schätzwert für die Messgröße X_i
  - Durchschnitt, arithmetisches Mittel über alle n Messungen

$$x_i = \overline{x_i} = \mu_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$$

- Schätzwert für die Varianz einer Stichprobe: Empirische Varianz der Stichprobe

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{i,j} - \overline{x_i}\right)^2$$

- Schätzwert für die Varianz des Mittelwertes

$$s^2_{x_i=\mu} = \frac{s_i^2}{n}$$ bzw. wenn $0<n\leq 10$ $$s_{x_i=\mu} = \frac{t}{\sqrt{n}} s_i$$

t-Faktor aus Student-verteilung DIN 1319, Teil 3

Ermittlungsmethode B

- Varianzen müssen mit wissenschaftlich-technischen Methoden angegeben werden (Literaturwert, Herstellerangabe, Datenblatt Kalibrierschein). Wenn kein Wert für eine Varianz vorliegt, muss diese aus der Erfahrung geschätzt werden (vorergehenden Messreihen).
- Bei Annahme von bestimmten statistischen Verteilungen für Einflussgrößen, so muss diese Verteilung für die Varianzbestimmung verwendet werden. Beispiele siehe nächste Seite.

Ermittlungsmethode B

- Beispiel: Es liegt Gleichverteilung innerhalb eines Bereichs der Grenzen a_u, a_o

$$x_i = \overline{x_i} = \mu_i = \frac{1}{2}(a_o + a_u)$$

$$s_{xi}^2 = \frac{1}{12}(\Delta a_i)^2 \qquad \Delta a_i = a_o - a_u$$

… immer dann, wenn bei einem Messgerät eine Genauigkeits-klasse angegeben wird.

Ermittlung der kombinierten Standardabweichung*

$$Y = f\left(X_1, X_2, X_3, \ldots X_N\right)$$

$$y = f\left(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_N}\right)$$

Messergebnis = Schätzwert für wahren Wert von Y

kombinierte Standardabweichung

$$s_y^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left. \frac{\partial f}{\partial x_k} \right|_{\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}\right)} \right)^2 s_k^2 \right)$$

kombinierte Messunsicherheit

$$u_y^2 = s_y^2$$

* bei unkorrelierten Eingangsgrößen

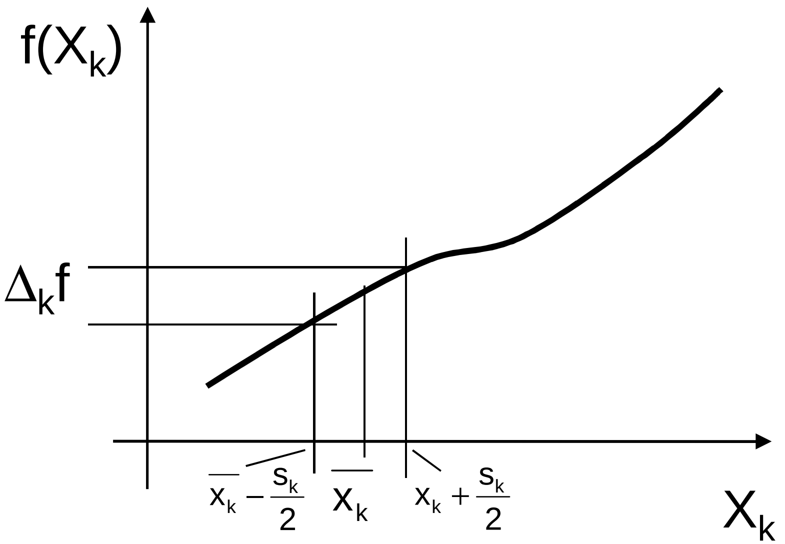
Ermittlung der kombinierten Standardabweichung

bei numerischer Berechnung der Ableitung reicht oft die erste Näherung :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \approx \frac{\Delta_k f}{s_k} \qquad \Delta_k f \approx \frac{\partial f}{\partial x_k} s_k \qquad \Delta_k f = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k + \frac{s\left(\overline{x_k}\right)}{2}, \ldots, x_N\right)$$

x_k

$$- f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k - \frac{s\left(\overline{x_k}\right)}{2}, \ldots, x_N\right)$$



Erweiterte Messunsicherheit

- Angabe der erweiterten Messunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor k

$$U = ku_y$$

- Der Erweiterungsfaktor hängt von der statistischen Verteilungsfunktion ab. Für Normalverteilungen gilt für die „Überdeckungswahrscheinlichkeiten“ bzw. den „Grad des Vertrauens“ des Bereichs:

k wird oft aus der t-Verteilung bestimmt, da nur eine endlich große Anzahl von Messwerten zur Auswertung steht.
Gute Näherung für Anzahl der Messungen n>5 ist k=2; dann liegt wahrer Wert von Y mit etwa 95% innerhalb des Bereichs

Erweiterte Messunsicherheit

- Wahl des Erweiterungsfaktors k für die Praxis (nach GUM)*

Vertrauensniveau ($1-\alpha$) in %	Erweiterungsfaktor k
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

* k und der Grad des Vertrauens (Vertrauensniveau) hängt von der unterliegenden statistischen Verteilungsfunktion der jeweiligen Größe ab → exakter Wert nur angebbar, wenn Verteilungsfunktion bekannt. Vor allem bei einer niedrigen Anzahl von Messwerten kann nach GUM auch $k=t(n,\alpha)$ aus der Student-t-Verteilung als genauerer k-Wert (dann abhängig von n, der Anzahl der zugrunde liegenden Messungen) verwendet werden.

Protokollieren des Ergebnisses

- Messergebnis $Y=y\pm U=y\pm ku_y$

- Angabe des vollständigen Messergebnisses (Messgröße x, korrigiertes Messgergebnis y)
  - $x=y\pm U$ * Beispiel: $U=2V \pm 0{,}1V$
  - $x=y\times(1\pm U_{rel})$ Beispiel: $U=2V\times(1\pm 0{,}05)$
  - $y; U$ Beispiel: 2V; 0,1V
  - $y; U_{rel}$ Beispiel: 2V; 0,05 oder 2V; 5%
  - $x=y \pm U_{rel}$ Beispiel: $U=2V \pm 5\%$

*Wichtig ist, immer anzugeben, welches Vertrauensintervall (also den Wert für k) angesetzt wird.

Anzahl der anzugebenen Stellen

- Unsicherheit auf zwei signifikante Stellen runden
- Unsicherheit ist aufzurunden
- Messergebnis ist an der selben Stelle zu runden, wie die Unsicherheit
- Beispiel:

  y=5,493523 V ist auf y=5,4935 V zu runden,

  wenn u(y)=0,008017 auf u(y)=0,0081 gerundet wird.

Weitere Literatur

- S.A. Bell, “A beginner's guide to uncertainty in measurement.”, National Physical Laboratory, UK, 2001. abrufbar unter: http://www.npl.co.uk/content/ConPublication/1508

Formelsammlung

1. wiederholt gemessene Größen

Messwerte von i=1..m Messgrößen $x_{i,j}$

Mittelwerte i-ten Messwert $$\overline{x_i} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$$

empirische Varianz für i-ten Messwert
(aus einer Stichprobe/Messreihe) $$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{i,j} - \overline{x_i}\right)^2$$

Varianz des Mittelwertes der i-ten
Messgröße $$s_{\overline{x_i}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_i$$

2. Varianz bei nur einem Messwert
(aber bei bekanntem Bereich a
der Genauigkeit d. Messung) $$s_{x_i}^2 = \frac{1}{3} a_i^2$$

Formelsammlung

3. Berechnung des vollständigen Messergebnis

Messergebnis
(Rechenformel/Modell)

$$y = f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_i}, \dots, \overline{x_m}\right)$$

kombinierte Varianz*
(Varianz des Messergebnis y)

$$s_y^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} s_{\overline{x_i}} \right)^2$$

Angabe der Messunsicherheit
als Standardabweichung

$$u_y = \sqrt{s_y^2}$$

Erweitere Messunsicherheit**

$$U = k u_y$$

vollständiges Messergebnis

$$Y = y \pm k u_y$$

* unkorrelierte Messgrößen ** Erweiterungsfaktor k