13
Spektrale Analyse von Messsignalen

Einführung

Bisher: Gleichsignale oder Signale mit nur einer Frequenz

- Spannungs- & Leistungsmessung
- Frequenzmessung

Jetzt: Signale mit vielen Frequenzanteilen

- Spannungsmessung
- Leistungsmessung

→ frequenzaufgelöste Messung nötig.

Detaillierte Charakterisierung des Signals:

- → Amplitudenspektrum
- → Leistungsspektrum
- Spektrumanalysator: frequenzselektive Spannungs- & Leistungsmesser

Überlick

- Mathematik und Grundlagen der Spektrumanalyse
- Techniken der frequenzselektiven Signalmessung
- Spektrumanalysatoren und deren Eigenschaften
- Messbeispiele
- Netzwerkanalyse
- FFT Analysatoren

Mathematik der Spektrumanalyse Fourier-Reihe (harmonische Analyse)

Fourier-Reihenentwicklung: Entwicklung (Darstellung) einer periodischen Funktion in (durch) eine Reihe trigonometrischer Funktionen (sin- und cos-Schwingungen)

$f(t)$: periodische Funktion, Periodendauer T, stückweise monoton und stetig

Fourier-Reihenentwicklung:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \mathit{cos}(m\omega t) + b_m \mathit{sin}(m\omega t) \right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(Kreisfrequenz)}$$

Fourier-Koeffizienten:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \mathit{cos}(m\omega t) dt$$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \mathit{sin}(m\omega t) dt$$

Komplexe Schreibweise der Fourier-Reihe

Reihe: $$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \underline{c}_m e^{jm\omega t}$$

komplexe Koeffizienten: $$\underline{c}_m = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jm\omega t} dt$$

Zusammenhang reelle -- komplexe Koeffizienten: $$\underline{c}_0 = \frac{a_0}{2}, \quad \underline{c}_m = \frac{a_m - jb_m}{2}, \qquad \underline{c}_{-m} = \underline{c}_m^*$$

Symmetrie-Überlegungen

zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten

gerade Funktionen	$f(t) = f(-t)$	$b_m = 0$
ungerade Funktionen	$f(t) = -f(-t)$	$a_m = 0$
Funktionen mit	$f(t) = -f(t + T/2)$	$a_{2k} = b_{2k} = 0$
	$f(t) = f(t + T/2)$	$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$

T: Periodendauer

Technische Definitionen

1. Schwingungsanteile

Gleichanteil: $$\frac{a_0}{2} = \underline{c}_0$$

Grund-schwingung:

Schwingungen mit m=1:

$$a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)\right)$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |\underline{c}_1|$$ Amplitude der Grundschwingung

Ober-schwingungen:

Schwingungen mit m>1:

$$\sqrt{a_m^2 + b_m^2} = |\underline{c}_m|$$ Amplitude der m. Oberschwingung

Technische Definitionen

periodische Spannung $u(t)$

Fourier-Reihe $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos(m\omega t) + b_m \sin(m\omega t)\right)$

„m-te“ Amplitude $\hat{U}_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$

„m-ter“ Effektivwert $U_{eff,m} = U_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$

Effektivwert von u(t) $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)^2 \, dt} = \sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} U_m^2}$

Technische Definitionen

2. Schwingungsgehalt und Klirrfaktor

Schwingungs-Gehalt:

$$s = \frac{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} U_m^2}}{\sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} U_m^2}}$$

Klirrfaktor:

$$k = \frac{\sqrt{\sum_{m=2}^{\infty} U_m^2}}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} U_m^2}}$$

Grundschwingungs-Gehalt:

$$g = \frac{U_1}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} U_m^2}}$$

es gilt: $g^2 + k^2 = 1$

äquivalente Definitionen für den Strom

Parseval'sches Theorem*

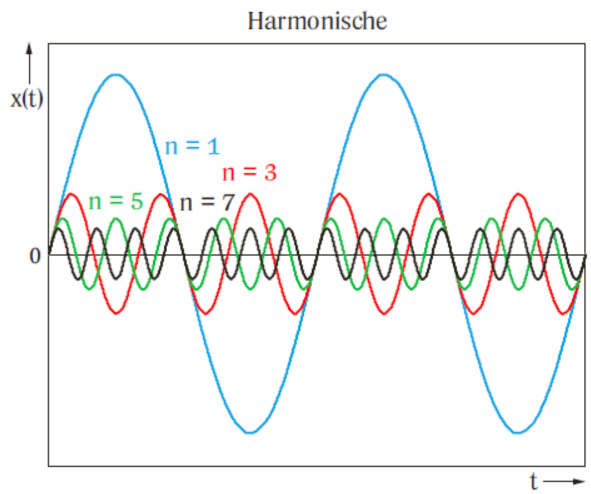
$$\frac{1}{T}\int_0^T \left|x(t)\right|^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|\underline{c}_m\right|^2$$

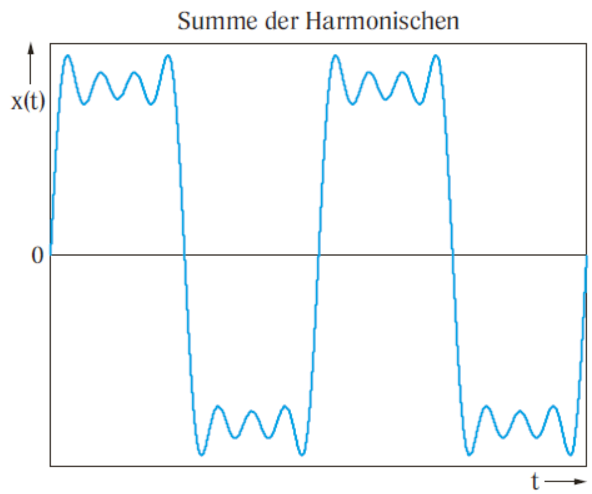
→ Wichtige messtechnische Anwendung:

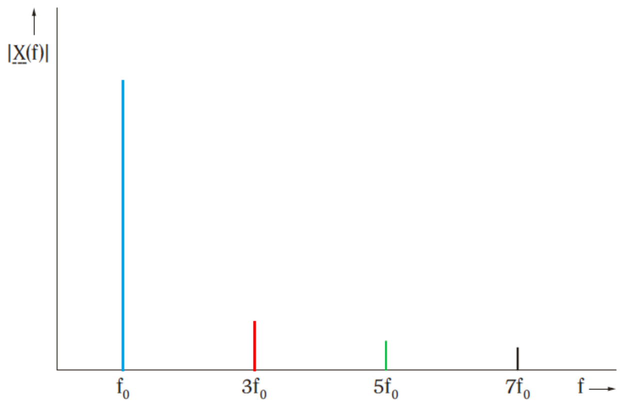
Die Signalleistung im Zeitbereich ist gleich der Signalleistung im Frequenzbereich.

* eine äquivalente Aussage gilt für die Fouriertransformation (Satz von Plancherel)

Beispiel: Rechteckfunktion mit harmonischen Funktionen angenähert







ungerade Funktion: f(t)=-f(-t) → a_m=0

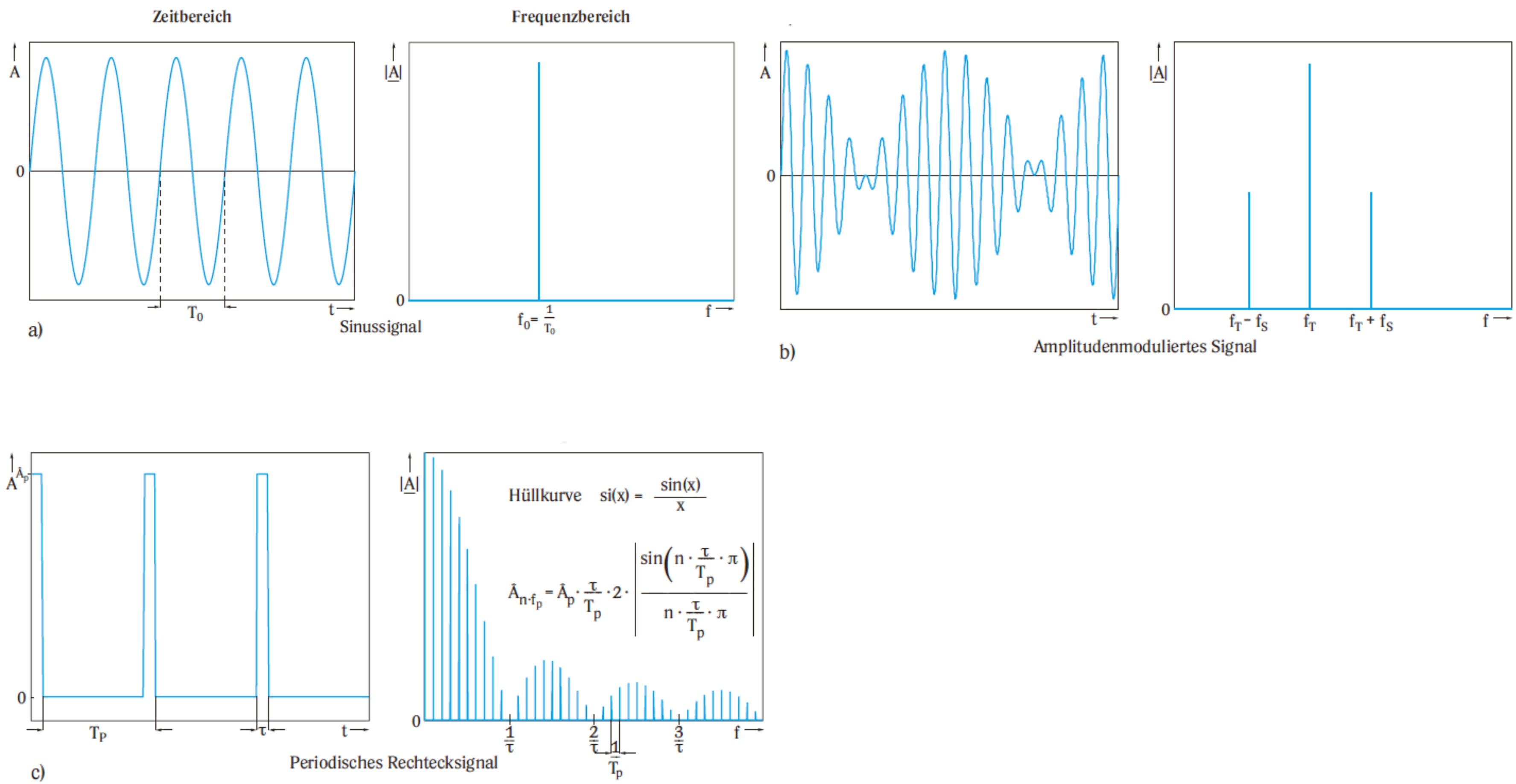
Rechteckfunktion aus 4 Harmonischen Funktionen aufgebaut (Sinusfunktionen), a_0=0

f_0 als kleinste Frequenz (Grundschwingung)

Beispiele

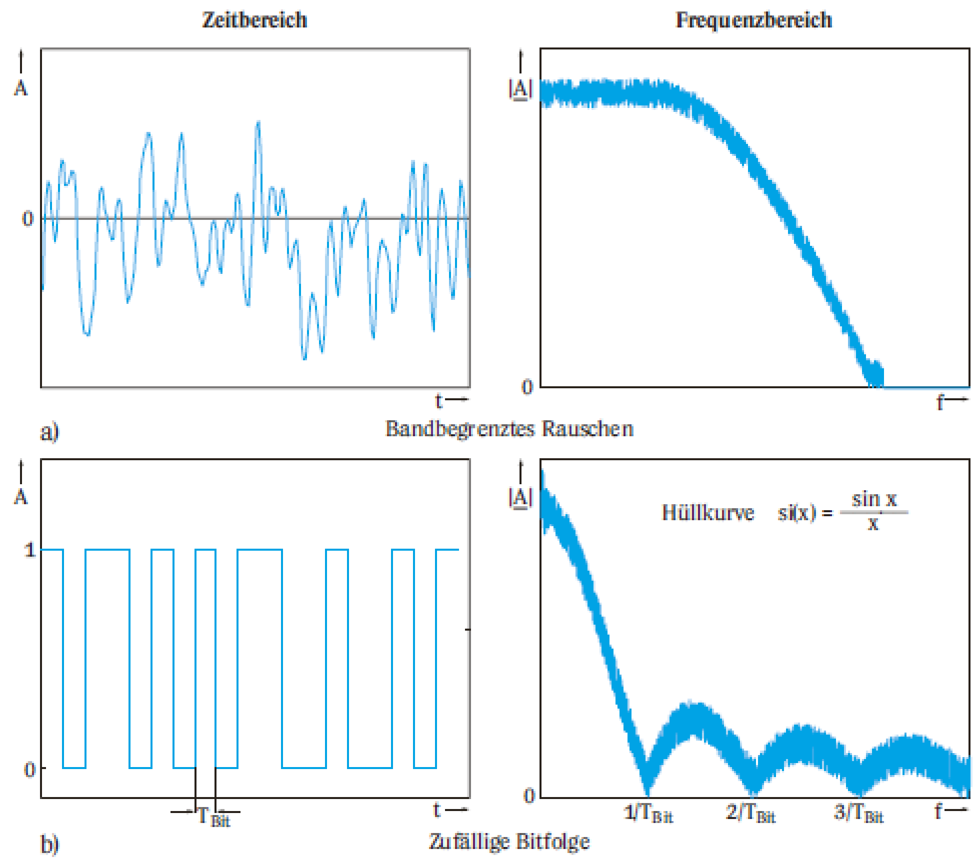
Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Beispiel: Periodische Funktionen



Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

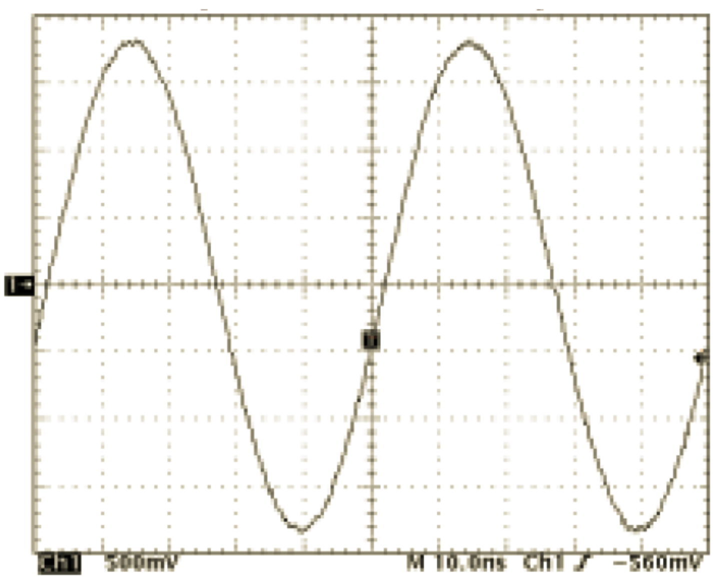
Beispiel: Nichtperiodische Funktionen



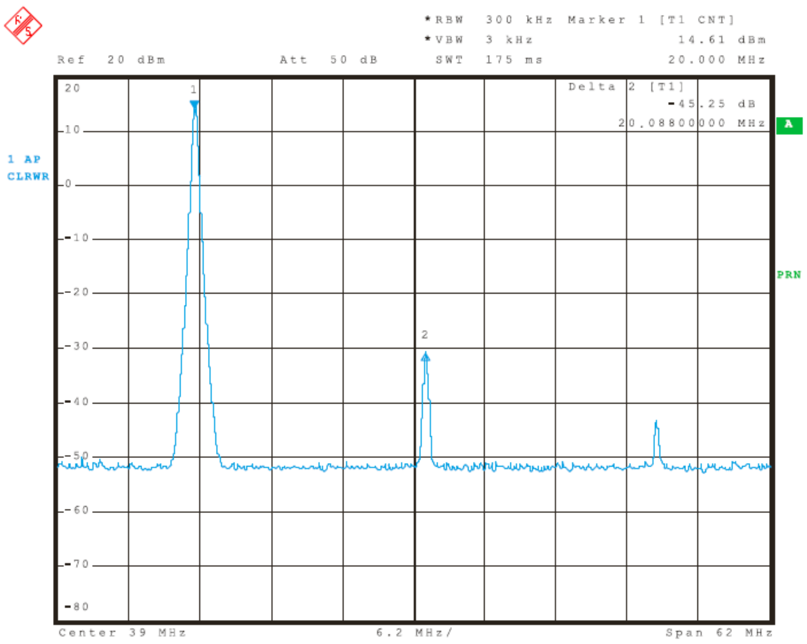
Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Beispiel: Anwendung der Spektralanalyse

- Liegt ein reines Sinussignal vor?
- Oszilloskop (Zeitbereich) vs. Spektrumanalysator (Frequenzbereich)



Oszillogramm



Spektrum

Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Fourier-Transformation

Signale können dargestellt / gemessen werden im:

a) Zeitbereich
b) Frequenzbereich (spektraler Bereich)

Beide Darstellungsarten sind verknüpft über FOURIER-Transformation

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Fouriertransformierte, „Fourierspektrum“ von x(t)
Dimension: Amplitude x Zeit, Amplitude/Frequenz

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{S}(f) e^{j2\pi ft} df$$

Rücktransformation

Fourier-Transformation

Beispiele:

a) periodische Signale → Linienspektrum

b) Nichtperiodische Signale → kontinuierliches Spektrum

c) Für viele Signalformen Angabe geschlossener Lösung des Fourier-Integrals möglich:

Rechteckimpuls

$$x(t) = A\,\mathit{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow \underline{S}(f) = AT\,\mathit{si}(\pi f T)$$

Dreieckimpuls

$$x(t) = A \wedge \left(\frac{t}{T}\right) \rightarrow \underline{S}(f) = AT\,\mathit{si}^2(\pi f T)$$

Cosinus-Signal

$$x(t) = A\,\mathit{cos}(2\pi f_0 t) \rightarrow \underline{S}(f) = \frac{A}{2}\delta(f + f_0) + \frac{A}{2}\delta(f - f_0)$$

Darstellung des Spektrums

Amplituden- vs. Leistungsspektrum:
- Angabe von Amplitude bzw. Leistung der Schwingungskomponenten
- Spitzen- oder Gleichrichtwertmessung → Berechnung des Effektivwertes
- Leistung (Eingangswiderstand des Spektrum-Analysators R_e)

$$P(f) = \frac{U_{eff}^2(f)}{R_e}$$

Darstellung am Spektrum-Analysator
- Signalkomponente mit Frequenz f_0 ist senkrechte Linie bei $f=f_0$
- Höhe der Linie = Signalanteil (U_{eff} bzw. P)

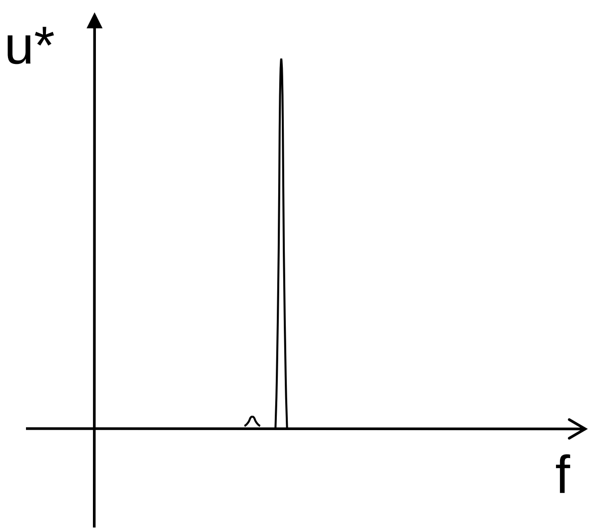
$\longrightarrow$

U_{eff} bzw. P der einzelnen Schwingungsanteile als Funktion der Frequenz f

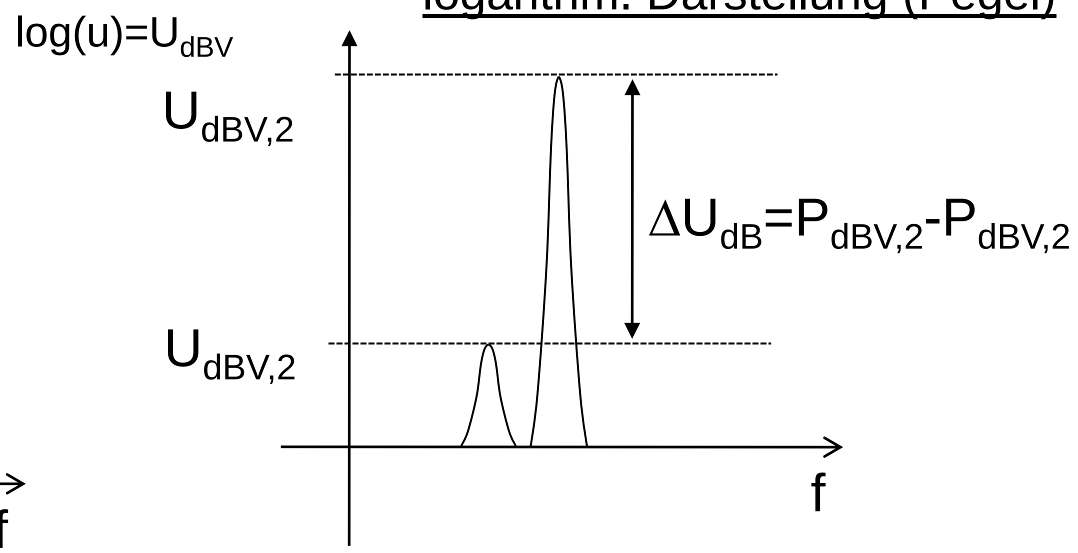
Darstellung des Spektrums

- Lineare Skalierung
- Logarithmische Skalierung,
  Vorteil: - großer Wertebereich bei gleicher relativer Auflösung
  - Sichtbarkeit von kleinen Signalanteilen

lineare Darstellung



logarithm. Darstellung (Pegel)



- „P“: Pegel, (Spannung, Leistung)
- Pegel: dBm (Leistung), dBV (Spannung)

Elektrische Leistungs- und Spannungspegel

Leistungspegel

$$P_{[dBm]} = 10\,log\left(\frac{P_{[lin]}}{1mW}\right)dBm$$ Bezugsgröße: 1mW

$$P_{[dBW]} = 10\,log\left(\frac{P_{[lin]}}{1W}\right)dBW$$ Bezugsgröße: 1W

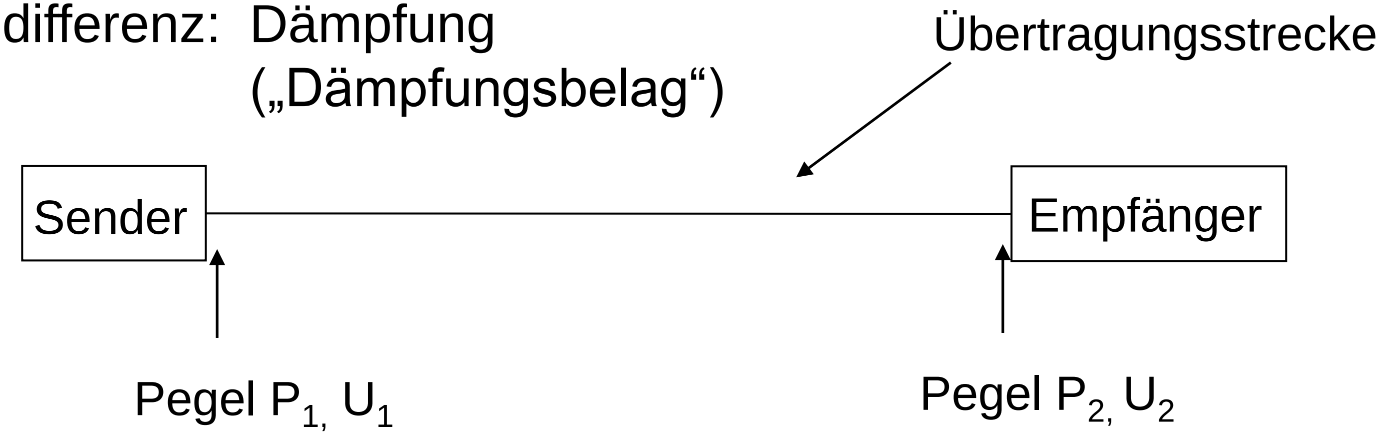
Spannungspegel

$$U_{eff[dBV]} = 20\,log\left(\frac{U_{eff[lin]}}{1V}\right)dBV$$ Bezugsgröße: 1V

$$U_{eff[dB\mu]} = 20\,log\left(\frac{U_{eff[lin]}}{1\mu V}\right)dB\mu V$$ Bezugsgröße: 1µV

Dämpfung -- Pegeldifferenzen

Pegeldifferenz: Dämpfung
(„Dämpfungsbelag“)

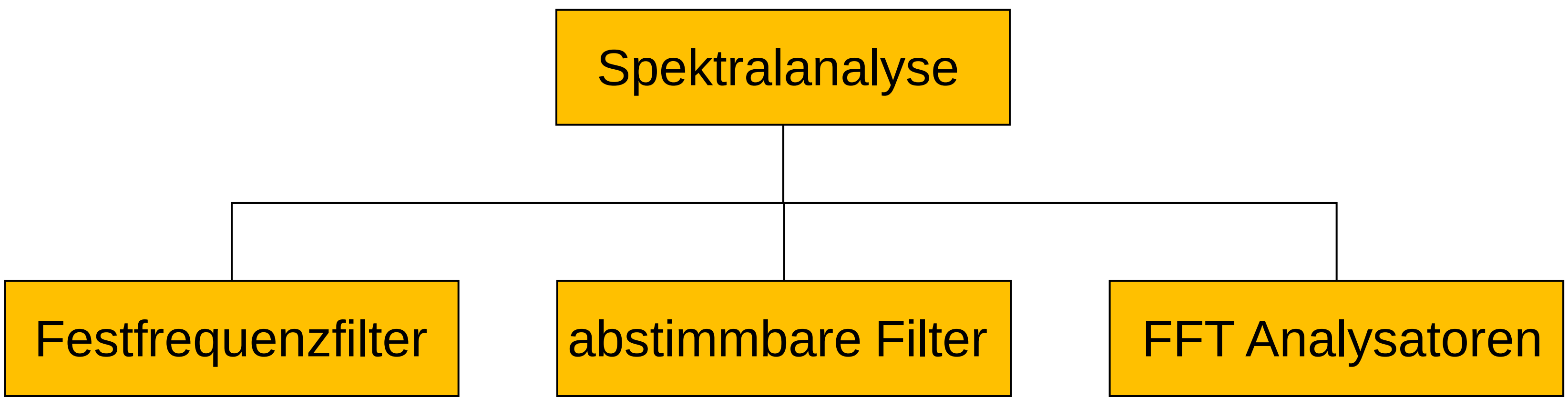


$$\Delta P_{dB} = 10\,log\left(\frac{P_{1_{[lin]}}}{P_{2_{[lin]}}}\right) dB = P_{1_{[dBm]}} - P_{2_{[dBm]}}$$

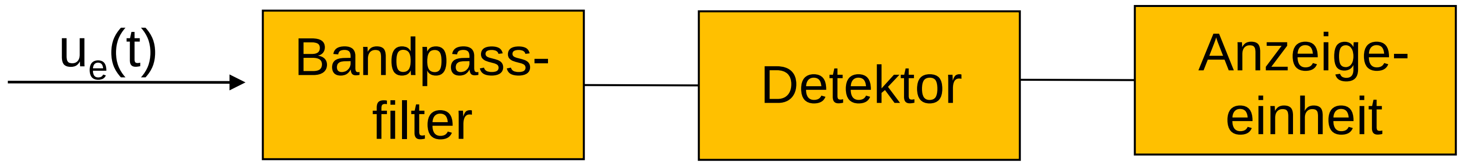
$$\Delta U_{dB} = 20\,log\left(\frac{U_{1_{[lin]}}}{U_{2_{[lin]}}}\right) dB = U_{1_{[dBV]}} - U_{2_{[dBV]}}$$

an identischem Widerstand R_1, R_2 : $\Delta P_{dB} = \Delta U_{dB}$

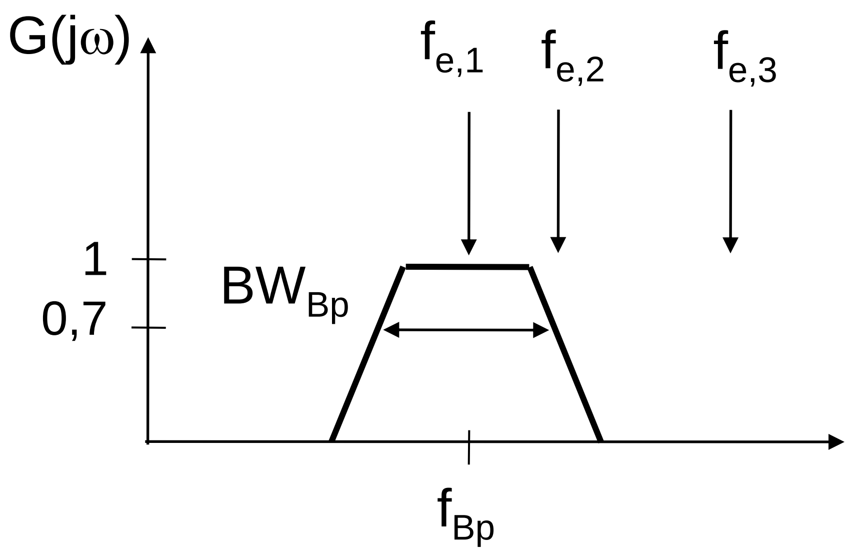
Frequenzselektive Signalmessung



Festfrequenzanalysatoren: Bandpassempfänger



Bandpassfilter:

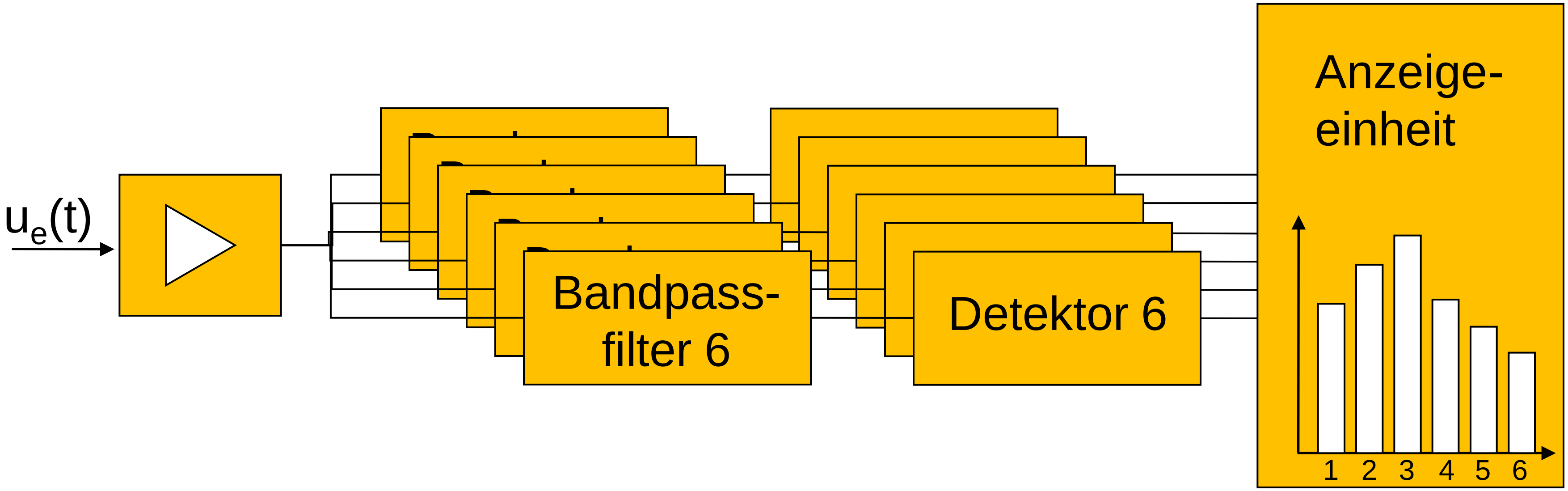


$f_{e,1}$:

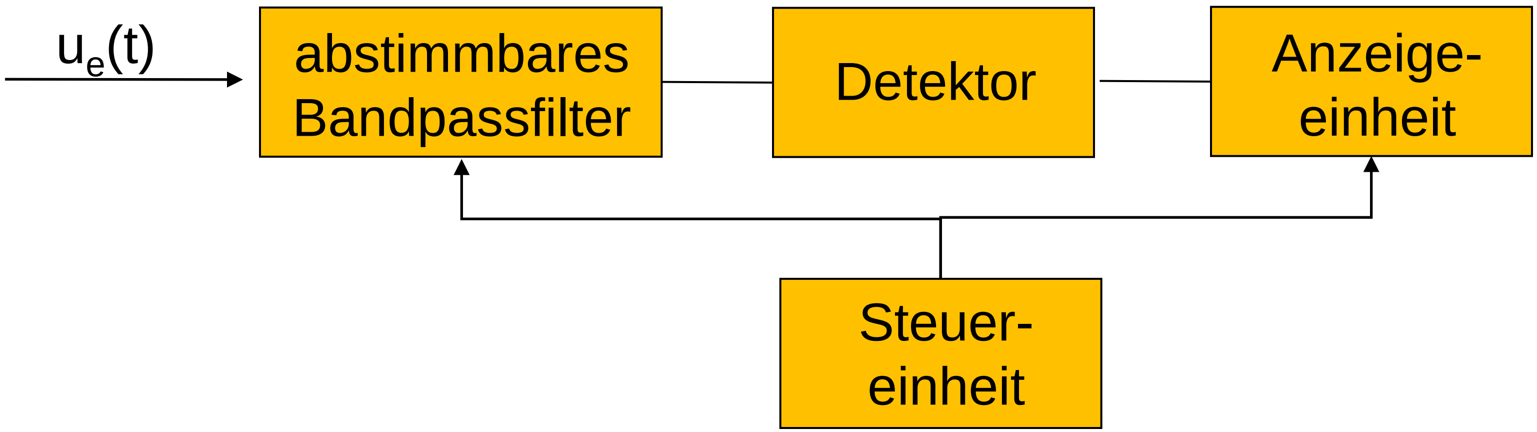
$f_{e,2}$:

$f_{e,3}$:

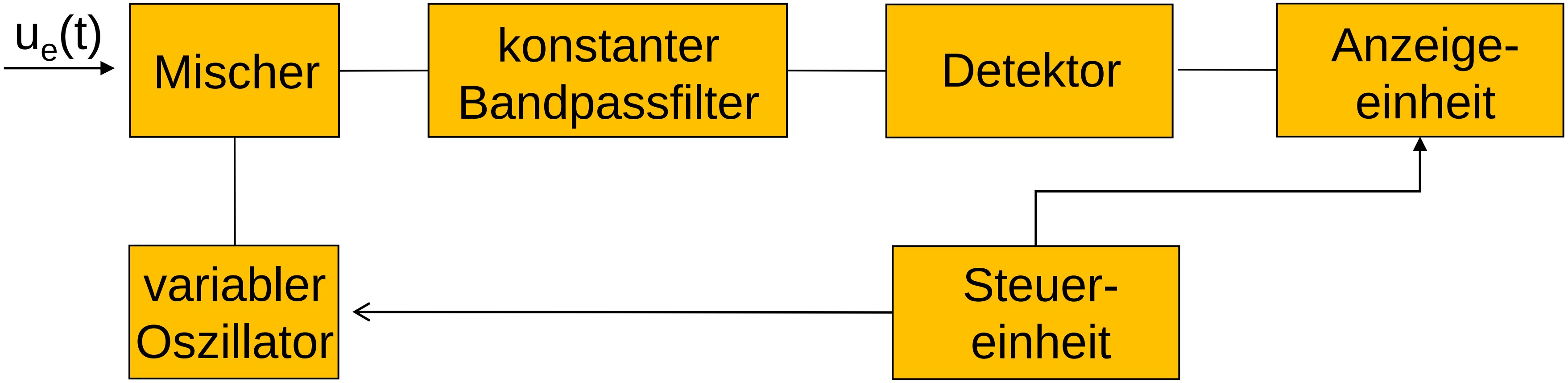
Festfrequenzanalysatoren: Filterbank



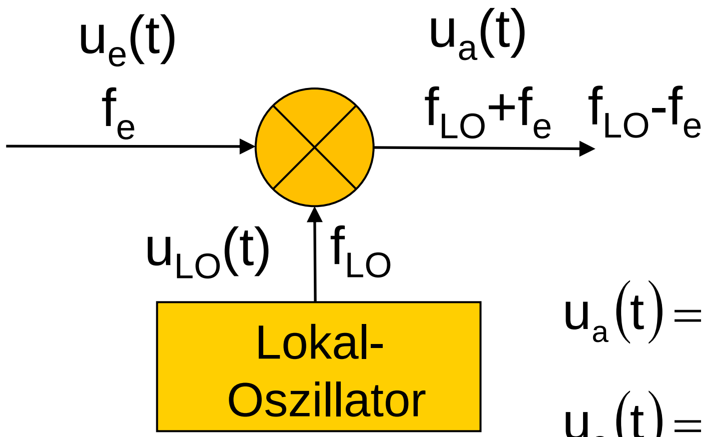
Abstimmbares Bandbassfilter



Überlagerungsdetektion



Überlagerungsdetektion



$$u_a(t) = k u_{LO}(t) u_e(t)$$

$$u_a(t) = k \hat{U}_{LO} \cos(2\pi f_{LO} t) \hat{U}_e \cos(2\pi f_e t)$$

$$u_a(t) = k \frac{1}{2} \hat{U}_{LO} \hat{U}_e \left(\cos(2\pi(f_{LO} + f_e)t) + \cos(2\pi(f_{LO} - f_e)t)\right)$$

mit

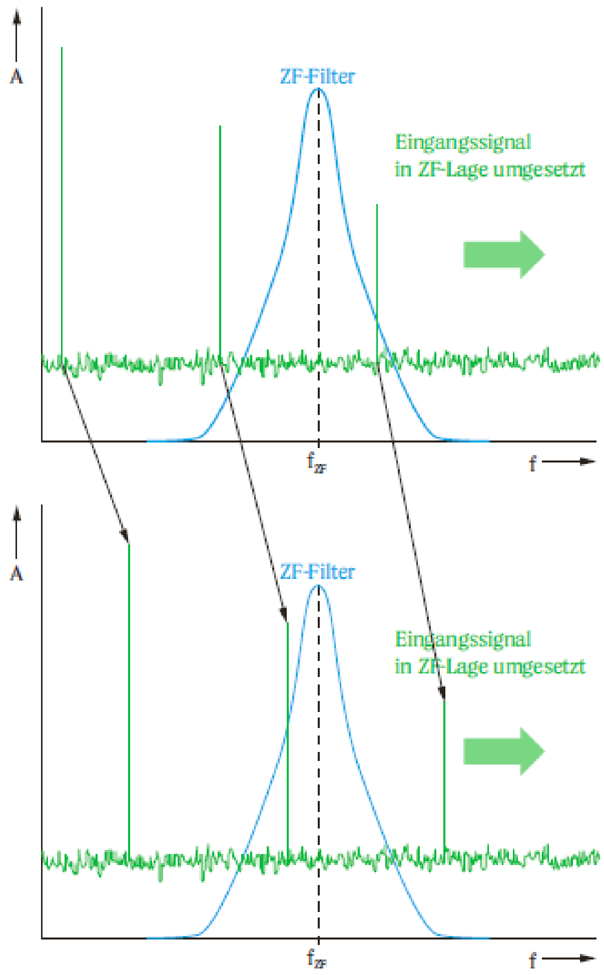
$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

<u>Frequenzselektion</u>:

$$f_e = f_{analyse} = f_{LO} - f_{Bp}$$

Abstimmung der Analysefrequenz durch Wahl der Oszillatorfrequenz

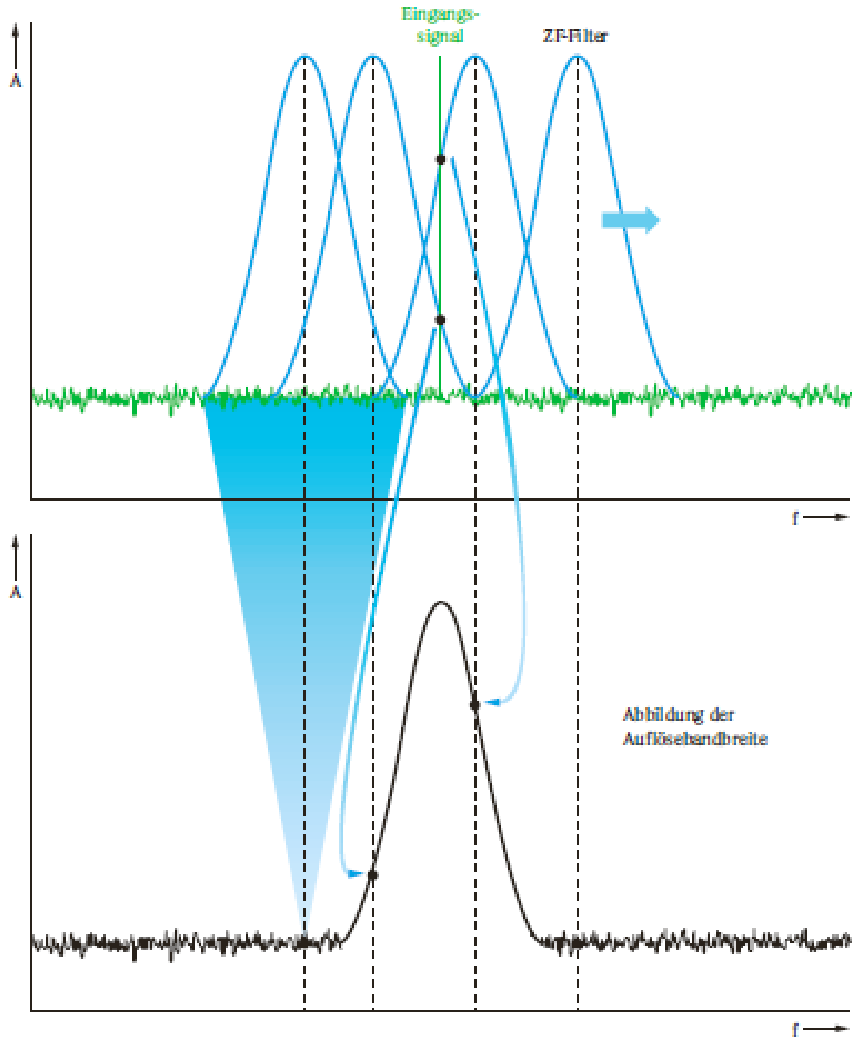
Prinzip: Überlagerungsdetektion



gesamtes Signal (ZF-Signal) wird am (festen) Filter „vorbeigeschoben“

Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Darstellung/Erklärung der Auflösung

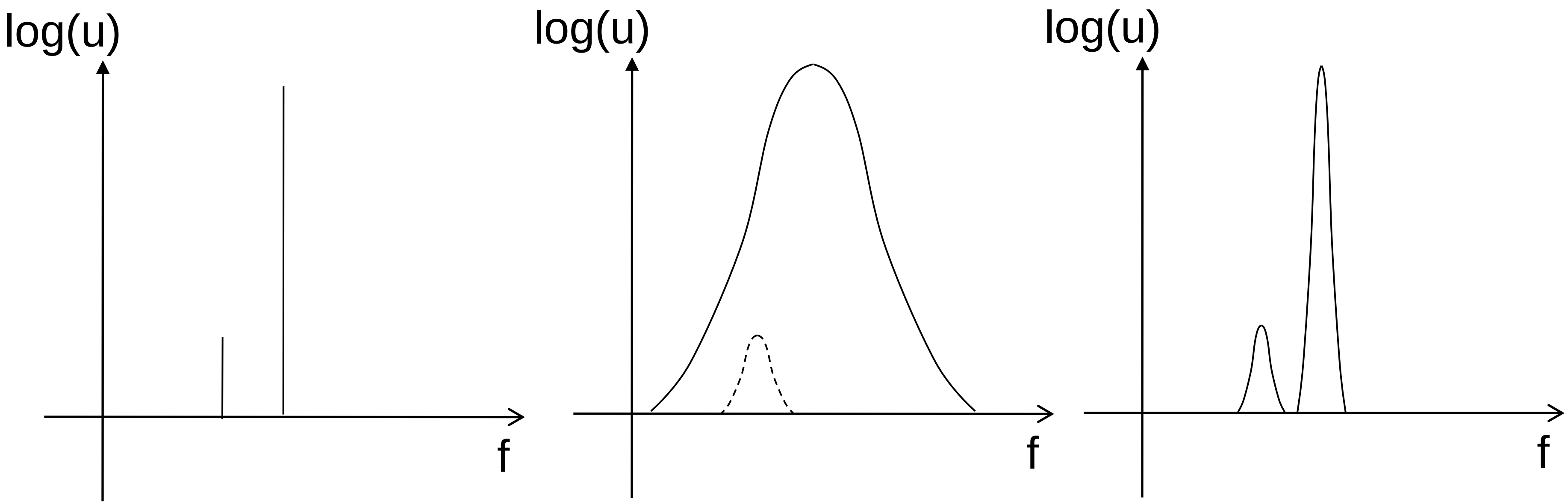


Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Auflösungsbandbreite

Messsignal

Anzeige am Spektrumanalysator



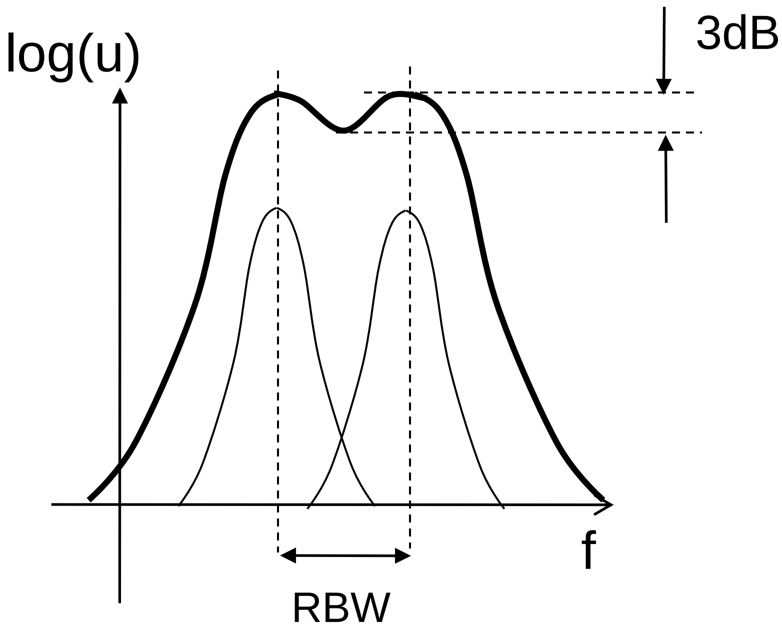
zwei diskrete
Spektrallinien

große
Filterbandbreite

kleine
Filterbandbreite

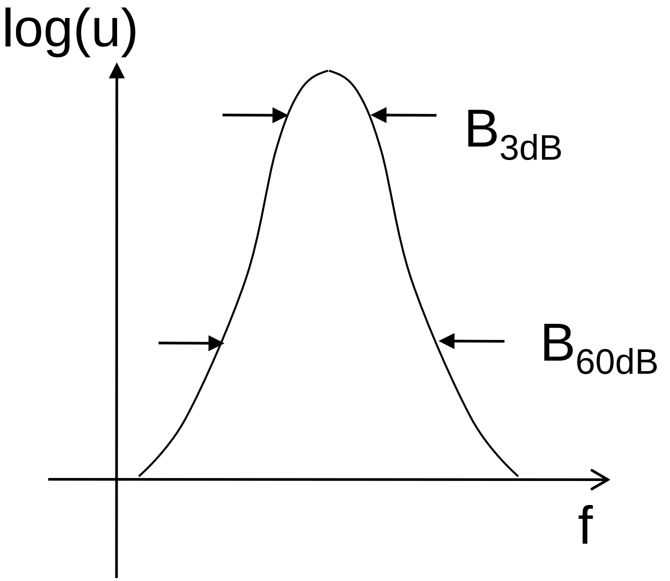
Definition der Auflösungsbandbreite (Resolution Bandwidth, RBW)

- „3dB Kriterium“ → „Einsattlungskriterium“



2 Signale gleicher Amplitude (B_{signal}<<RBW)

Formfaktor



Formfaktor (shape factor, SF):

$$SF_{60/3dB} = \frac{B_{60dB}}{B_{3dB}}$$

$\longrightarrow$ Maß für die Flankensteilheit

Eigenschaften der Spektrumanalysatoren

<u>Frequenzbereich:</u>
- Audioanalysatoren: bis 100 kHz
- Universalanalysatoren 100 Hz bis 3 GHz
- Mikrowellenanalysatoren bis 20 GHz und höher

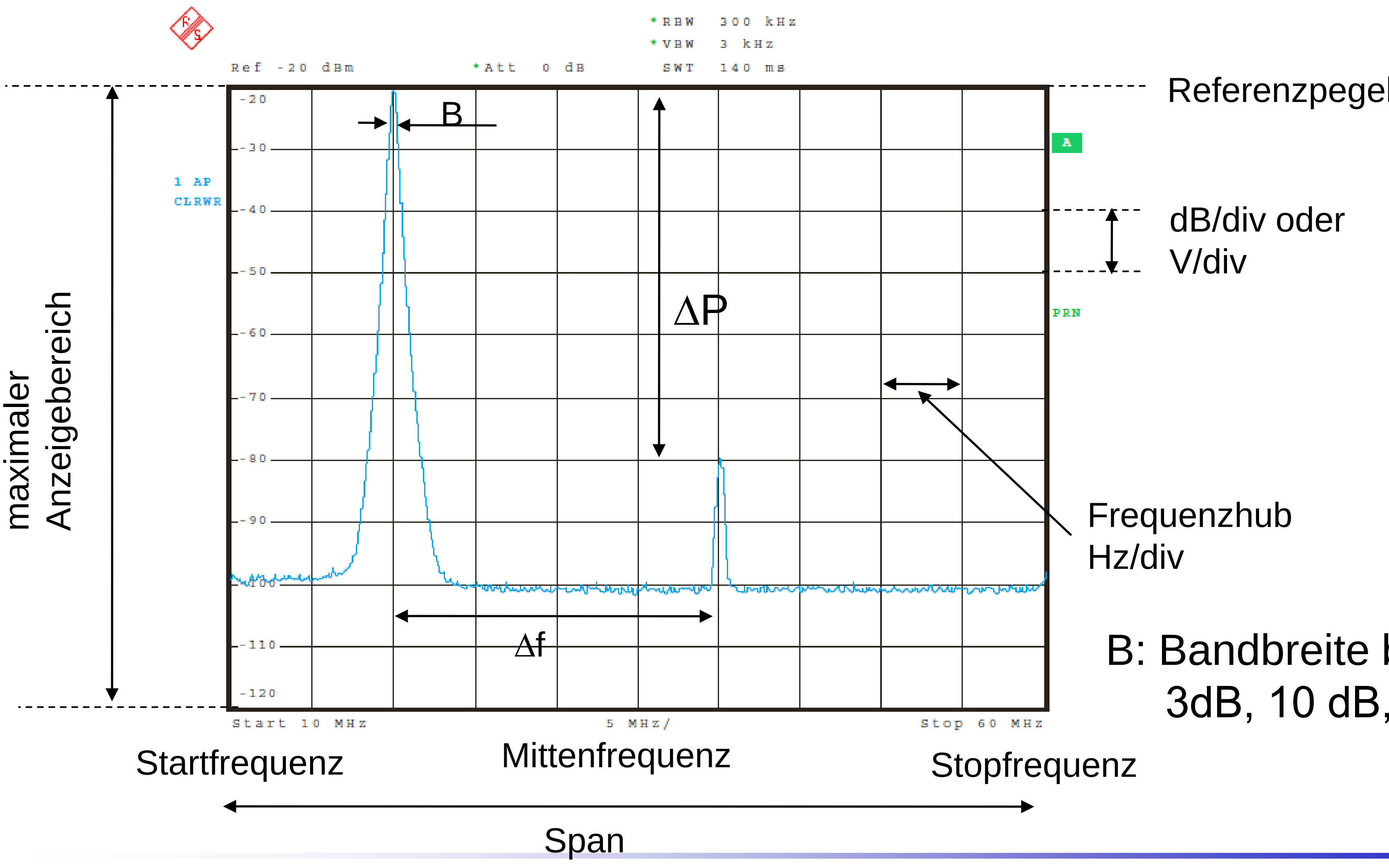
Wahl des Frequenzbereichs über Fstart, Fstop, bzw. Fcent, Fspan
Frequenzscan: „frequency sweep",
Übersichtsmessung, dann Frequenzbereich wählen

<u>Auflösungsbandbreite (resolution bandwidth)</u>
- bestimmt Frequenzselektivität (Trennung benachbarter Signale)
- kleine Bandbreite = kleiner Rauschbeitrag im Analyseband
- kleine Bandbreite = große Einschwingzeit, lange sweep time
- typisch: 10MHz bis 1Hz

Elementare Einstellmöglichkeiten

- Frequenzbereich (x-Achse)
  - F_{center}, F_{span}, F_{start}, F_{stop} (→Frequenzhub Hz/div)
  - Anzahl der Messpunkte
  - Frequenz-Auflösung (Auflösungsbandbreite)
  - Scan-Ablaufzeit (sweep time)
- Pegelbereich (log. y-Achse)
  - Referenzpegel (max. anzeigbarer Pegel)
  - Anzeigebereich oder Auflösung (dB/div, Zahl der div. → Anzeigebereich)
- lineare Anzeige
  - max. Wert, Auflösung (V/div) bzw. Anzeigebereich

Bildschirmdarstellung



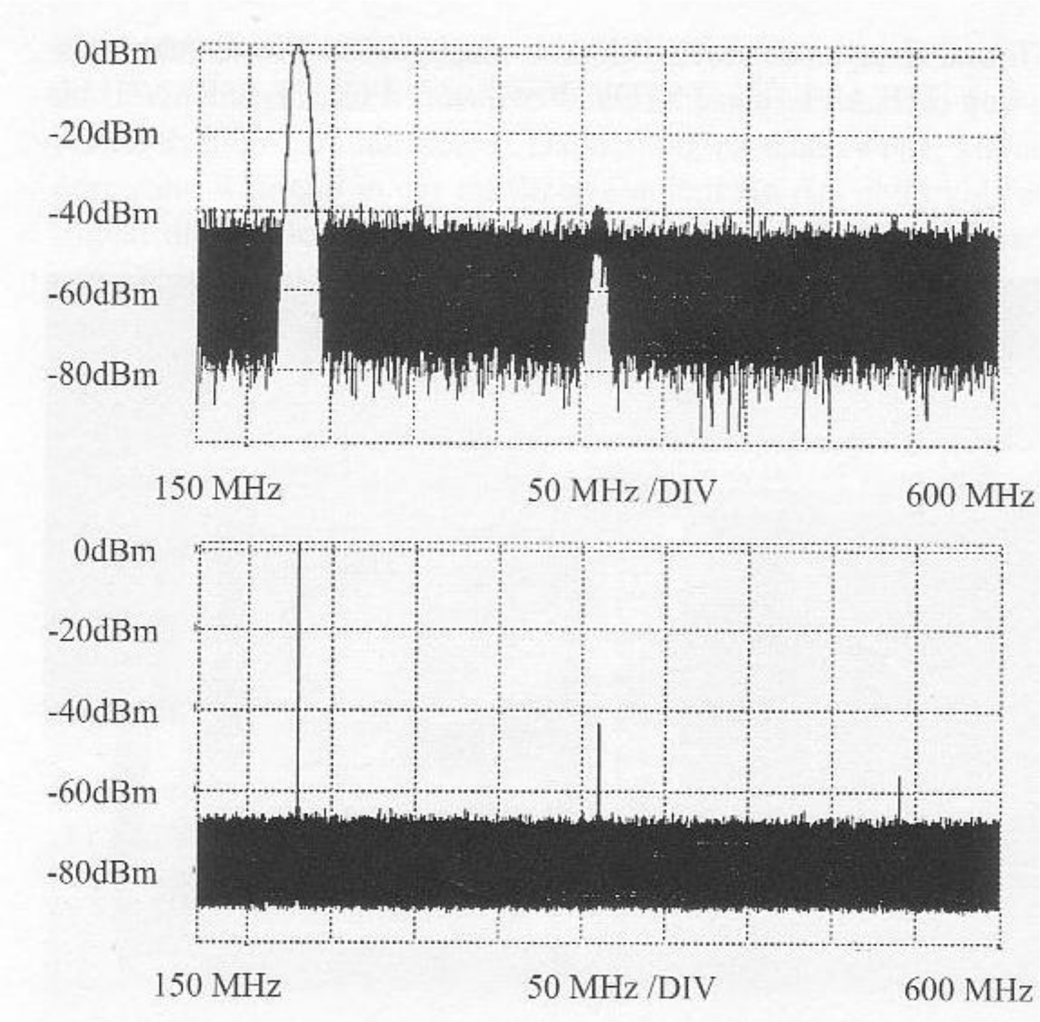
B: Bandbreite bei 3dB, 10 dB, …

Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“, Werkschrift, Rohde und Schwarz, 2000

Beispiel
Kompakter Spektrumanalysator bis 18 GHz

Bild: Rohde & Schwarz

Auflösungsbandbreite



Auflösungsbandbreite
10 MHz

Auflösungsbandbreite
30 kHz

- Rauschpegel
- Signalbreite
- Signalpegel

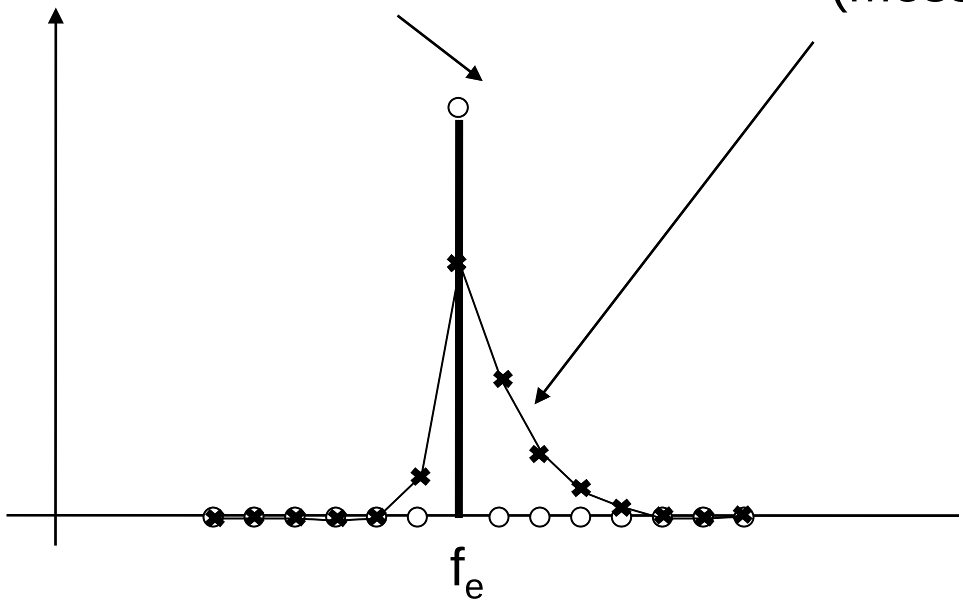
!

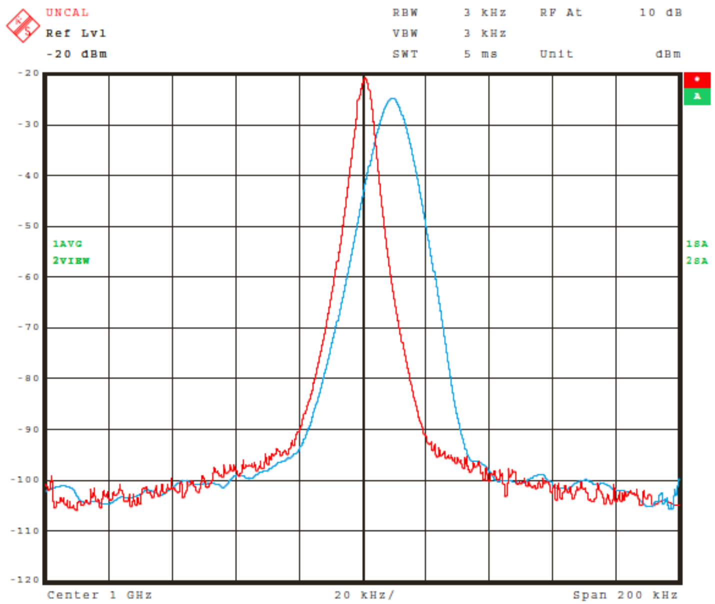
Quelle: Mühl: Einführung in die Elektrische Messtechnik“

Durchstimmzeit (Sweep time)

Lange sweep time
(eingeschwungene Messpunkte)

Durchstimmzeit zu kurz
(Messpunkte nicht eingeschwungen)





Faustformel für sweep time
(dyn. Messungenauigkeit <1%)

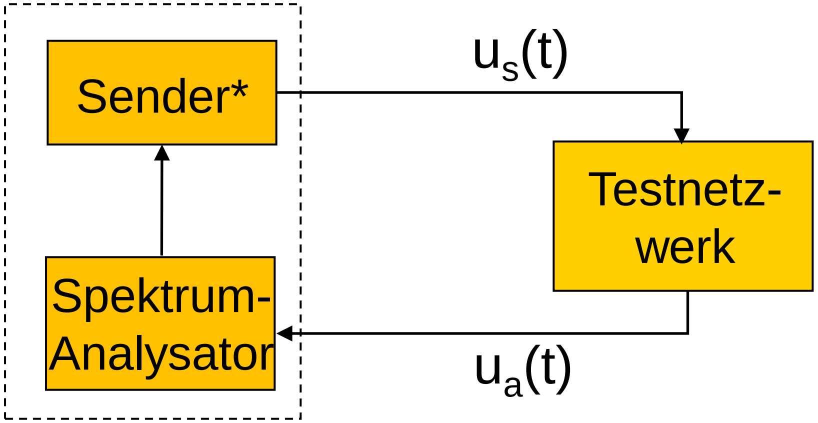
$$\Delta t_{sweep} \approx 2 \frac{f_{span}}{RBW^2}$$

f_{span}: Frequenzbereich
RBW: Auflösungs-bandbreite

Netzwerkanalyse

Messziel: Charakterisierung der Übertragungseigenschaften von
- Bauelementen (z.B. Filtern)
- Baugruppen (z.B. Verstärker)
- Systemen (Übertragungssysteme, Sende-, Empfangseinheiten)

Prinzip



<u>Skalare Netzwerkanalyse</u>

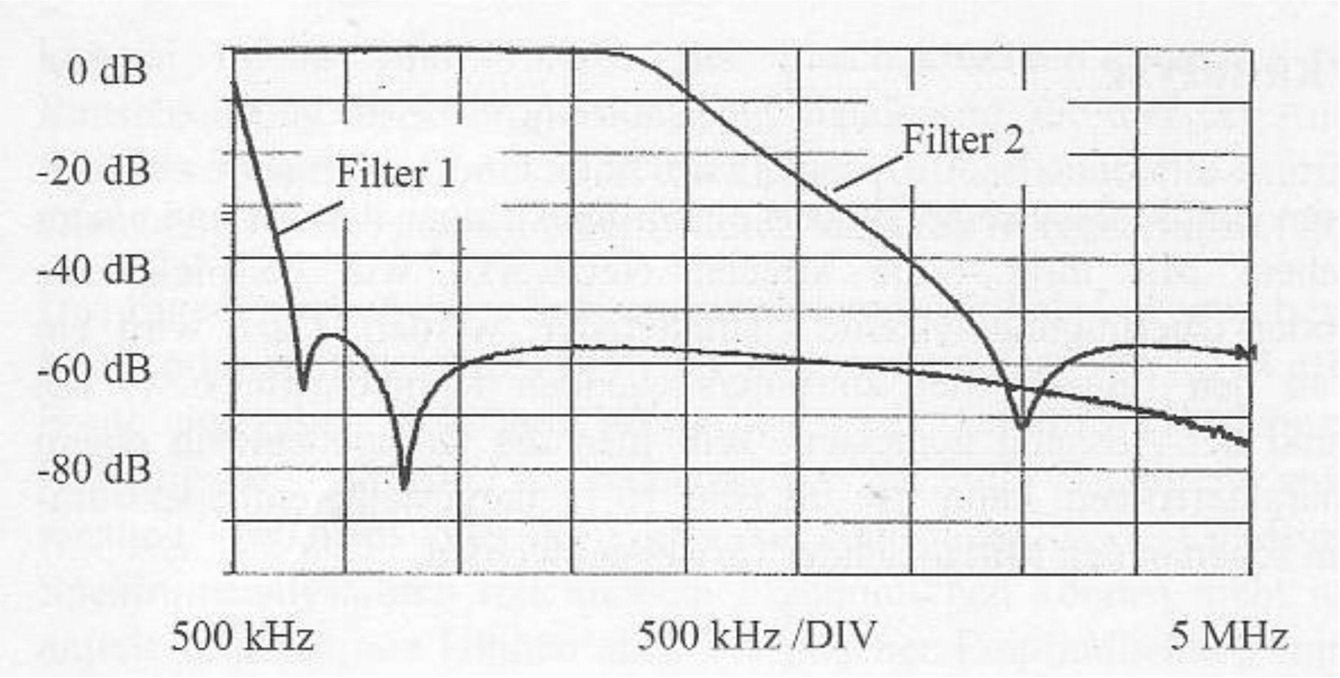
$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{U_{eff,a}(\omega)}{U_{eff,s}(\omega)}$$

<u>Vektorielle Netzwerkanalyse</u>

$$\underline{G}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a(j\omega)}{\underline{U}_s(j\omega)} = \left|G(j\omega)\right| e^{j\Delta\varphi}$$

* Mitlaufsender, tracking generator

Beispiel: Bestimmung von Filterkurven



Amplitudengänge zweier Tiefpassfilter (f_{g1}<500kHz, f_{g2}=2,3MHz) bestimmbar: 3dB Grenzfrequenz, Sperrdämpfung, Dämpfungsverläufe (ripple) über der Frequenz

Quelle: Mühl: Einführung in die Elektrische Messtechnik“

FFT-Analysatoren

Messziel: Bestimmung des Spektrums eines Signals, welches
- abgetastet
- digitalisiert wird

Bestimmung des Spektrums durch Algorithmus der „fast fourier transformation“

Mathematik (Diskrete Fourier-Transformation, DFT):

$$\underline{S}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$S(f) = \left|\underline{S}(f)\right|$$

$$\underline{S}_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_a(t) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_a) e^{-j2\pi fnT_a}$$

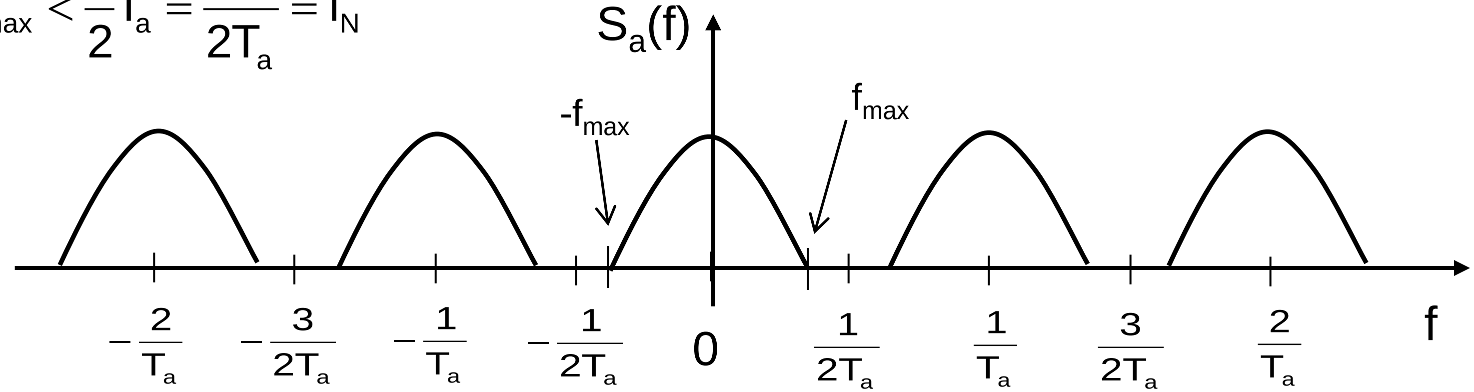
Periode der Abtastung: T_a
Abtastfrequenz: $f_a=1/T_a$

Wiederholung: Abtasttheorem

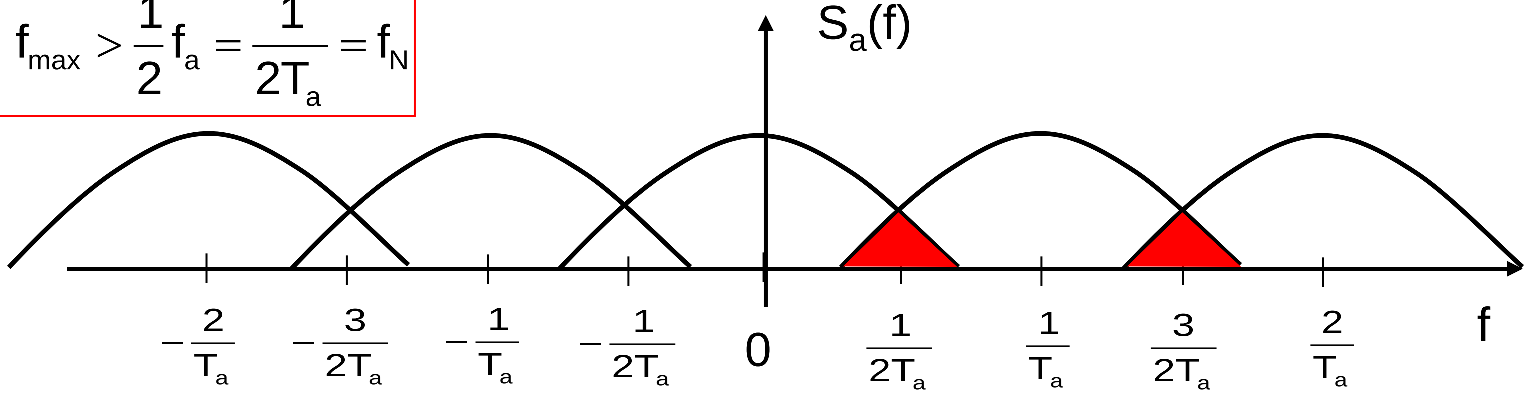
Spektrum des Signals nach Abtastung:

f_N: „Nyquist-Frequenz“

wenn $\quad f_{max} < \frac{1}{2} f_a = \frac{1}{2T_a} = f_N$



wenn $\quad f_{max} > \frac{1}{2} f_a = \frac{1}{2T_a} = f_N$



Spektren überlappen sich → „Aliasing“ – Effekt oder „Geisterspektren“

Diskrete Fouriertransformation

$$\underline{S}_a(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a) e^{-j2\pi f n T_a}$$

DFT für Signalausschnitt der Dauer NT_a für beliebige Frequenzen f

$$f_k = k\frac{1}{NT_a}$$

diskrete Frequenzpunkte im Intervall

$$0 \le f \le f_a = \frac{1}{T_a}$$

$$\underline{S}\left(k\frac{1}{NT_a}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} s(nT_a) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$

DFT für diskrete Frequenzpunkte f_k

$$0 \le k \le N-1$$

$\longrightarrow$ Berechnung mit Fast Fourier Transformation

Beachte: N muss dafür eine Potenz von 2 sein

Fensterfunktionen (Window functions)

Fensterung: Verwendung von nur endlich vielen Abtastwerten

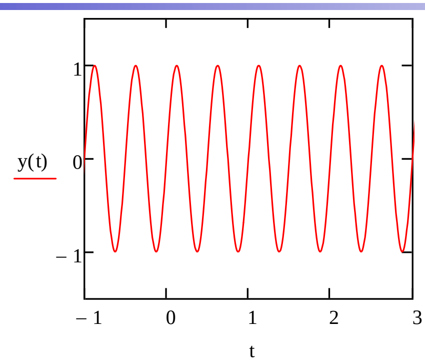
Fensterfunktion: $w(t)$

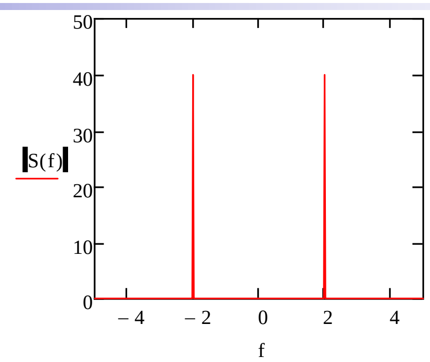
Fensterung: $s_w(t) = w(t)s(t)$

Frequenzbereich: $w(t)s(t) \rightarrow \underline{W}(f) * \underline{S}(f)$

Beispiel:
Rechteck-Funktion als Fensterfunktion

$$y(t) = sin(4\pi t)$$

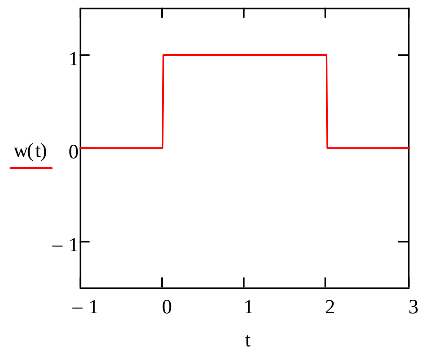


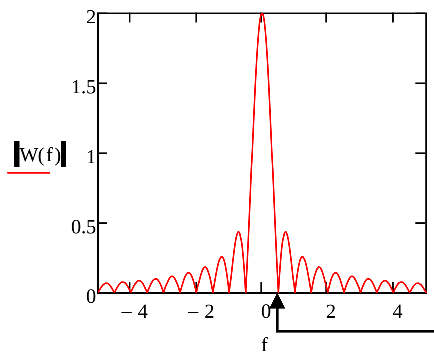


$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$w(t) = \begin{vmatrix} 1 \text{if } 0 \le t \le 2 \\ 0 \text{ otherwise} \end{vmatrix}$$

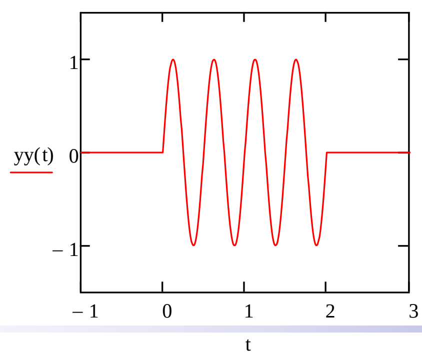
$$NT_a = 2$$

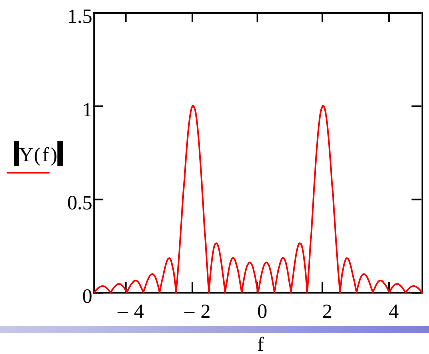




$$\frac{1}{NT_a}$$

$$yy(t) = w(t)y(t)$$





$$Y(f) = W(f) * Y(f)$$

Wichtige Bedingungen für richtige Wiedergabe des Spektrums durch FFT

- Messsignal muss periodisch sein (Periode T_0)
- Beobachtungsdauer (Zeitdauer in der das Signal abgetastet wird) muss ein ganzzahliges Vielfache der Periodendauer T_0 sein):

$$NT_a = iT_0 = i\frac{1}{f_{signal}}$$

i: ganze Zahl

- in Praxis nicht erfüllbar

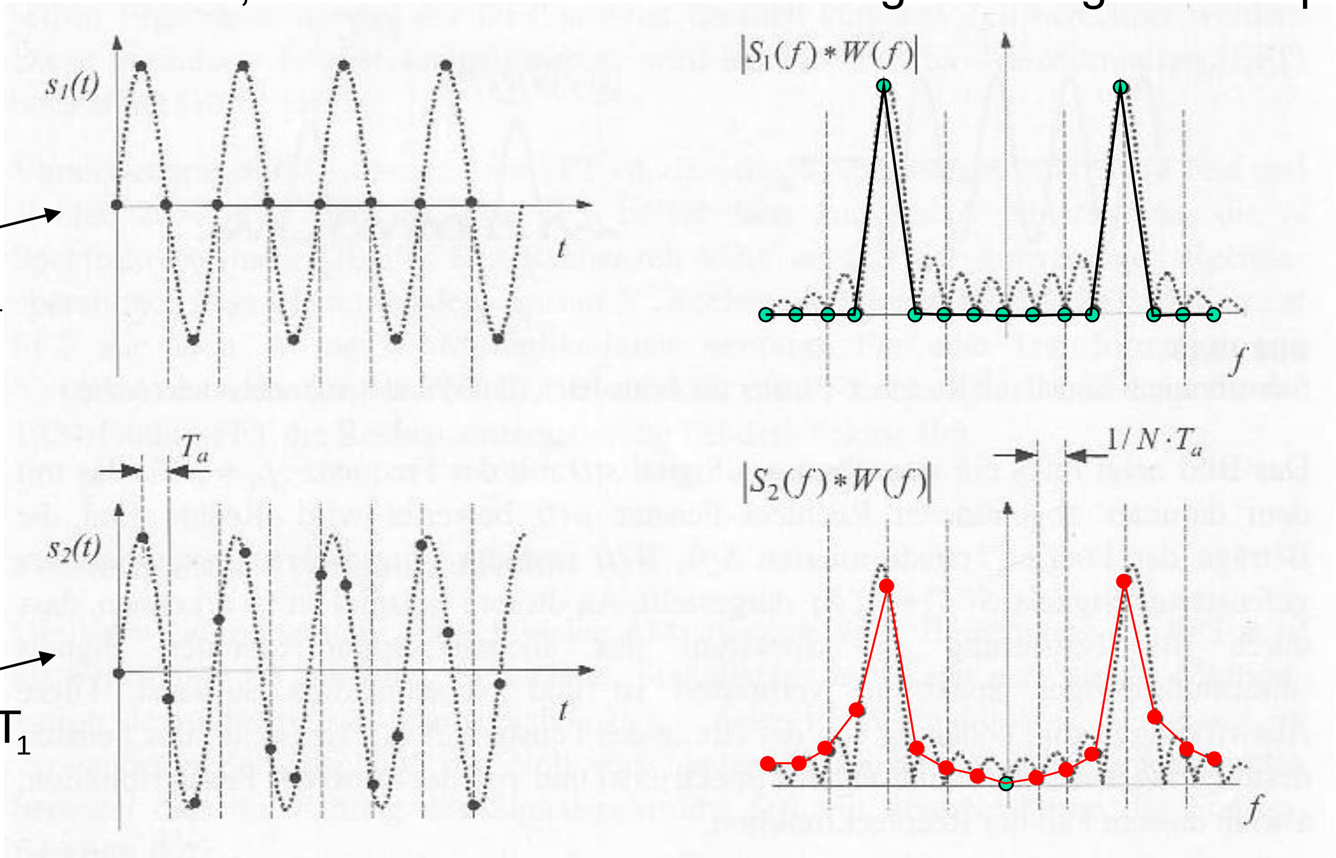
- → systematische Messabweichung

Systematische Messabweichung „Leakage effect“ – „Leckeffekt“

…durch Messzeit, welche nicht der Periodenlänge des Signals entspricht

$NT_a = 4T_1$

$NT_a = 4.25T_1$

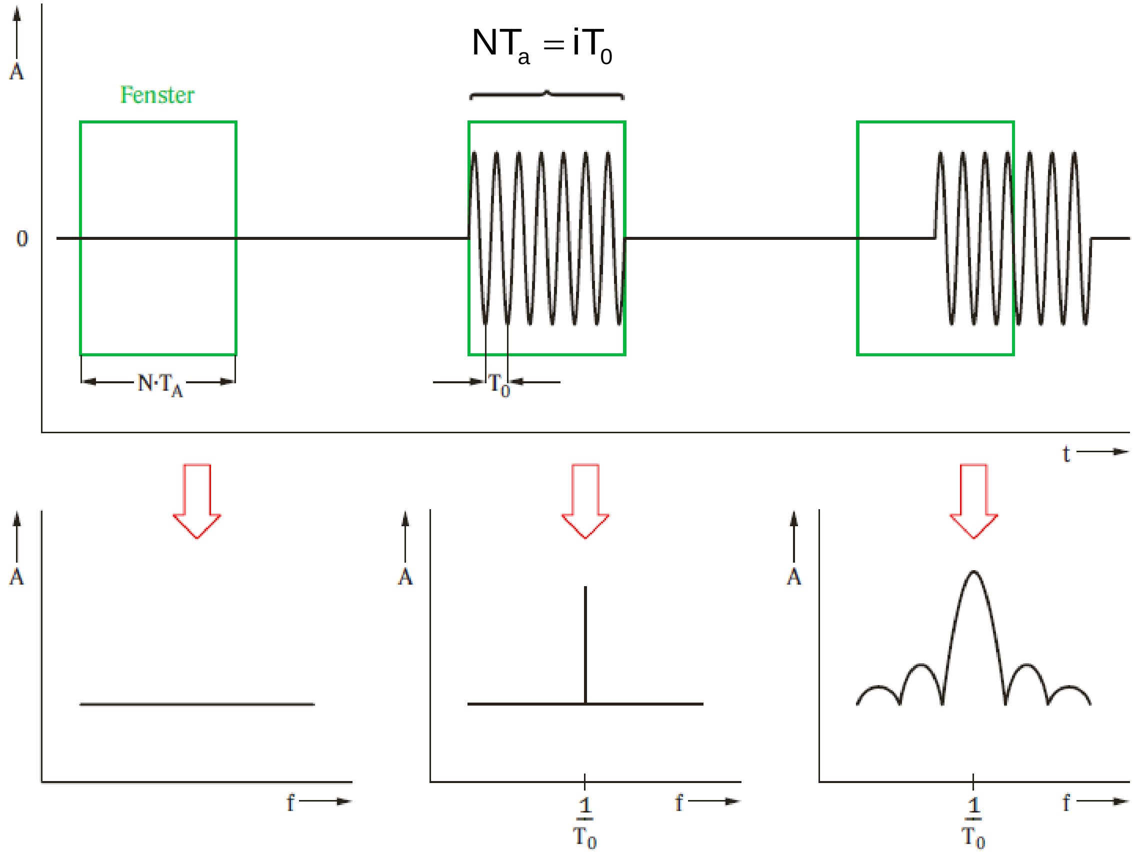


Beispiel

1. artifizielle Frequenzanteile
2. falsche Amplitudenwerte

FFT Analyse periodischer Signale

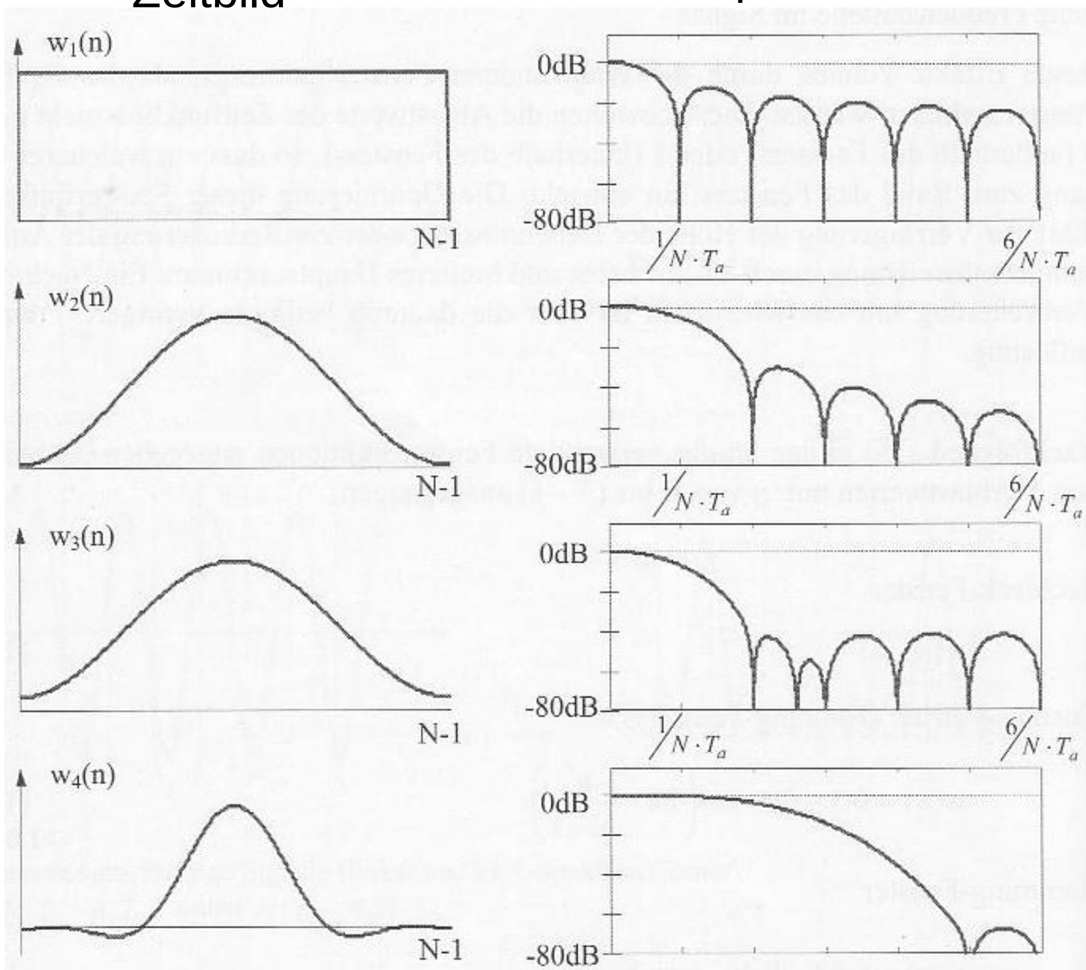
- Problem: nur teilweise Überdeckung von Beobachtungsintervall und Signal



Quelle: C. Rauscher: „Grundlagen der Spektrumanalyse“

Beispiele für Fensterfunktionen

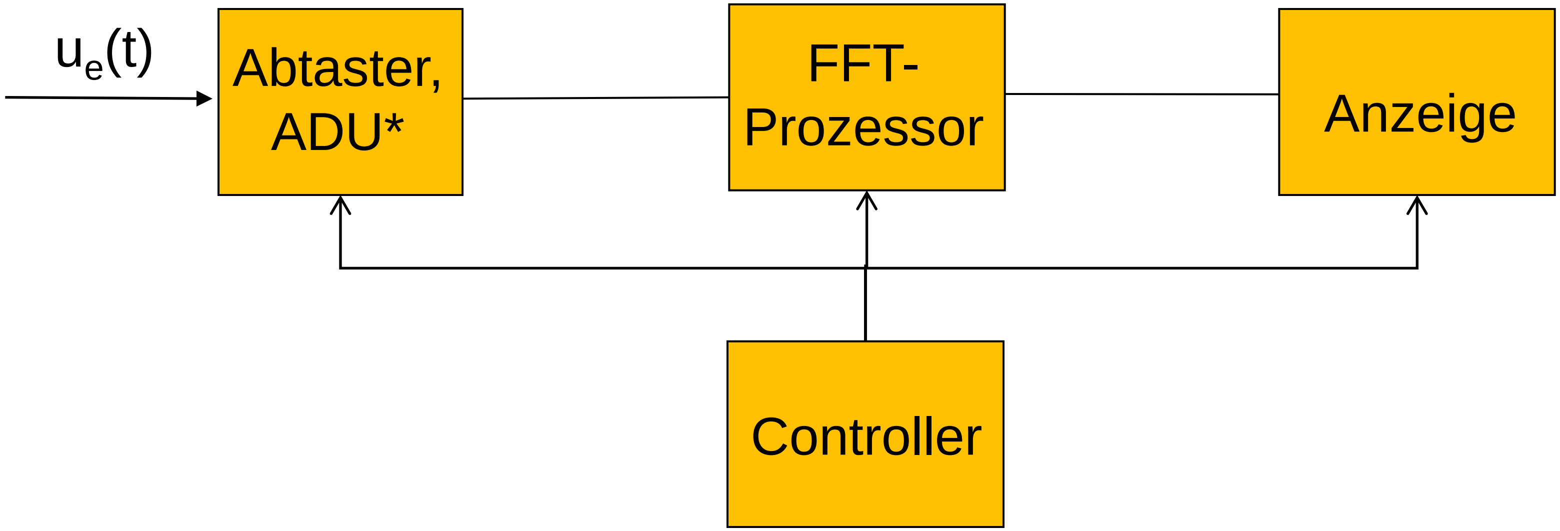
Zeitbild | Frequenzbild



Rechteckfunktion	einfach
Cosinusfenster (Hanning-Funktion)	abnehmende Nebenmaxima
Hamming-Fenster	niedrige Nebenmaxima
Flattop-Fenster	hohe Amplituden-genauigket

Quelle: Mühl: Einführung in die Elektrische Messtechnik“

Aufbau eines FFT Analysators



* und Gewichtung (Multiplikation) mit gewählter Fensterfunktion

FFT Analysator

- aus N Abtastwerten im Zeitbereich → N Spektralwerte des Signals (diskrete, äquidistante Frequenzen)
- aufwändige digitale Signalanalyse nötig →
  - Geräte heute kHz bis in den MHz Bereich
  - bzw. (offline) FFT Funktion in DSOs
- Spannungseffektivwerte, Leistungswerte
- Einstellmöglichkeiten
  - Abtastfrequenz, $f_a=1/T_a$
  - Fensterbreite NT_a (bestimmt Abstand der Frequenzpunkte ($f_k=k/(NT_a)$)
  - Art der Fensterfunktion

Lernziele Kapitel 13

- Spektrumanalyse (Fourierreihen)
- Interpretation der Spektren (technische Definitionen)
- Fouriertransformation
- Darstellung des Spektrums
- Leistungs- und Spannungspegel
- Technologien frequenzselektiver Messmethoden
- Stichwort: Netzwerkanalyse
- FFT-Analysatoren
  - diskrete Fouriertransformation
  - Leckeffekt, „leakage effect“
  - Fensterfunktionen