

9 Messung von Leistung und Energie

Überblick

- Grundlagen des Begriffs Leistung
- Leistungsmessung im Gleichspannungskreis
- Leistungsmessung im Wechselspannungskreis
- Leistungsmessung im Drehstromsystem
- Messung der elektrischen Arbeit / Energie

Grundlagen

Leistung im Gleichstromkreis

$$P = UI$$

Leistung im Wechselstromkreis

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi_i)$$

1. Wirkleistung

(Formelzeichen auch P)

$$P_W = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi_{ui})$$

$$\varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i$$

Effektivwerte:
(sinusförmige Signale)

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{U}$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{I}$$

Grundlagen

2. Scheinleistung

(Formelzeichen auch S)

$$P_S = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

3. Blindleistung

(Formelzeichen auch Q)

$$P_B = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi_{\text{ui}})$$

Leistungsfaktor

$$\cos(\varphi) = \cos(\varphi_{\text{ui}}) = \frac{P_W}{P_S}$$

Grundlagen

Komplexe Zeigerdarstellung

$$\underline{U}_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} e^{j\varphi_u}$$
$$\underline{I}_{\text{eff}} = I_{\text{eff}} e^{j\varphi_i}$$

Komplexe Leistung (auch komplexe Scheinleistung)

$$\underline{P} = \underline{U}_{\text{eff}} \underline{I}_{\text{eff}}^* = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} e^{j\varphi_{ui}}$$

$$\underline{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) + j U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$$

$$\underline{P} = \text{Re}(\underline{P}) + j \text{Im}(\underline{P}) = P_W + j P_B$$

Scheinleistung

$$P_S = |\underline{P}| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} \quad [\text{VA}]$$

Wirkleistung

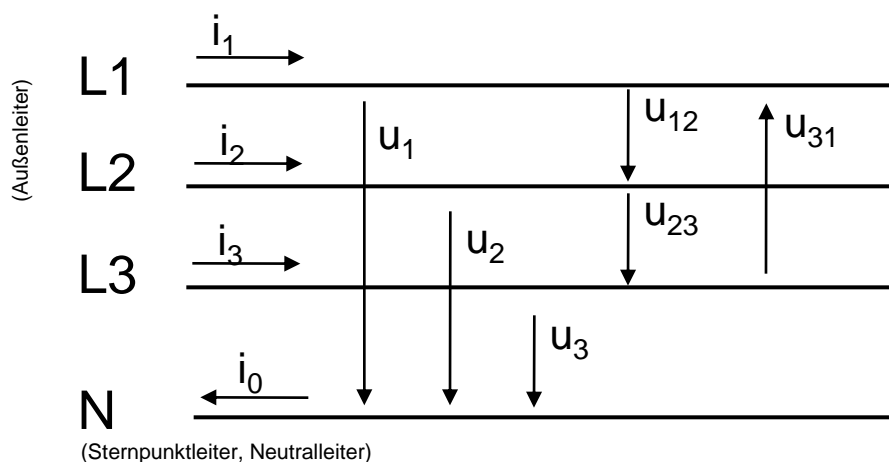
$$P_W = \text{Re}\{\underline{P}\} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi) \quad [\text{W}]$$

Blindleistung

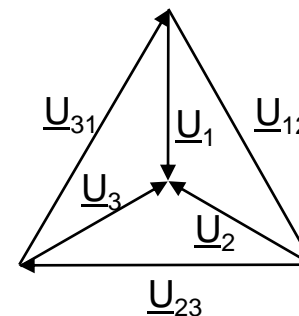
$$P_B = \text{Im}\{\underline{P}\} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi) \quad [\text{var}]^*$$

Grundlagen

Symmetrisches Dreiphasensystem (Drehstromsystem)



Effektivwertzeiger



(„rechtsdrehendes System, Phasenlage „1-2-3“)

Sternspannungen

$$\underline{U}_1 = U_{\text{eff}} e^{j0^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = U_{\text{eff}} e^{j120^\circ}$$

$$\underline{U}_3 = U_{\text{eff}} e^{j240^\circ}$$

Außenleiterspannungen

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 = \sqrt{3}U_3 e^{-j90^\circ}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 = \sqrt{3}U_1 e^{-j90^\circ}$$

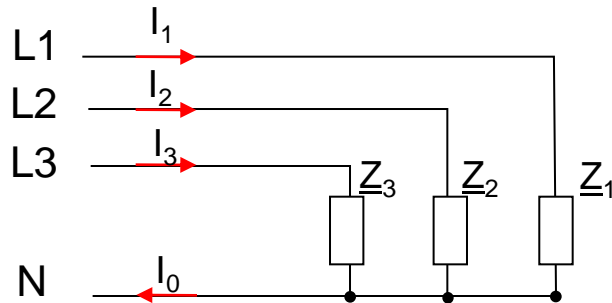
$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 = \sqrt{3}U_2 e^{-j90^\circ}$$

$$|\underline{U}_{ij}| = 2 \cos(30^\circ) U_{\text{eff}}$$

$$|\underline{U}_{ij}| = \sqrt{3}U_{\text{eff}}$$

Grundlagen

Vierleitersystem



$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3$$

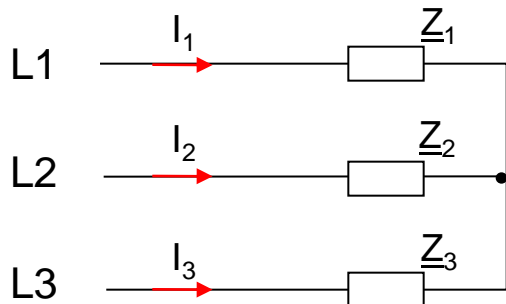
$$Z_1 = Z_2 = Z_3$$

$$I_0 = 0$$

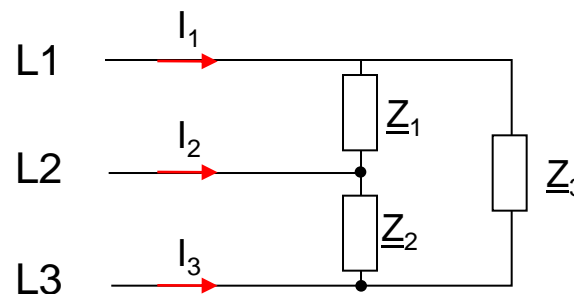
} symmetrische Last

Dreileitersystem

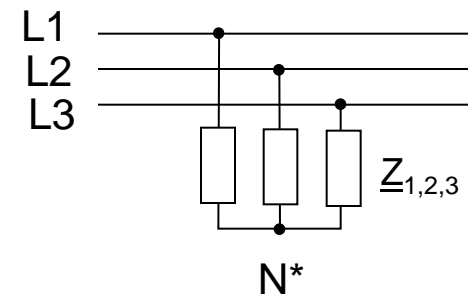
Sternschaltung



Dreieckschaltung

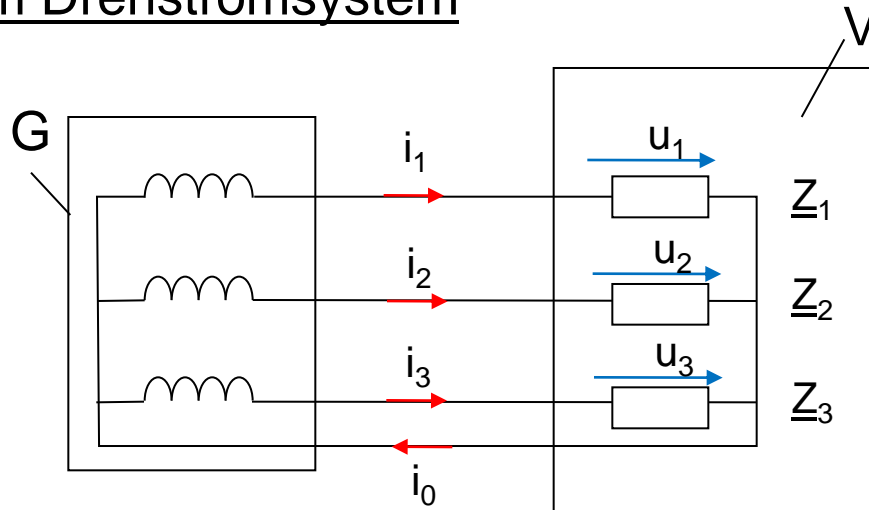


„künstlicher“ Sternpunkt
(zu Messzwecken)



Grundlagen

Leistung im Drehstromsystem



symmetrische Belastung

$$P_W = \sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(\varphi)$$

$$P_B = \sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin(\varphi)$$

$$P_S = |\underline{P}| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2} = \sqrt{3} U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

Effektivwert der Außenleiterspannung

unsymmetrische Belastung

$$\underline{P} = \underline{P}_{W,1} + \underline{P}_{W,2} + \underline{P}_{W,3} = \sum_{n=1}^3 \underline{U}_n \underline{I}_n^*$$

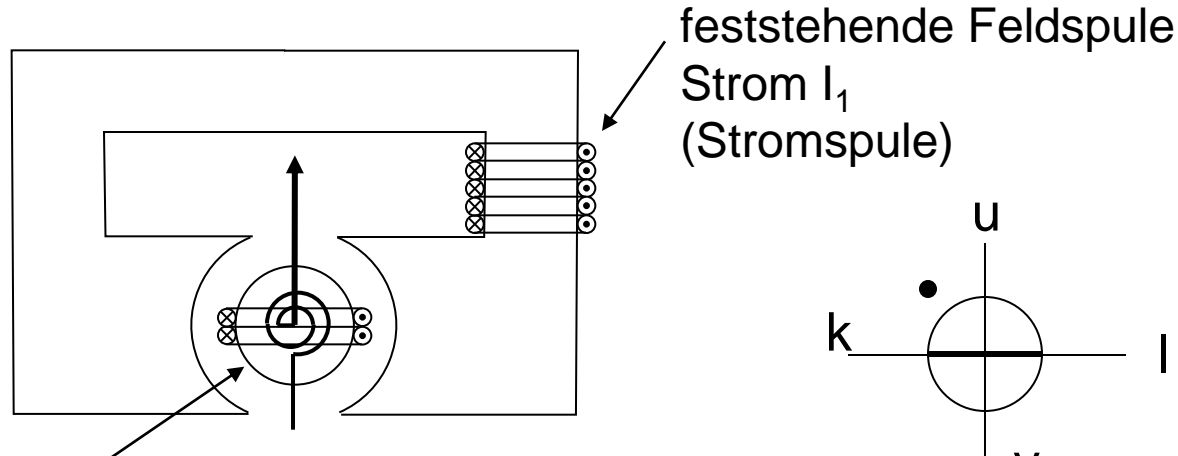
$$P_W = \text{Re}\{\underline{P}\} = \sum_{n=1}^3 U_{\text{eff},n} I_{\text{eff},n} \cos(\varphi_n)$$

$$P_B = \text{Im}\{\underline{P}\} = \sum_{n=1}^3 U_{\text{eff},n} I_{\text{eff},n} \sin(\varphi_n)$$

$$P_S = |\underline{P}| = \sqrt{P_W^2 + P_B^2}$$

Grundlagen Elektrodynamisches Messwerk

„Dynamometer“



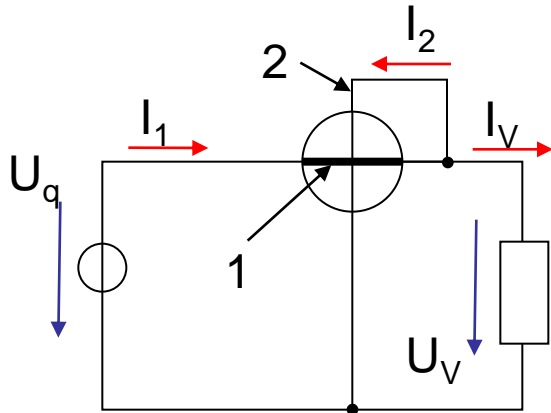
bewegliche Spule mit
Zeiger- und Rückstellwerk
und Vorwiderstand
Strom I_2
(Spannungsspule)

$$\alpha = k I_1 I_2 = k I_1 \frac{U}{R_U} = k_p I_1 U$$

Zeigerausschlag direkt in Watt abgeglichen
 R_U : Widerstand im Spannungspfad „uv“

Leistungsmessung im Gleichstromkreis

spannungsrichtig

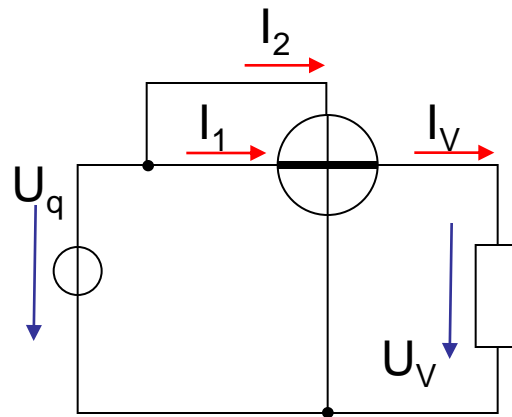


$$I_2 = \frac{U_V}{R_U} \quad I_1 = I_V + I_2$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V (I_V + I_2)$$

$$P_{\text{Anz}} = P_V + \frac{U_V^2}{R_U}$$

stromrichtig

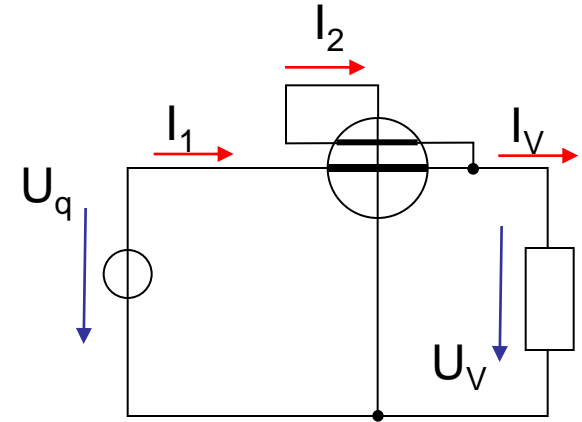


$$U_m = U_V + I_V R_I \quad I_1 = I_V$$

$$P_{\text{Anz}} = (U_V + I_V R_I) I_V$$

$$P_{\text{Anz}} = P_V + I_V^2 R_I$$

Korrekturspule



$$P_{\text{Anz}} = U_V I_1 - U_V I_2$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V (I_V + I_2) - U_V I_2$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V I_V = P_V$$

Unterscheidung nach:
verbraucher- und quellenseitig

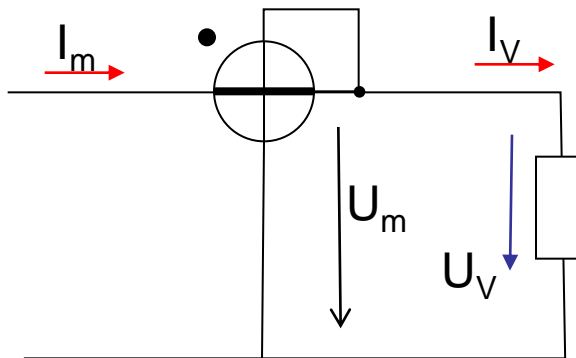
Messbereichserweiterungen: Widerstandsnetzwerke, Wicklungsumschaltungen

Leistungsmessung im Wechselstromkreis

Bestimmung der Wirkleistung

Elektrodynamische Messwerk mittelt über zeitliche Wechselgrößen

Messung der Wirkleistung



$$U_m = U_V$$

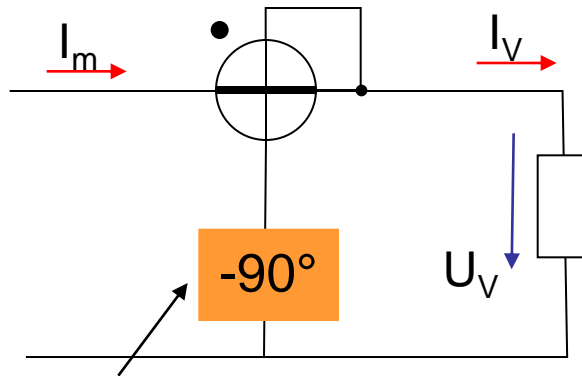
$$I_m = I_V$$

$$\varphi_m = \varphi_V$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V I_V \cos(\varphi_V) = P_V$$

Leistungsmessung im Wechselstromkreis

Bestimmung der Blindleistung



-90° Phasenschieber

$$I_m = I_V$$

$$\underline{U}_m = \underline{U}_V e^{-j90^\circ}$$

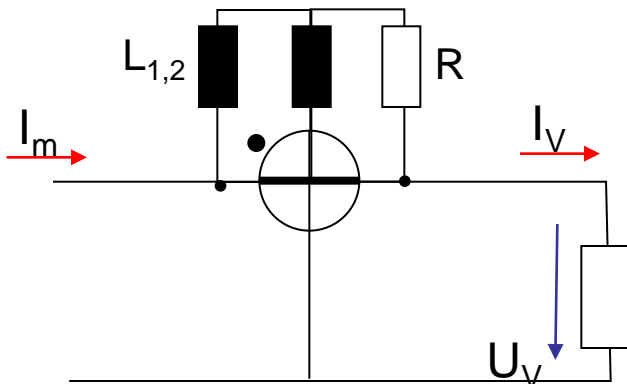
$$P_{\text{Anz}} = U_m I_m \cos(\varphi_m) = \text{Re}\{\underline{U}_m I_m^*\}$$

$$P_{\text{Anz}} = \text{Re}\{\underline{U}_V e^{-j90^\circ} I_m^*\} = \text{Re}\{U_V I_V e^{j\varphi_V} e^{-j90^\circ}\}$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V I_V \cos(\varphi_V - 90^\circ)$$

$$P_{\text{Anz}} = U_V I_V \sin(\varphi_V) = P_B$$

Realisierung durch „Hummelschaltung“*



L1, L2, R dimensioniert, dass $\Delta\varphi_{U_m/U_V} = -90^\circ$
Aufgabe: Wie?

kapazitive Lasten: Bildleistung negativ
induktive Lasten: Bildleistung positiv
→ auf richtige Polung achten

* nach Georg Hummel

Leistungsmessung im Wechselstromkreis

Bestimmung der Scheinleistung

Bestimmung der Scheinleistung
aus Messung

a) der Effektivwerte

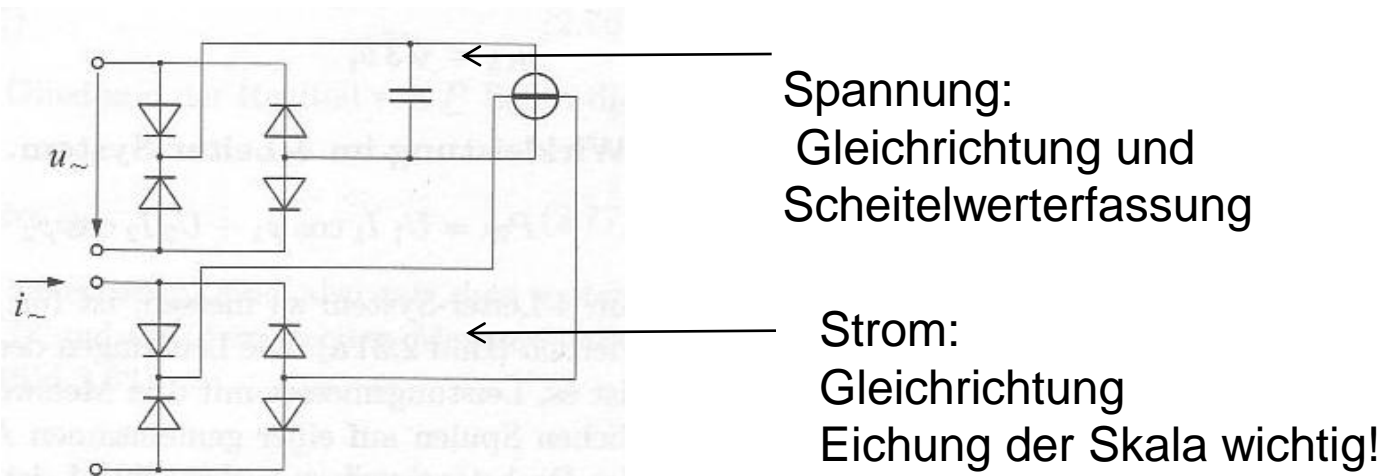
b) der Blind- und Wirkleistung

$$P_s = |\underline{P}| = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

$$P_s = \sqrt{P_W^2 + P_B^2}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{P_W}{P_s}$$

Messschaltung zur Bestimmung der Scheinleistung
mittels Bestimmung der Effektivwerte aus Scheitel- bzw. Gleichrichtwerten



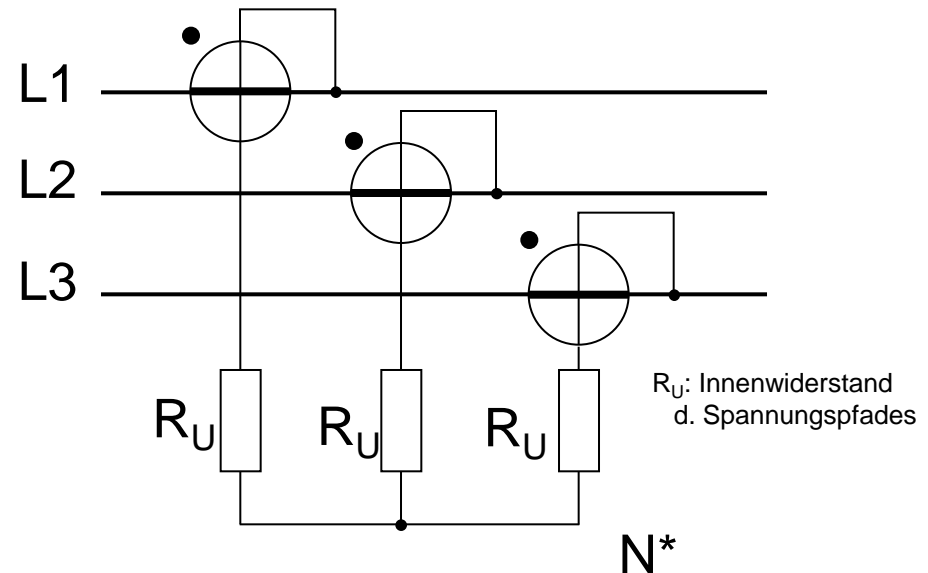
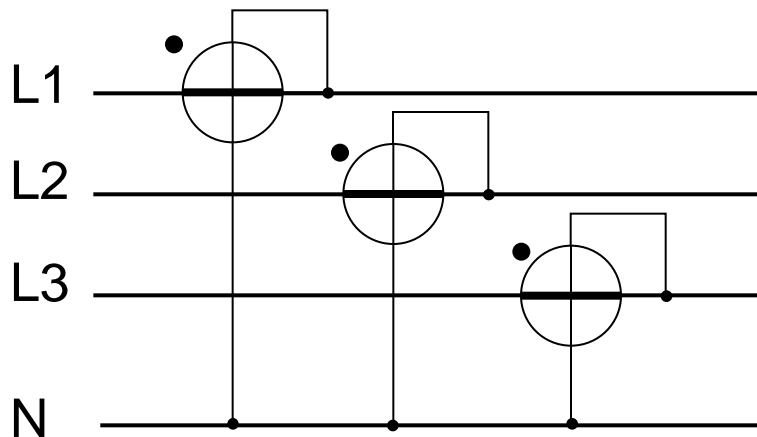
Leistungsmessung im Drehstromsystem

- Allgemein:
 - Messung der Leistungsanteile jeder Phase (Strang)
 - Addieren der 3 Einzelleistungen
- symmetrische Belastung
 - Messung einer Phase ausreichend
 - Gesamtleistung: Leistung x 3

Leistungsmessung im Drehstromsystem

Bestimmung der Wirkleistung

4-Leitersystem und Messung mit künstlichem Sternpunkt



$$P_{w,ges} = U_{11} I_1 \cos(\varphi_1) + U_{22} I_2 \cos(\varphi_2) + U_{33} I_3 \cos(\varphi_3)$$

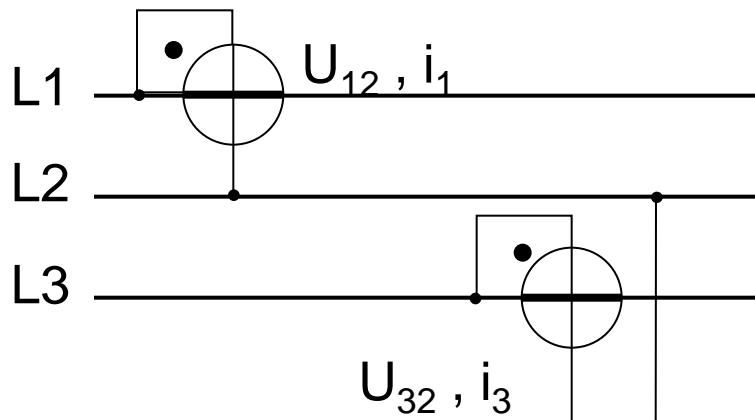
$$P_{w,ges} = P_{Anz,1} + P_{Anz,2} + P_{Anz,3}$$

Gerätetechnisch: drei Messwerke auf einer gemeinsamen Achse.

Leistungsmessung im Drehstromsystem

Bestimmung der Wirkleistung

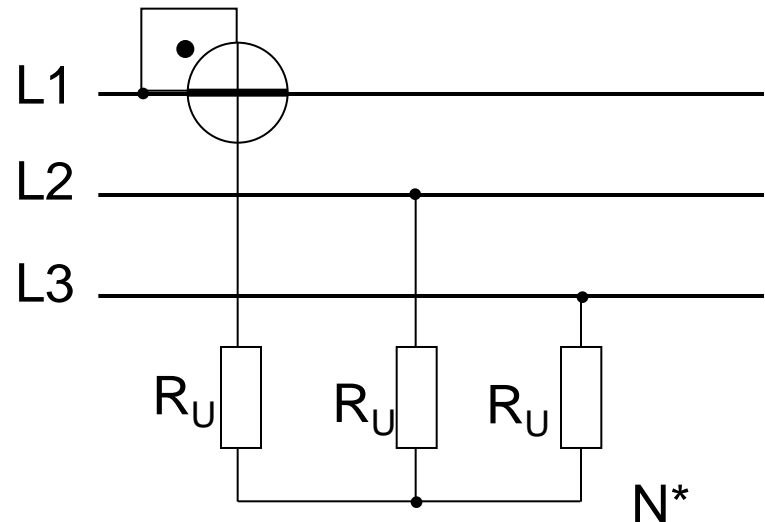
Beliebig belastetes
3-Leitersystem (Aaronschaltung*)



$$P_{w,ges} = \operatorname{Re}\{\underline{P}\}$$

$$P_{w,ges} = U_{12} I_1 \cos(\varphi_a) + U_{32} I_3 \cos(\varphi_c)$$

Symmetrisch belastetes
3-Leitersystem



$$P_{w,ges} = 3U_1 I_1 \cos(\varphi)$$

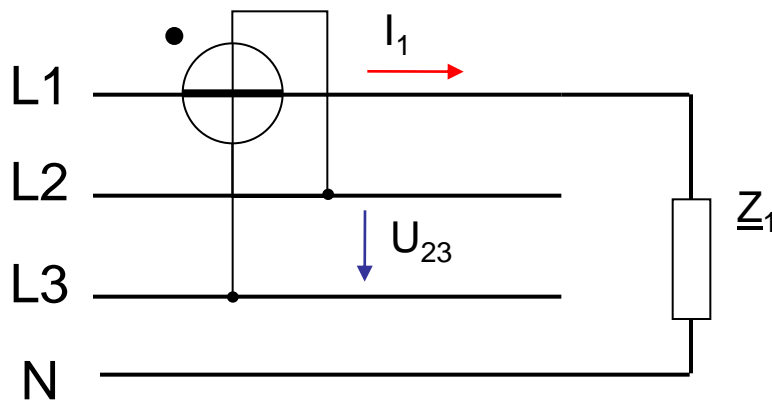
* nach Hermann Aaron

Leistungsmessung im Drehstromsystem

Bestimmung der Blindleistung

Hilfsspannung mit 90° Phasenverschiebung zur Verbraucherspannung

→ Außenleiterspannungen sind um -90° phasenverschoben zu den Sternspannungen (und einen Faktor $\sqrt{3}$ größer)



$$P_{B,1} = U_{11} I_1 \sin(\varphi_1)$$

$$P_{Anz} = U_{23} I_1 \cos(\varphi_a) = \sqrt{3} P_{B,1}$$

$$P_{B,1} = P_{Anz} / \sqrt{3}$$

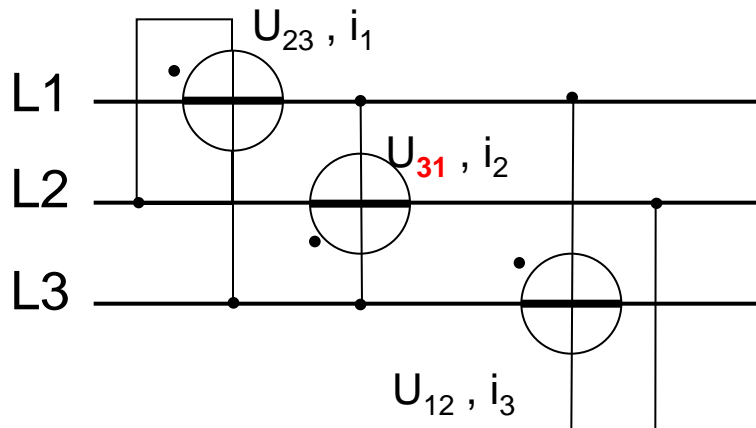
$$\cos(\varphi_a) = \sin(\varphi_1), \varphi_a \prec (U_{23}, I_1)$$

$$\varphi_a = \varphi_1 - 90^\circ$$

Leistungsmessung im Drehstromsystem

Bestimmung der Blindleistung

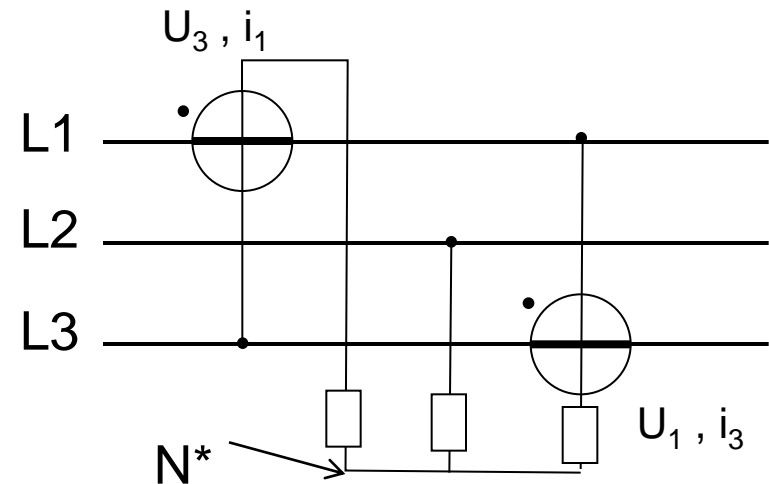
Messung der Blindleistung in beliebig belasteten 4- und 3-Leitersystemen



$$P_{B,ges} = \frac{P_{Anz,1}}{\sqrt{3}} + \frac{P_{Anz,2}}{\sqrt{3}} + \frac{P_{Anz,3}}{\sqrt{3}}$$

Polarität beachten

Aaron-Schaltung



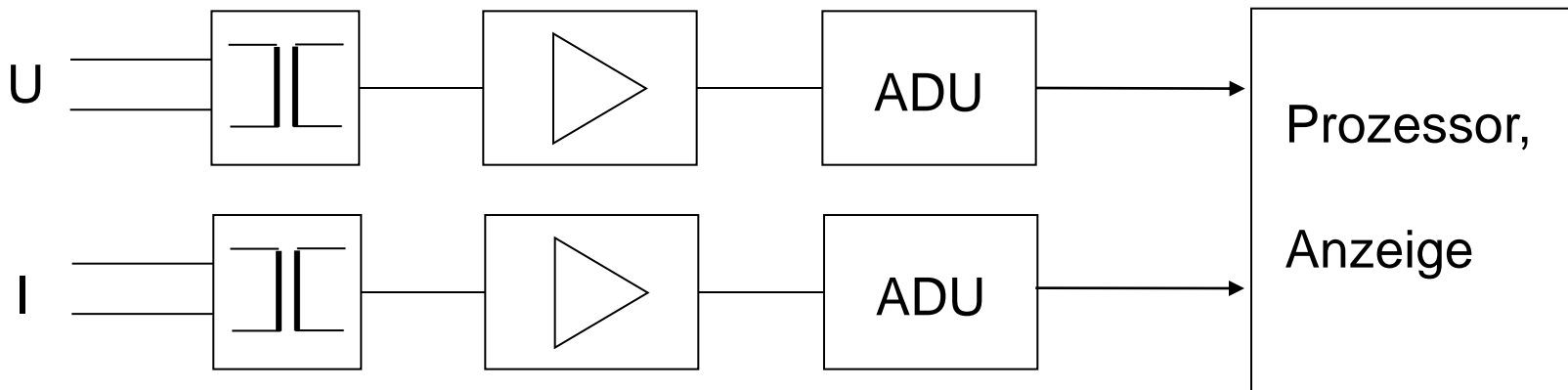
$$P_{B,ges} = \text{Im}\{\underline{P}\}$$

$$P_{B,ges} = -\sqrt{3}U_{31} \cos(\varphi_a) + \sqrt{3}U_{13} \cos(\varphi_b)$$

$$P_{B,ges} = \sqrt{3}(P_{Anz,a} + P_{Anz,b})$$

Digitale Leistungsmesser

Prinzipielle Architektur



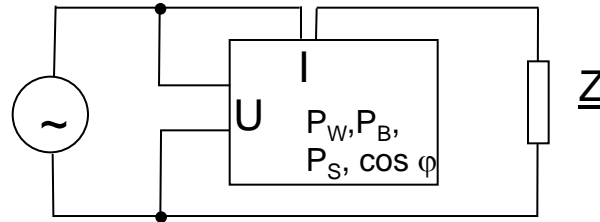
Abtastung für 50 Hz, typisch mit 50 KHz

Digitale Signalprozessoren → Effektivwertberechnung und Multiplikation,
Bestimmung von Phasenwinkeln

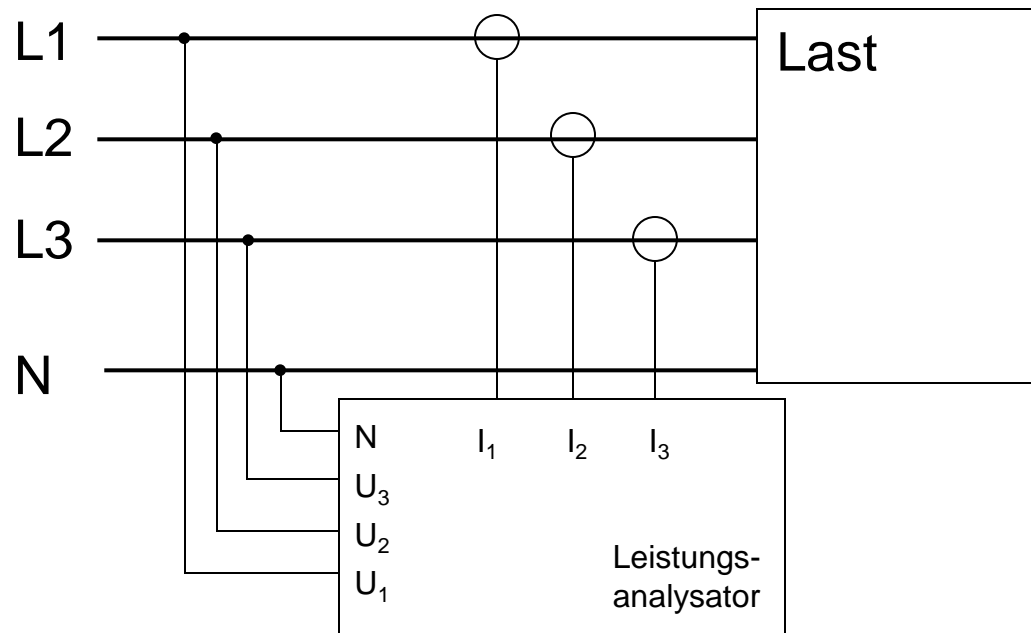
→ Anzeigen U_{eff} , I_{eff} , P_W , P_B , P_S , $\cos \varphi$

Anwendungen in Wechsel- und Drehstromsystemen

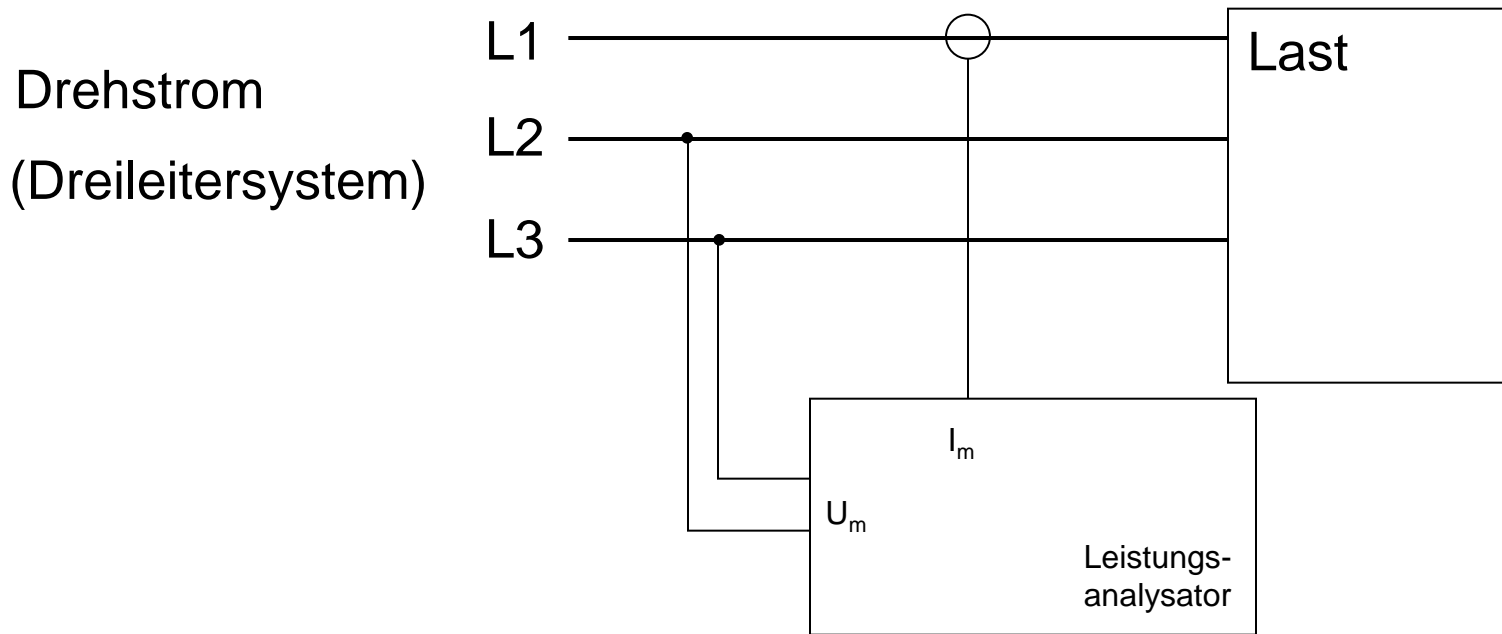
Einphasenwechselstrom



Drehstrom
(Vierleitersystem)



Anwendungen in Wechsel- und Drehstromsystemen

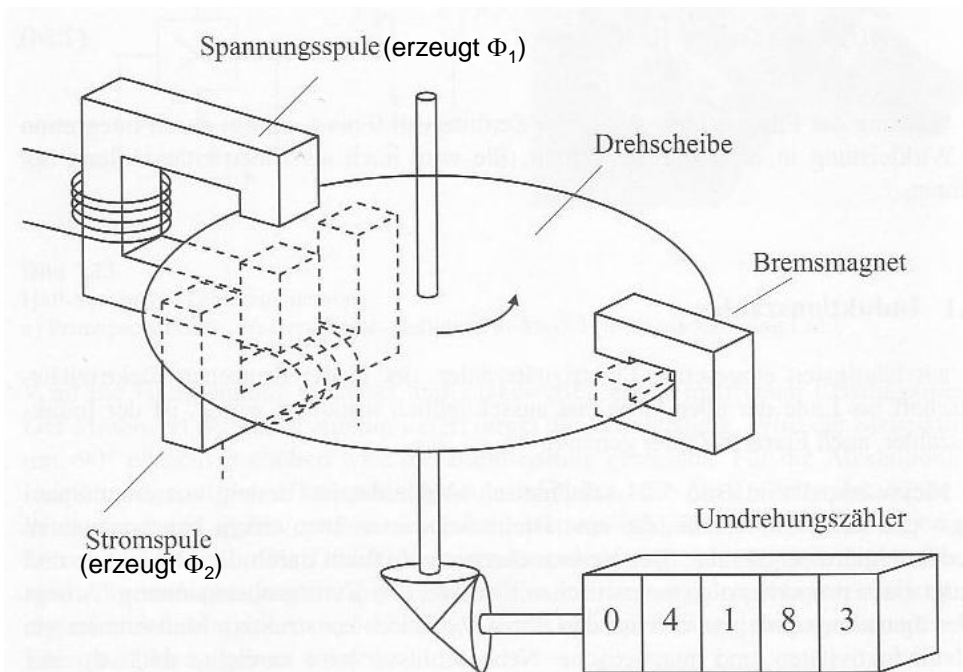


Messung der elektrischen Energie

Elektrische Energie / Arbeit

$$E = \int_0^T P_W dt = \int_0^T UI \cos(\varphi) dt$$

Messwerk: Induktionsmesswerk (Ferraris- bzw. Wanderfeld-Zähler)



$$\Phi_1 = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = A_0 \sin(\omega t)$$

$$\Phi_2 = A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$M_{el} = kUI \cos(\varphi)$$

$$M_{brems} = k_1 n$$

n: Drehzahl

$$M_{el} = M_{brems}$$

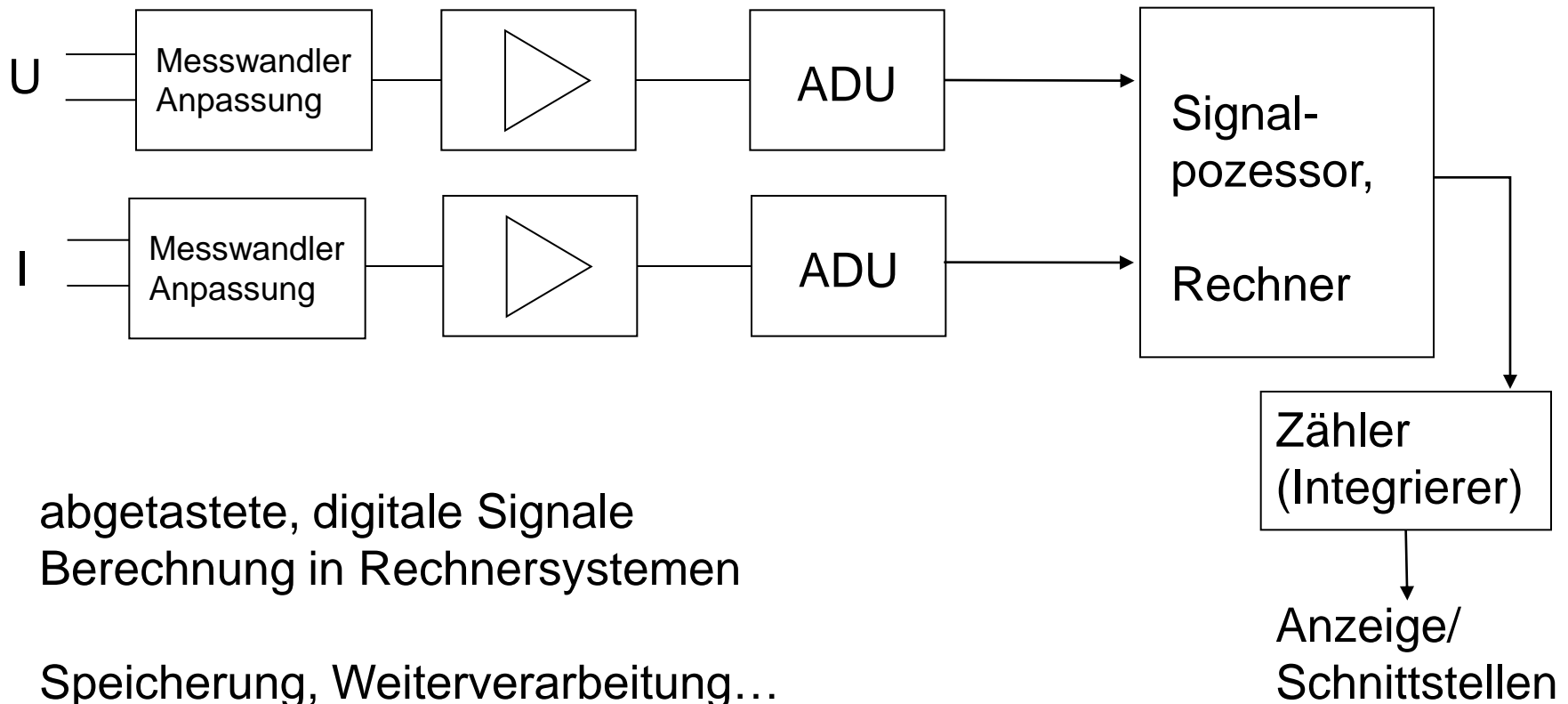
$$n = \frac{k}{k_1} UI \cos(\varphi) \sim P_W$$

→ Integration: Zählen der Umdrehungen

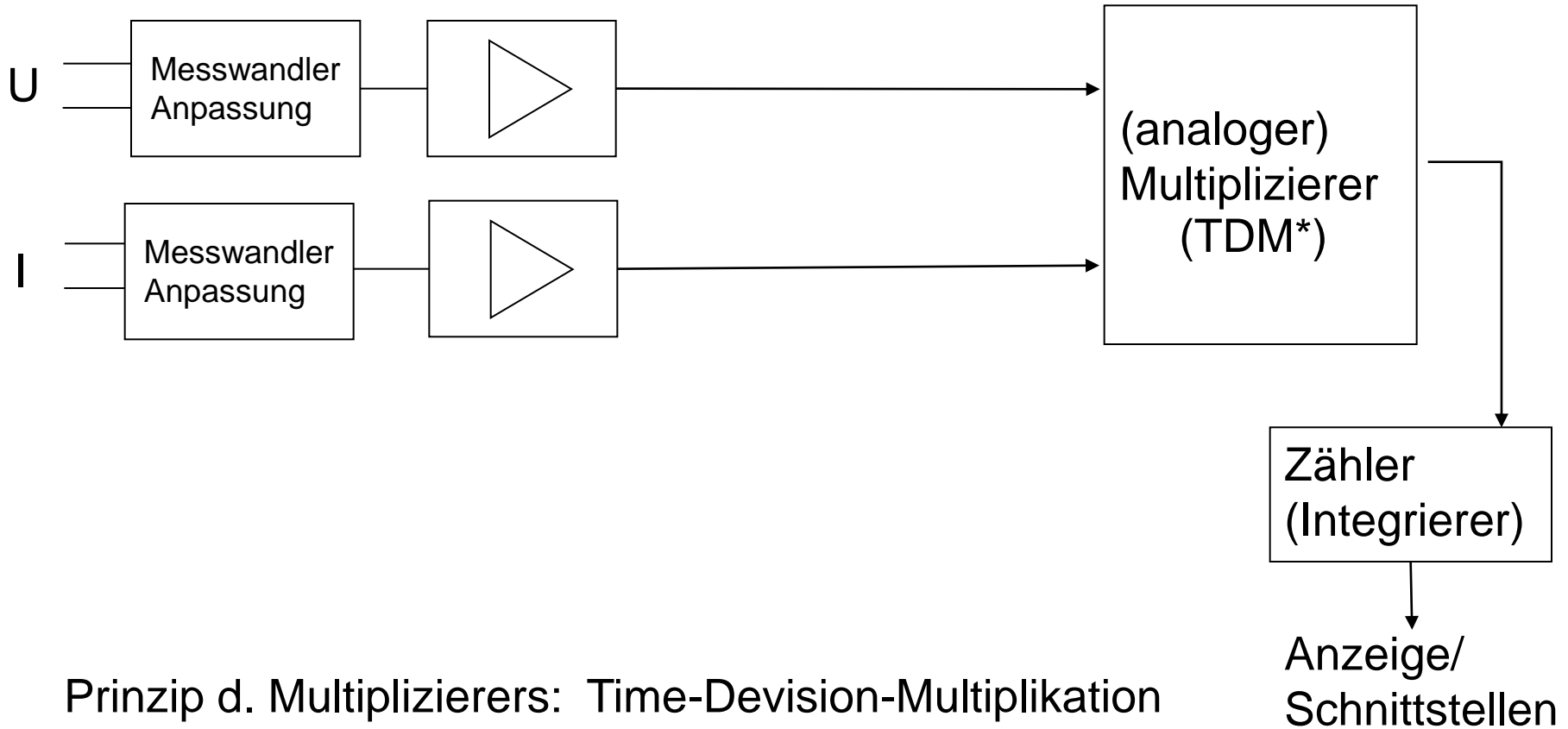
Elektronische Energiezähler

- hohe Flexibilität und Zuverlässigkeit
 - Erfassung der Wirkenergie
 - flexible Tarifsteuerung
 - Ferndiagnose und –wartung
 - Fernabfragen
 - Schnittstellen für Rechnersysteme→ „smart meter“
- Verfahren / Messprinzipien
 - physikalische Multipliziereffekte (Hall-Element)
 - analogrechentechische Multiplizierer
 - digitalrechentechische Multiplizierer

Digitaler Energiezähler



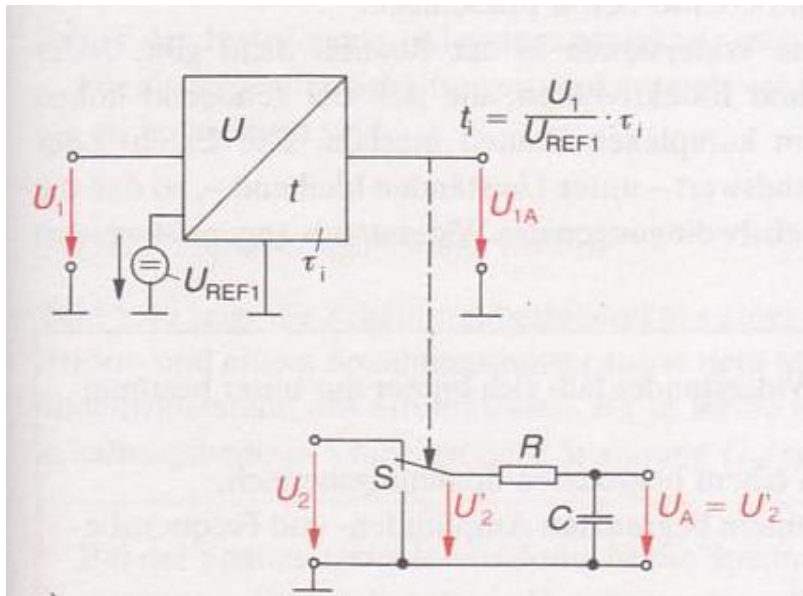
Analogrechenteknische Energiezähler



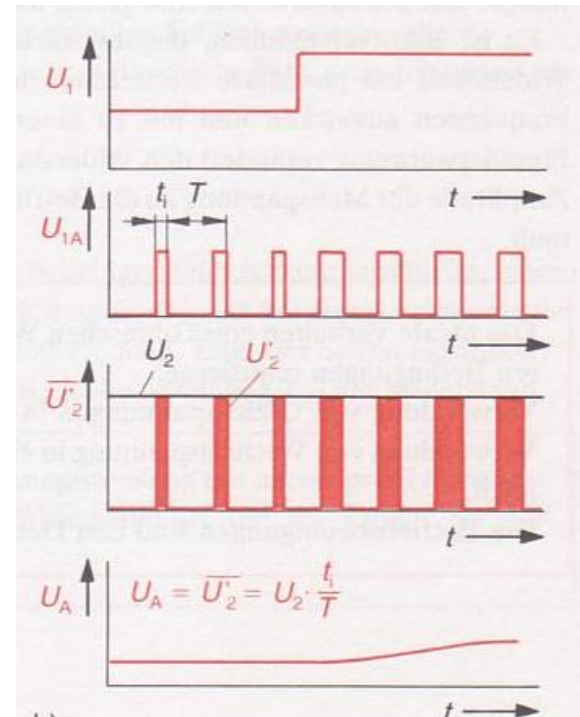
Prinzip d. Multiplizierers: Time-Devision-Multiplikation

Time-Devision-Multiplikation

Prinzip:



Funktion:



$$U_A = \bar{U}'_2$$

$$\bar{U}'_2 = U_2 \frac{t_i}{T}$$

$$t_i = \frac{U_1}{U_{\text{Ref}}} \tau_i$$

$$U_A = \bar{U}'_2 = U_2 U_1 \frac{\tau_i}{U_{\text{Ref}} T}$$

für Wechselspannung
→ 4-Quadrantenmultiplizierer
nötig

Hallsensor zur Leistungsmessung

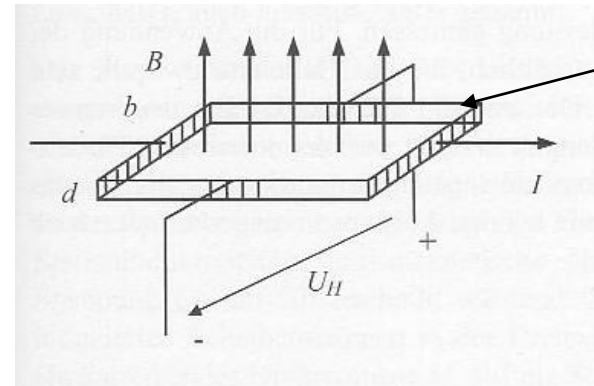
1. Halleffekt

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}; \quad F_m = qvB$$

$$\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}; \quad F_e = qE = q \frac{U_H}{b}$$

$$F_e = F_m \Rightarrow U_H = bvB$$

$$\text{mit } \frac{l}{bd} = nvq \Rightarrow U_H = kIB$$



InAs od.
InSb

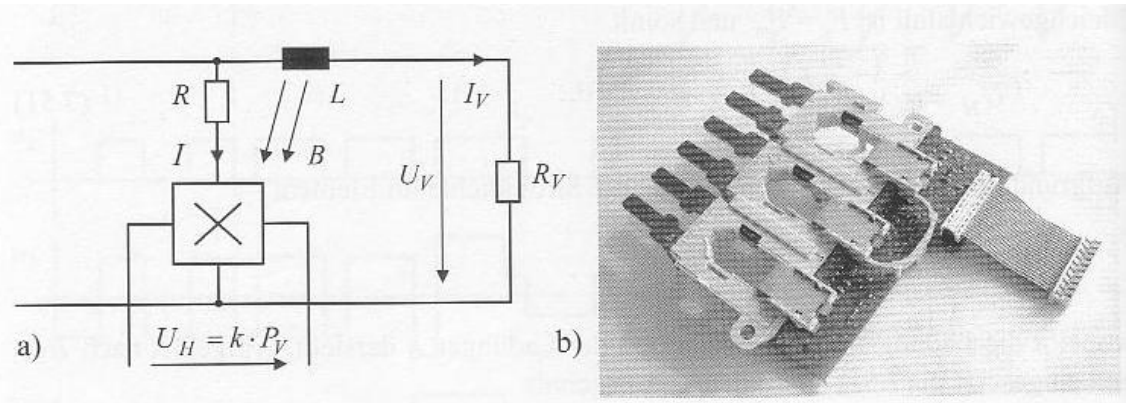
2. Leistungsmesser mit Hallensensor-Element

$$B \sim I_V$$

$$I = \frac{U_V}{R} \sim U_V$$

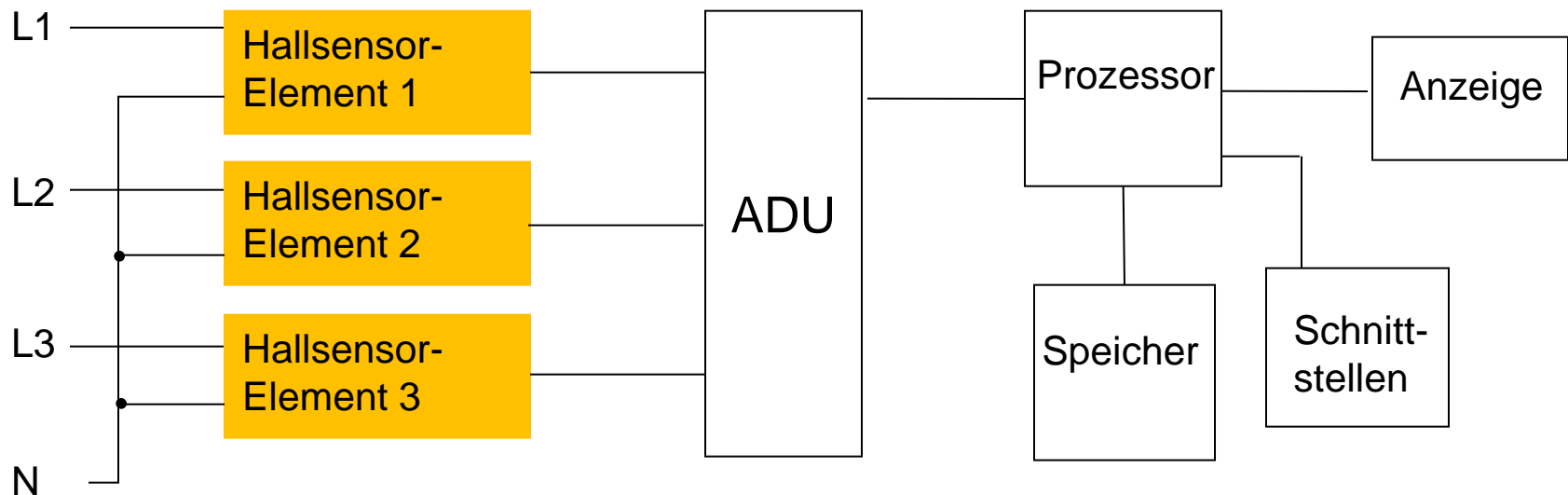
$$U_H \sim IB$$

$$\Rightarrow \overline{U_H} = k_1 \overline{U_V I_V} = k_1 P_V$$



Elektronische Messung der Energie

Beispiel: Drehstromelektrizitätszähler mit Hallelement-Sensoren



Lernziele Kapitel 9

- Grundlagen des Begriffs Leistung in Gleich- und Wechselspannungssystemen
- Leistungsmessung im Gleichstromkreis
- Messung der Wirkleistung, Scheinleistung, Blindleistung im Wechselstromkreis
- Leistungsmessung im Drehstromkreis
 - verschiedene Messschaltungen im 3 bzw. 4 Leitersystemen
- Messung der elektrischen Arbeit