

12 Messung von Zeit, Frequenz und Phase

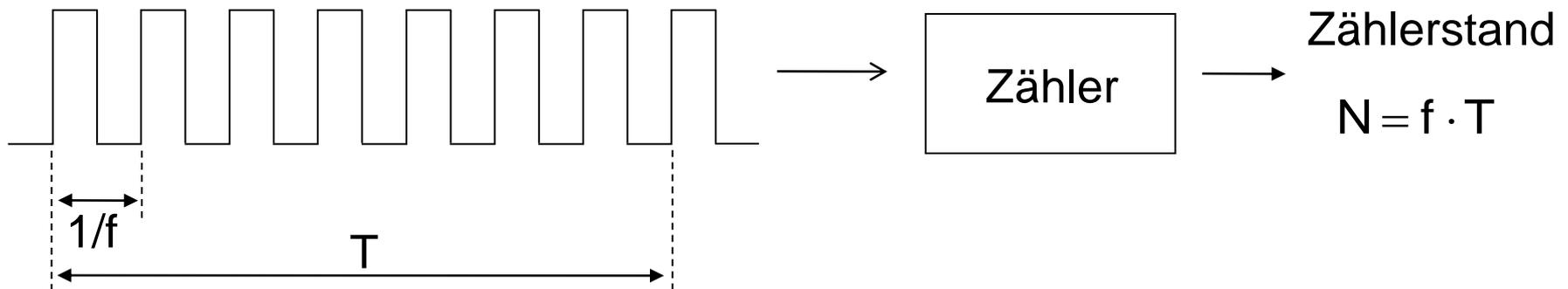
Überblick

Einführung in die Digitale Messtechnik – besonders geeignet zur Tätigkeit des Zählens von Ereignissen

- Binäre Signale und logische Verknüpfungen
- Darstellung und Anzeige der Messwerte
- Bistabile Kippstufen = Speicherschaltungen
- Zähler
- Digitale Zeitmessung
- Digitale Frequenzmessung
- Phasenmessung
- Analoge Messung von Zeitintervall und Frequenz

Prinzip der digitalen Zeit- und Frequenzmessung

Impulsfolge, Frequenz f



Zeitmessung: f bekannt, $T = \frac{1}{f} N$

Frequenzmessung: T bekannt, $f = \frac{N}{T}$

Binäre Signale

- Einfachster Fall: binäres, diskretes Signal mit zwei Zuständen: „0“, „1“
- Vorteile: einfach, zuverlässig unterscheidbar
- Höhere Spannung „high“ = „1“
- Niedrigere Spannung „low“ = „0“
- Schwankungsbreite zugelassen
- Information steckt nicht in der Amplitude, sondern im Pegel
- unempfindlich gegenüber Störungen

Logische Verknüpfungen binärer Signale

Boole'sche Algebra:

Konjunktion = UND-Verknüpfung „•“ „∧“

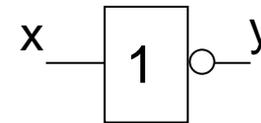
Disjunktion = ODER-Verknüpfung „+“ „∨“

Negation = „Negierung“ \bar{x}

NICHT-Verknüpfung

$$y = \bar{x}$$

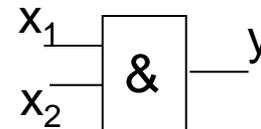
x	y
0	1
1	0



UND-Verknüpfung

$$y = x_1 \cdot x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

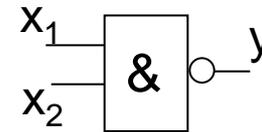


Logische Verknüpfungen

NAND-Verknüpfung („UND-NICHT“)

$$y = \overline{x_1 \cdot x_2}$$

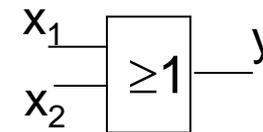
x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



ODER-Verknüpfung (Disjunktion)

$$y = x_1 + x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

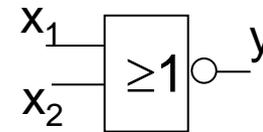


Logische Verknüpfungen

NOR-Verknüpfung („ODER-NICHT“)

$$y = \overline{x_1 + x_2}$$

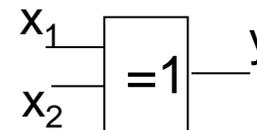
x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Exklusiv-ODER-Verknüpfung (Antivalenz)

$$y = \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{x_2}$$

x_1	x_2	y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



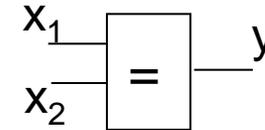
(„1“ wenn genau ein Eingang „1“ ist)

Logische Verknüpfungen

Äquivalenz

$$y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + x_1 \cdot x_2$$

x_1	x_2	y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



(„1“ wenn Eingänge gleich sind)

Darstellung von Zahlen

Messergebnis=Zahl x Einheit

Dezimalzahl mit n Stellen $Z = \sum_{i=0}^n a_i 10^i \quad a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$

Dualzahl mit der Basis 2, m Stellen $Z = \sum_{i=0}^m a_i 2^i \quad a_i \in \{0,1\}$

Hexadezimalzahl mit der Basis 16 $Z = \sum_{i=0}^k a_i 16^i \quad a_i \in \{0,1,\dots,9,A,\dots,F\}$

BCD code
(binary coded decimals)

jede Dezimalstelle wird
in binärem code kodiert

Beispiel Dezimalzahl 52: $Z_{\text{dez}} = 52 \quad Z_{\text{dual}} = 110100 \quad Z_{\text{hex}} = 34$
 $Z_{\text{BCD}} = 0101 \quad 0010$

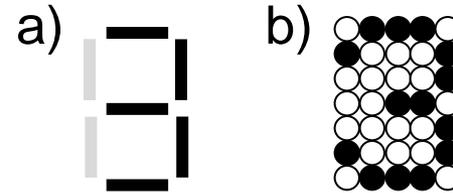
Digitale Zahlendarstellung

Dezimalzahl	Dualzahl	BCD-Code	Gray-Code	Hexadezimalzahl
0	00000	0000 0000	0000	0
1	00001	0000 0001	0001	1
2	00010	0000 0010	0011	2
3	00011	0000 0011	0010	3
4	00100	0000 0100	0110	4
5	00101	0000 0101	0111	5
6	00110	0000 0110	0101	6
7	00111	0000 0111	0100	7
8	01000	0000 1000	1100	8
9	01001	0000 1001	1101	9
10	01010	0001 0000	1111	A
11	01011	0001 0001	1110	B
12	01100	0001 0010	1010	C
13	01101	0001 0011	1011	D
14	01110	0001 0100	1001	E
15	01111	0001 0101	1000	F

Ziffernanzeige vs. Skalenanzeige

a) 7-segment Anzeige (LED, LCD)

b) (5x7) Matrixelement-Anzeige



analoge Skalenanzeige:

- Zwischenwerte ablesbar (abschätzbar)
- Auflösungsvermögen ist begrenzt
- Genauigkeit ändert sich bei Störungen wenig (z.B. Verschmutzung)
- ist bei stark schwankenden Messwerten ablesbar
- zeitliche Veränderungen abschätzbar (Trend)
- Ausreißer („schlechte“ Messwerte) erkennbar

digitale Ziffernanzeige:

- fehlerfrei ablesbar
- bietet bessere Auflösung
- bei Störungen falsche Anzeige (z.B. Bitflips)
- nicht geeignet für stark schwankende, schnell veränderliche Messwerte

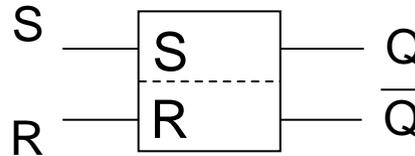
Bistabile Kippstufen

Asynchrones RS-Flip Flop

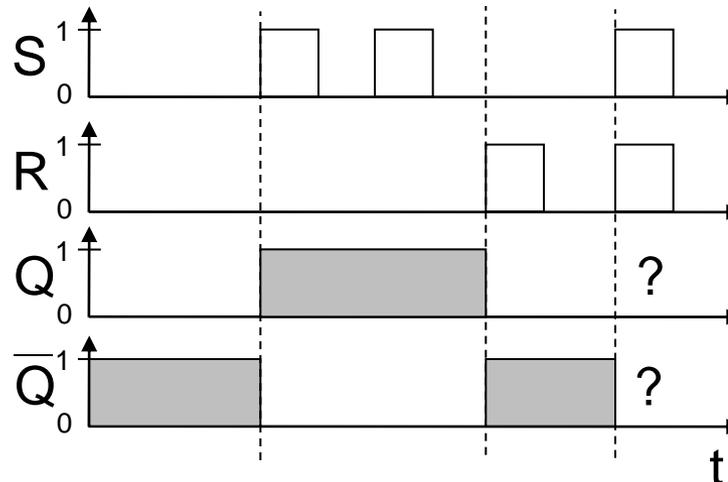
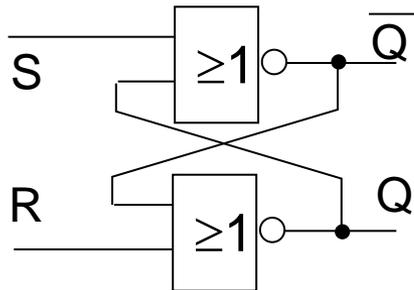
Kombinatorische Schaltwerke: Gatter, Ausgang nur Funktion der Eingangsbelegung
 Bistabile Kippstufen, „Flip-Flops“, Speicherglieder: „Gedächtnis-“ bzw. Speicherwirkung,
 Ausgangssignal von Eingang und Vorgeschichte bestimmt

Asynchrones RS-Flip-Flop

S: Setzeingang
 R: Rücksetzeingang

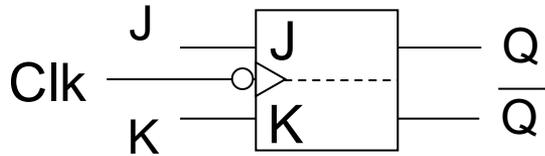


$$Q^{n+1} = \bar{R} \cdot Q^n + S$$

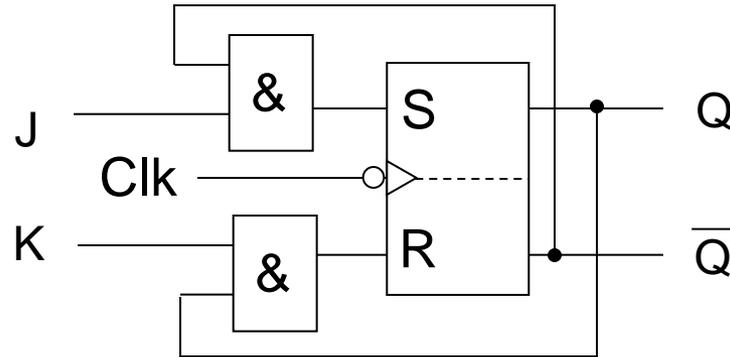


S^n	R^n	Q^{n+1}	
0	0	Q^n	speichern
1	0	1	Setzen
0	1	0	Rücksetzen
1	1	?	undefiniert

Taktflankengesteuertes JK-Flip-Flop

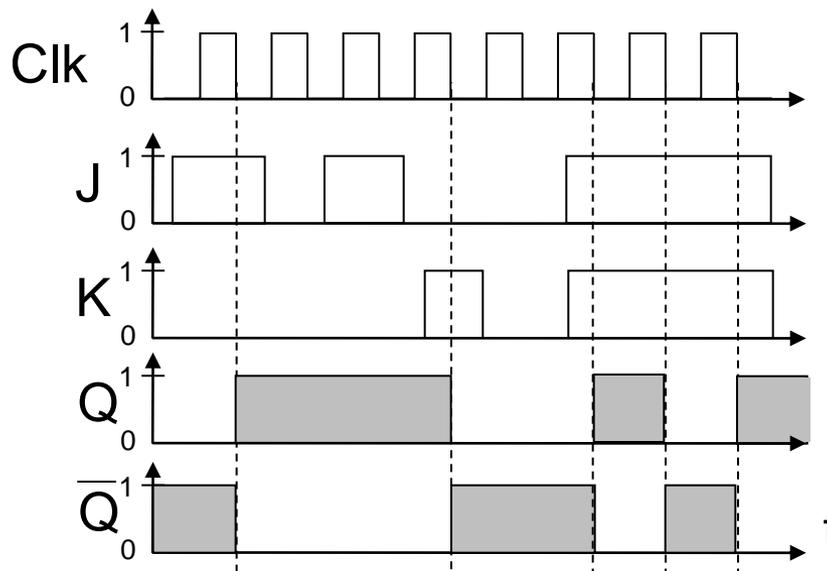


Triggerung mit fallender Flanke



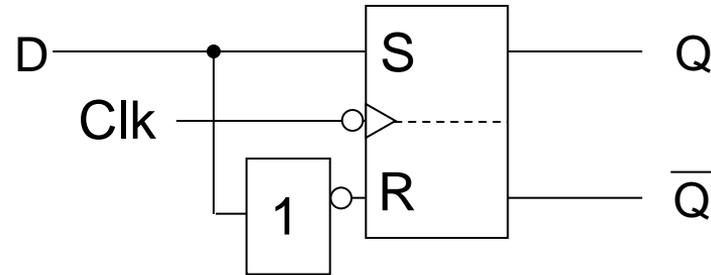
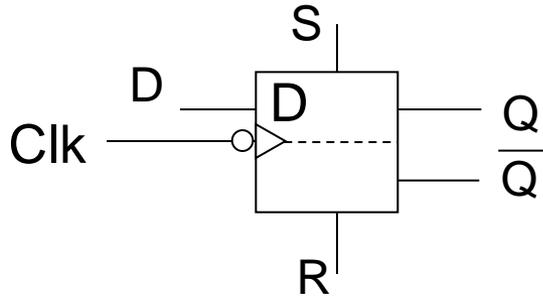
RS-Flip-Flop mit definiertem Verhalten für J=K=1

Zeitdiagramm:
Triggerung mit fallender Flanke

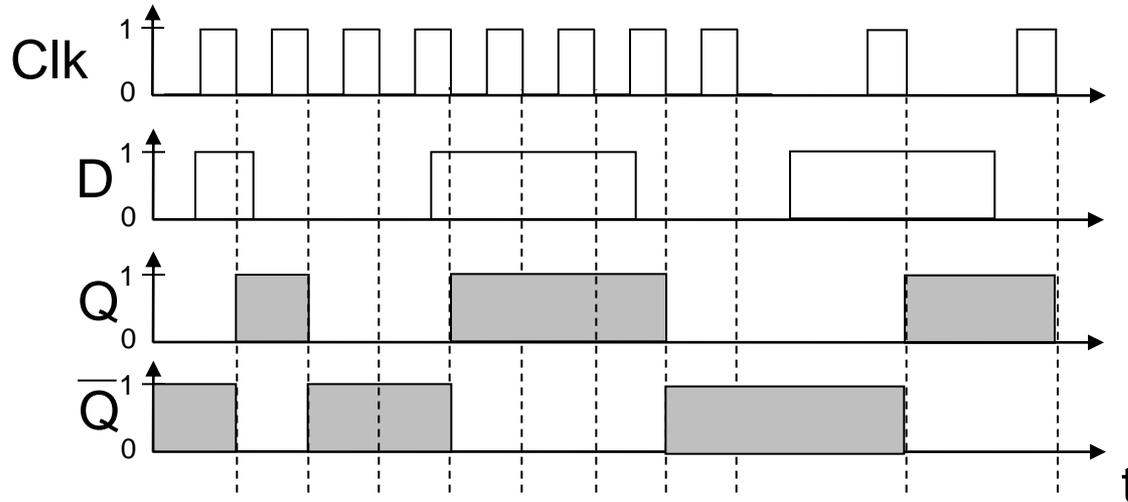


J^n	K^n	Q^{n+1}	
0	0	Q^n	speichern
1	0	1	Setzen
0	1	0	Rücksetzen
1	1	$\overline{Q^n}$	<u>Zustand alternieren</u>

Taktflankengesteuertes D-Flip-Flop



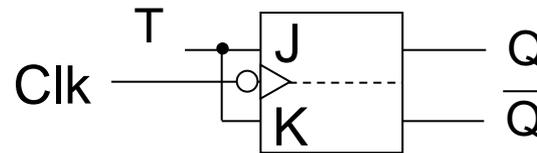
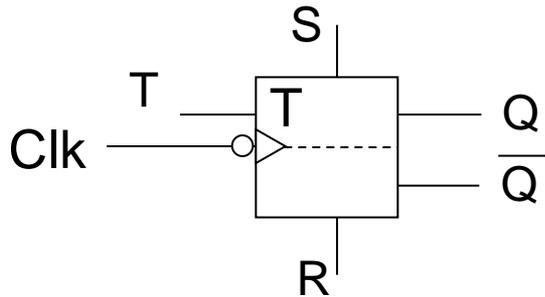
intern erzwungenes $R = \bar{S}$



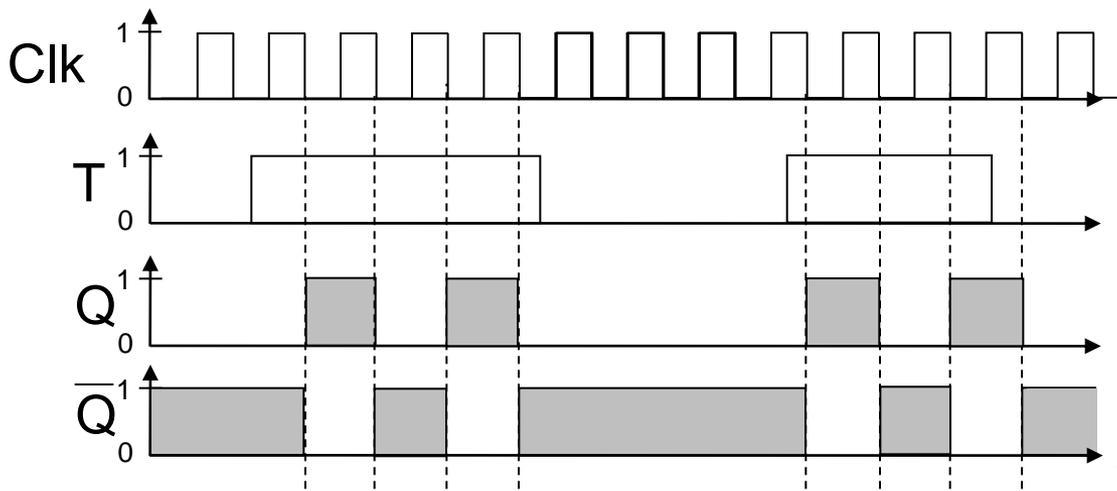
$$Q^{n+1} = D^n$$

Q übernimmt Zustand von D mit dem nächsten Takt

Taktflankengesteuertes T-Flip-Flop



$J=K=T \longrightarrow$ „Toggle“-Flip-Flop

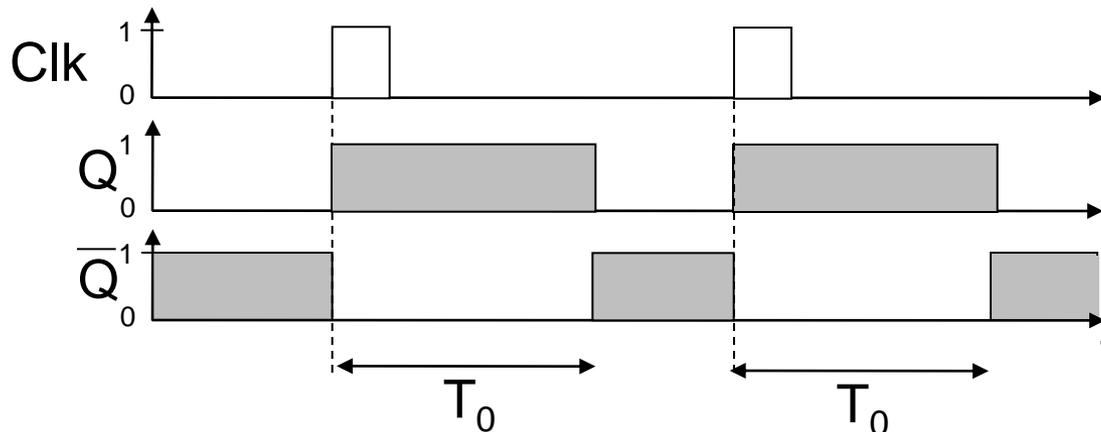
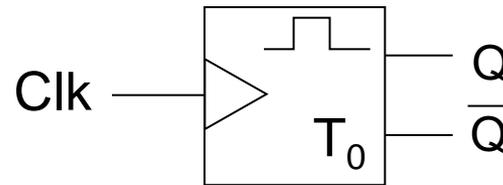


Q ändert bei $T=1$ zu jedem Trigger den Zustand (toggeln)

Mono-Flop (Monostabile Kippstufe)

nur ein stabiler Zustand
zur Erzeugung von Pulsen definierter Länge

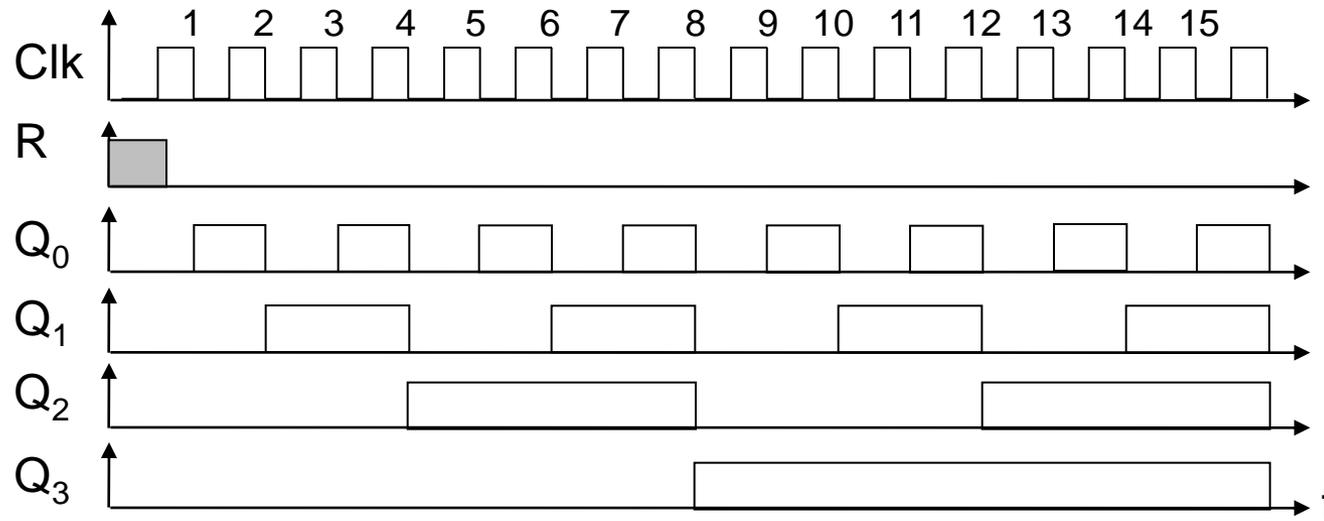
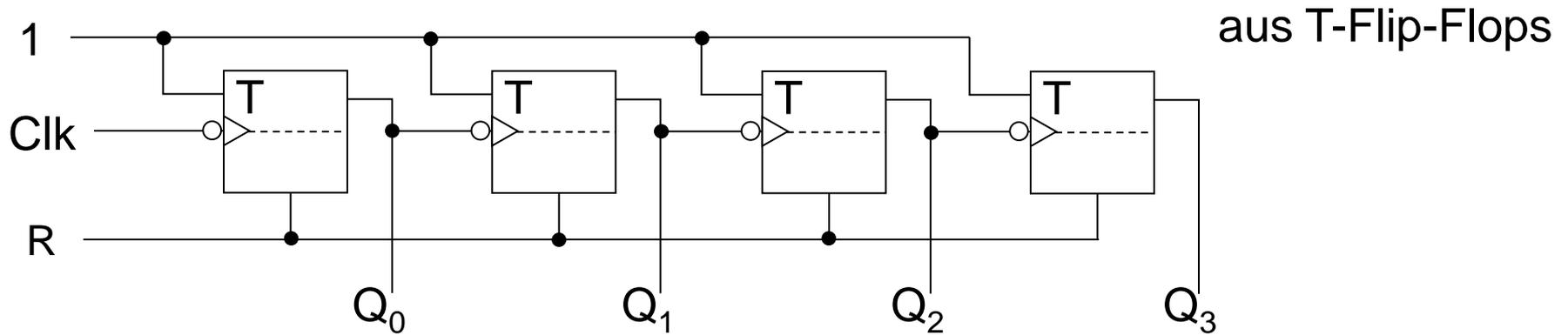
Triggerung auf
positive Flanke



Zähler

- Bestimmung der Anzahl auftretender Ereignisse
- aus T-Flip-Flops aufgebaut
- Vorwärts- und Rückwärtszähler
- Asynchrone Zähler
- Synchrone Zähler
- Dualzähler
- BCD-Zähler

Asynchroner Vorwärts-Dualzähler



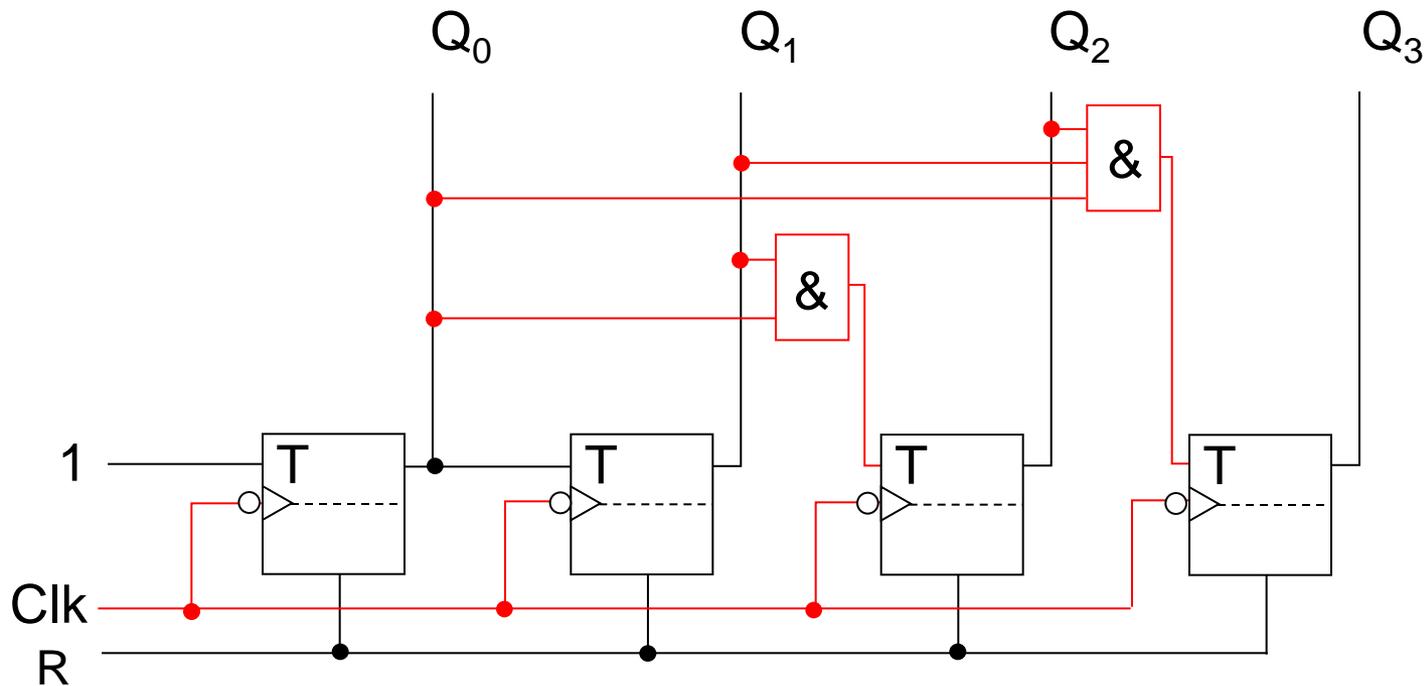
Beispiele

5	13
1	1
0	0
1	1
0	1

$$N = Q_3 2^3 + Q_2 2^2 + Q_1 2^1 + Q_0 2^0$$

Rückwärts-Zähler: $\overline{Q_i}$

Synchroner Vorwärts-Dualzähler

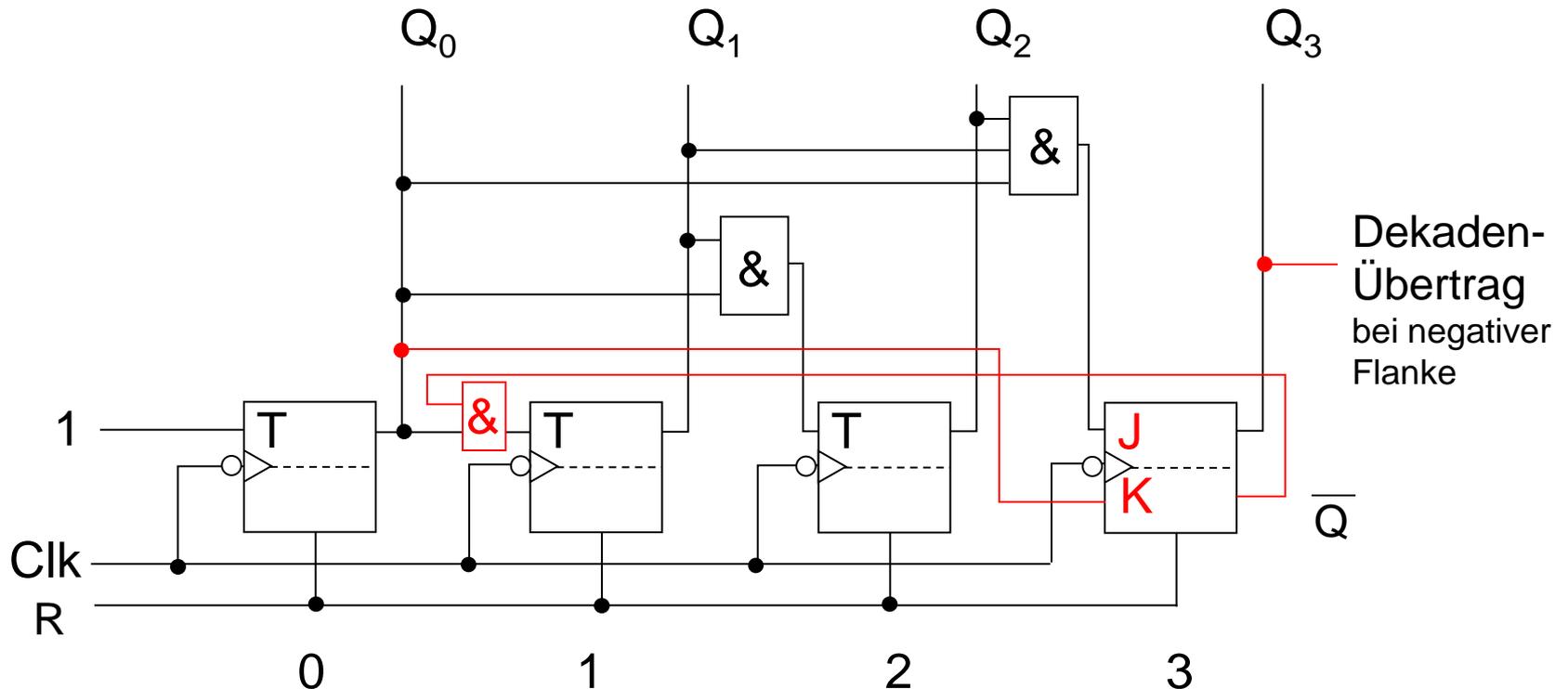


- Zählergebnis identisch zum asynchronen Zähler
 - Zähler Flip-Flops schalten allerdings gleichzeitig
 - keine Laufzeiten Effekte
- hochfrequenterere Ereignisse zählbar

Synchroner BCD Zähler

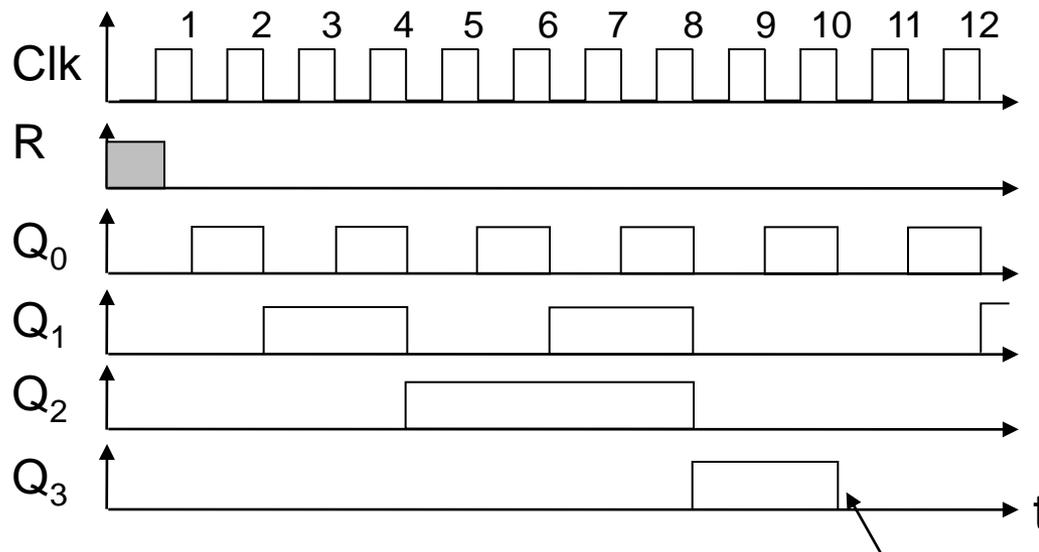
Rücksetzung nach zehnter Taktflanke →

- Flop-Flop 1 darf nach 10. Flanke nicht mehr gesetzt werden
- Flip-Flop 3 muss nach der 10. Flanke zurückgesetzt werden



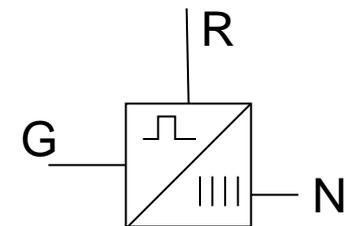
Synchroner BCD-Zähler

Zeitdiagramm:



Flanke zum Dekadenübertrag

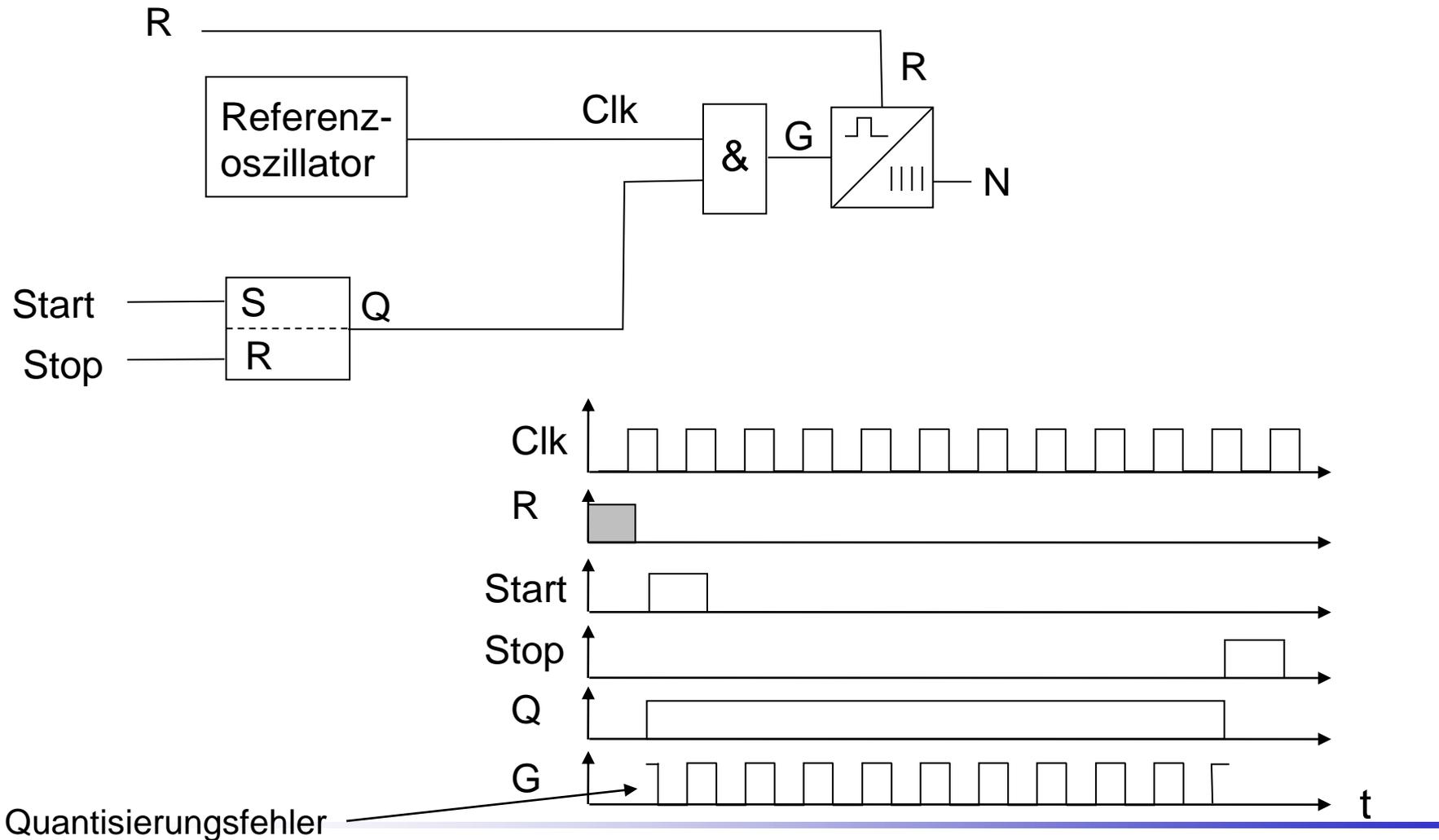
Schaltzeichen



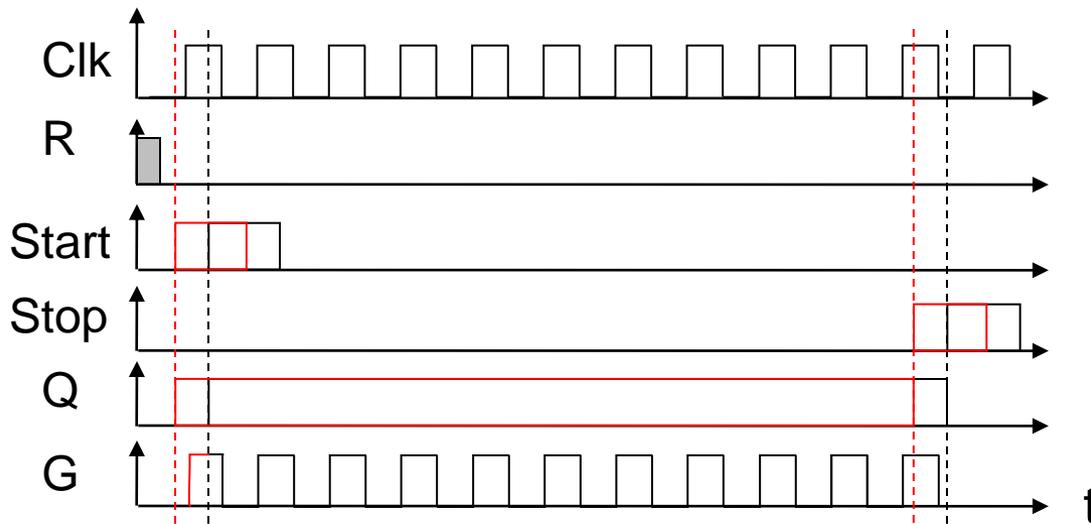
→ Kaskadierung der Zähler (pro Dekade ein 0..9 Zähler)

Digitale Zeitmessung

Zeitintervall-Messung



Veranschaulichung Quantisierungsfehler



Zählereignisse (ansteigende Flanke):
10 Zählereignisse
11 Zählereignisse

Zeitintervall-Messung

Zeitintervall: $T_x = \frac{N_x}{f_R}$

Auflösung der Messung

bestimmt durch Quantisierungsfehler des Zählers $\Delta N_x=1$: $\Delta T_x = \frac{\partial T_x}{\partial N_x} \Delta N_x = \frac{1}{f_R} \Delta N_x = \frac{1}{f_R}$

Genauigkeit der Messung (Messunsicherheit)

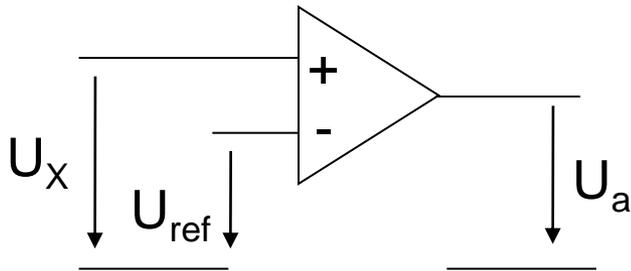
- Auflösung des Zählers (Quantisierungsfehler)
- Genauigkeit der Referenzfrequenz

$$u_{T_x} = \left| \pm \frac{\partial T_x}{\partial N_x} 1 \right| + \left| \pm \frac{\partial T_x}{\partial f_R} \Delta f_R \right|$$

$$u_{T_x} = \left| \frac{1}{f_R} \right| + \left| \frac{T_x}{f_R} \Delta f_R \right| \quad \frac{u_{T_x}}{T_x} = \frac{1}{N_x} + \left| \frac{\Delta f_R}{f_R} \right|$$

Einschub: Komparator

Komparator realisiert durch Operationsverstärker

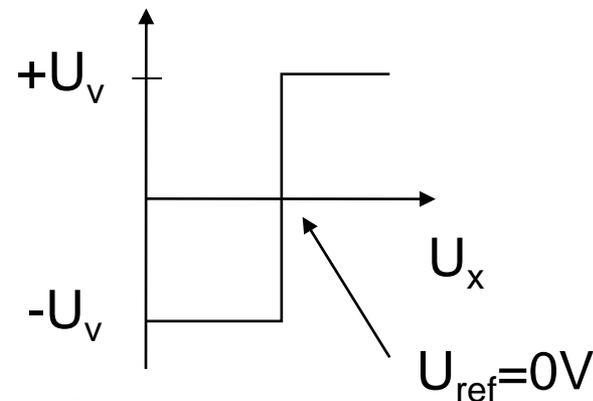


zu verstärkende Spannung

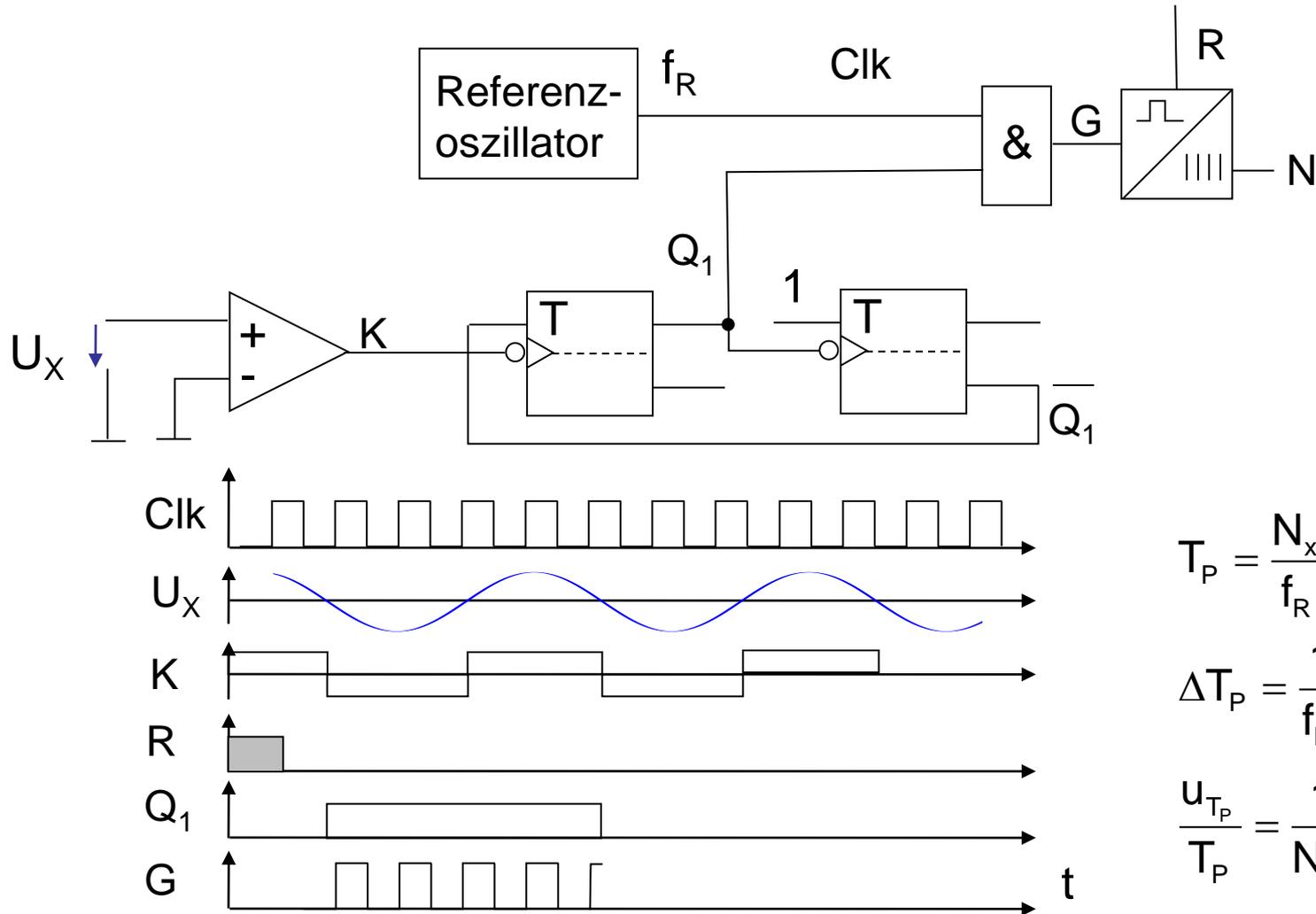
$$U_d = U_X - U_{ref}$$

$$U_a = k \cdot U_d$$

Kennlinie:



Messung der Periodendauer

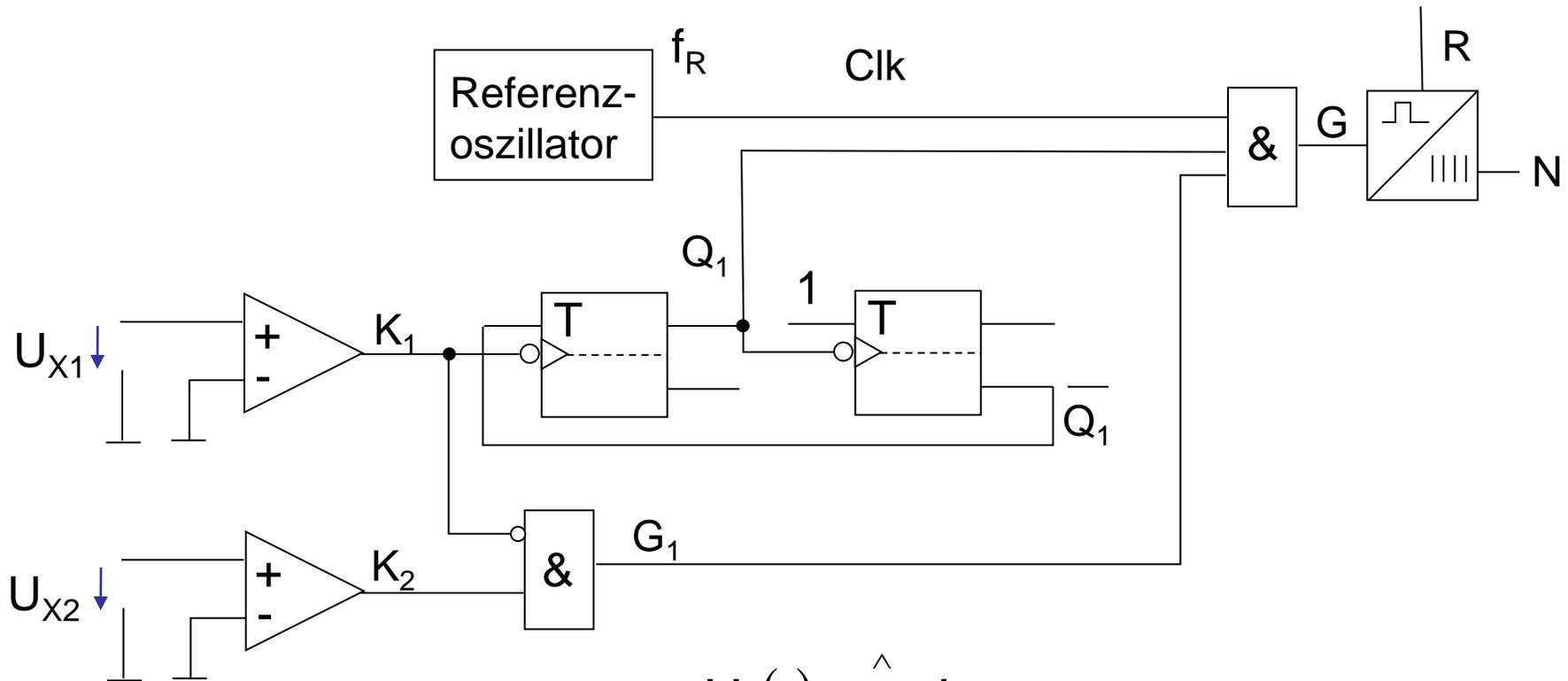


$$T_P = \frac{N_x}{f_R}$$

$$\Delta T_P = \frac{1}{f_R}$$

$$\frac{u_{T_P}}{T_P} = \frac{1}{N_x} + \left| \frac{\Delta f_R}{f_R} \right|$$

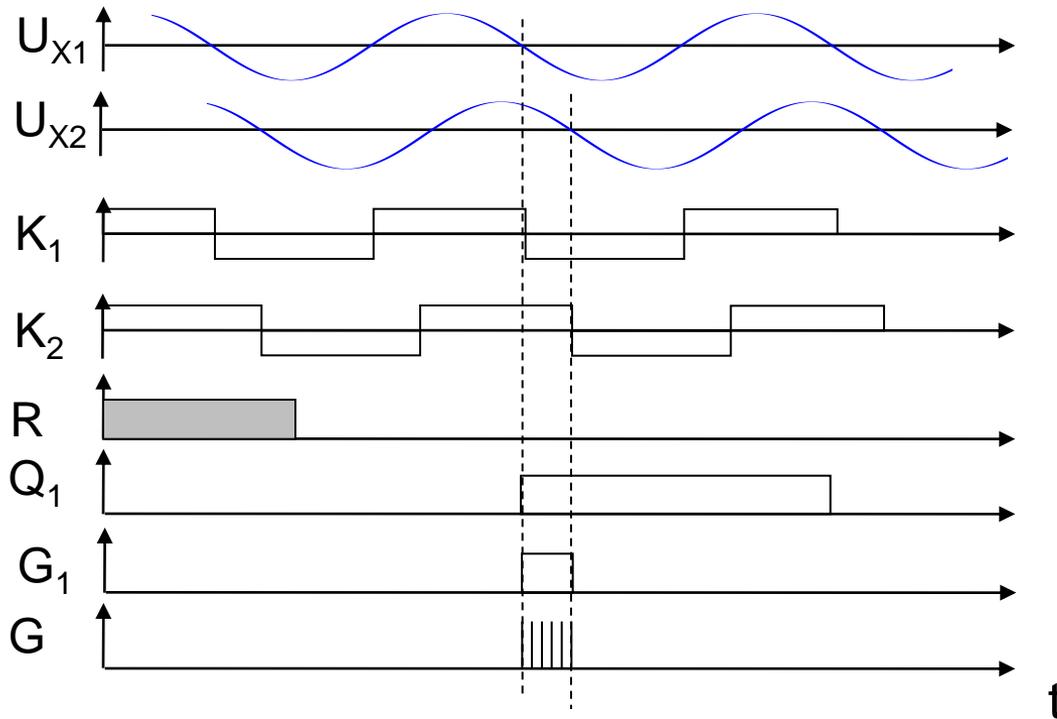
Messung einer Phasenverschiebung



$$U_1(t) = \hat{u} \sin \omega t$$

$$U_2(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$$

Messung einer Phasenverschiebung



$$U_1(t) = \hat{u} \sin \omega t$$

$$U_2(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U_2(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \omega T_x)$$

$$\varphi = \omega T_x = \omega \frac{N_X}{f_R}$$

Zeitnormale

- „Atomuhren“ ^{133}Cs
 - rel. Unsicherheit $< \pm 10^{-6}$ s pro Jahr
 - ausgemessen wird ein Hyperfeinstruktur-Übergang (Mikrowellenresonanz; $f_0 = 9,192\,631\,770$ GHz)
 - PTB (Physikalisch Technische Bundesanstalt)
 - CS 1... CS4 (Cäsium-Strahluhren) $\rightarrow \pm 1,2 \times 10^{-14}$; eine Sekunde pro 2,5 Mio Jahre
 - Cäsium-Fontaine Uhr $\pm 1 \times 10^{-15}$
 - NIST (National Institute of Standards)
optische Atomfallen (6 Laserstrahlen „fangen Cs-Atome in einem Cluster (Ball) ein); $\pm 5 \times 10^{-16}$
(1 s in 60 Mio Jahren)

Zeitnormale

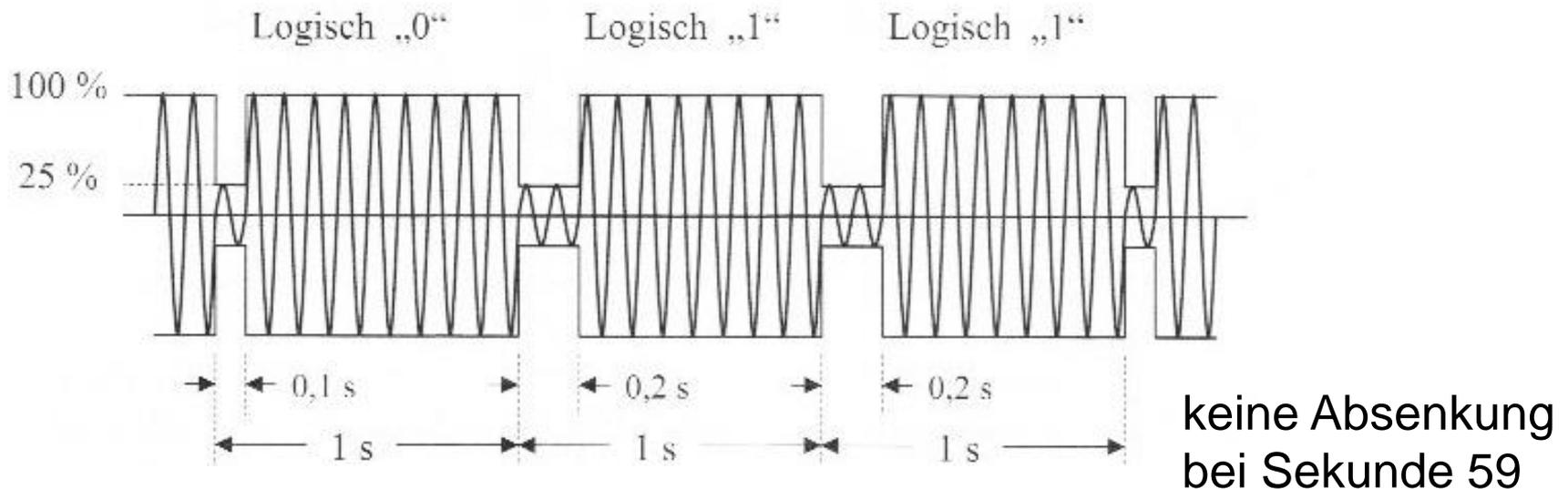
- Rubidium-Uhren
 - Hyperfeinstruktur-Übergang im ^{87}Rb
 - $f_0 = 6,384 \text{ GHz}$
 - kleinere Aufbauten (wenige 10 cm^3)
 - Unsicherheit $\pm 3 \times 10^{-3}$
 - 1 s in 10.000 Jahren
- Quarzuhren
 - Unsicherheit $\pm 10^{-6}$
- Funkuhren
 - Quarzuhren synchronisiert auf DCF 77

Zeitsignalsender DCF 77

- D Deutschland, C Langwellensender, F Frankfurt, 77 Sendefrequenz in kHz
- Standort: Mainflingen bei Frankfurt
- Sendeleistung 50 kW
- Trägerfrequenz 77,5 kHz
- Unsicherheit der Trägerfrequenz (üb. Tag) 10^{-12}
- verbreitet Zeitsignal und Normalfrequenz

Zeitsignalsender DCF 77

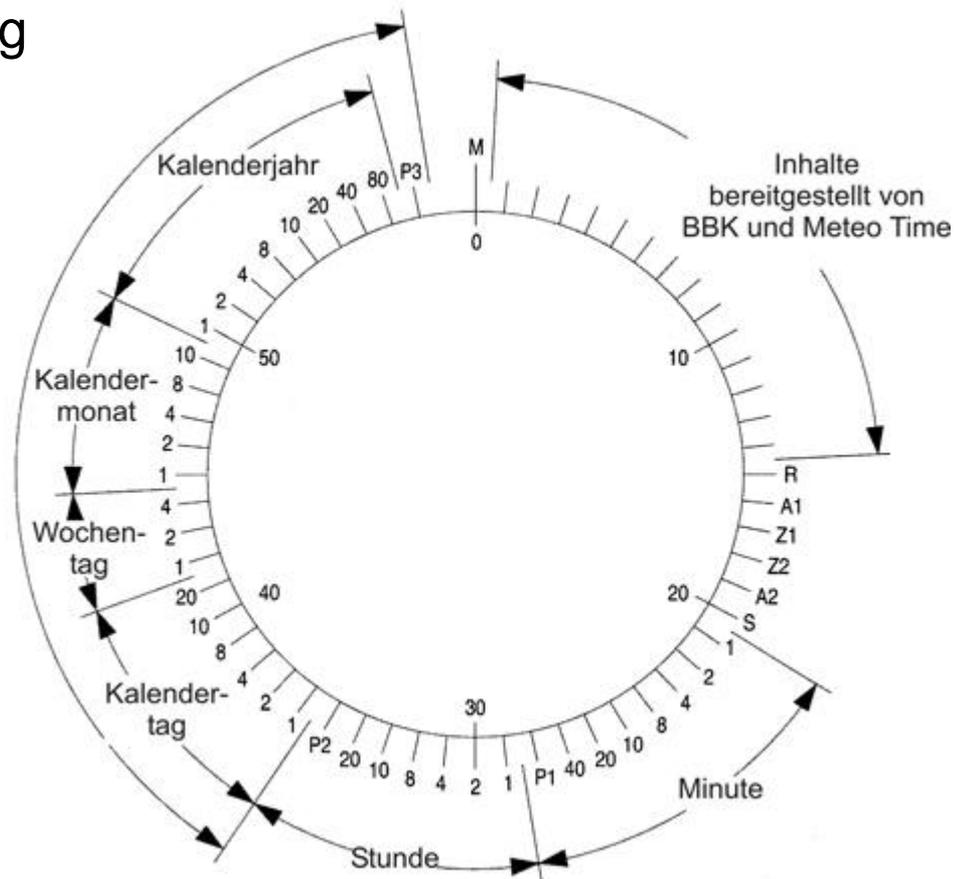
- Amplitudenmodulation 1 Bit/s



- zusätzlich Phasenmodulation (Phasenumtastung zur Bestimmung von Signallaufzeiten)

Zeitsignalsender DCF 77

Zeitkodierung

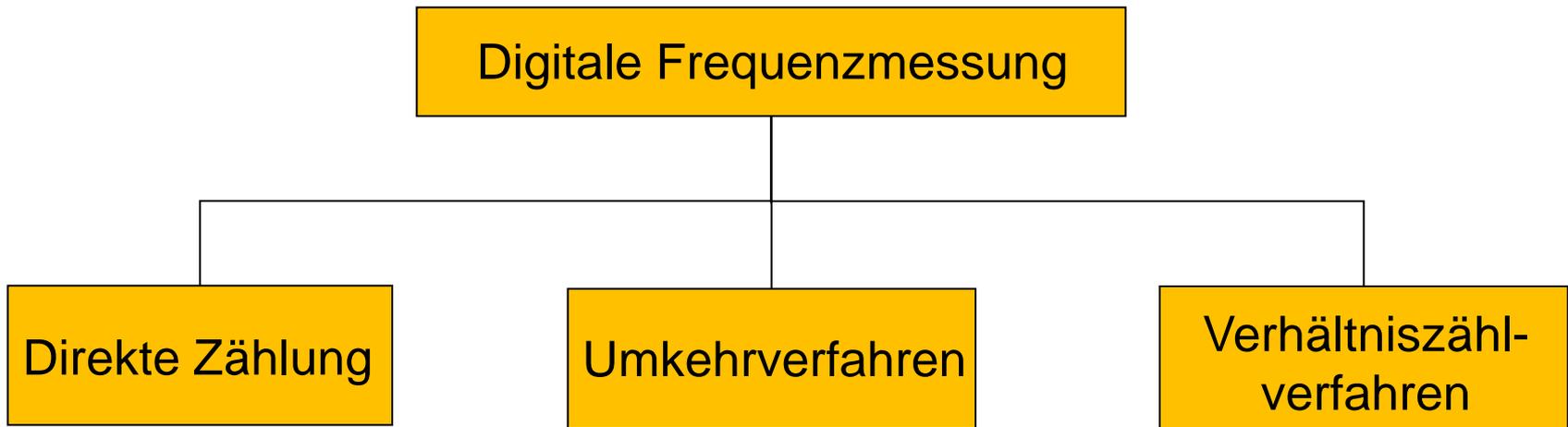


Kodierung der Zahlen binär in BCD code

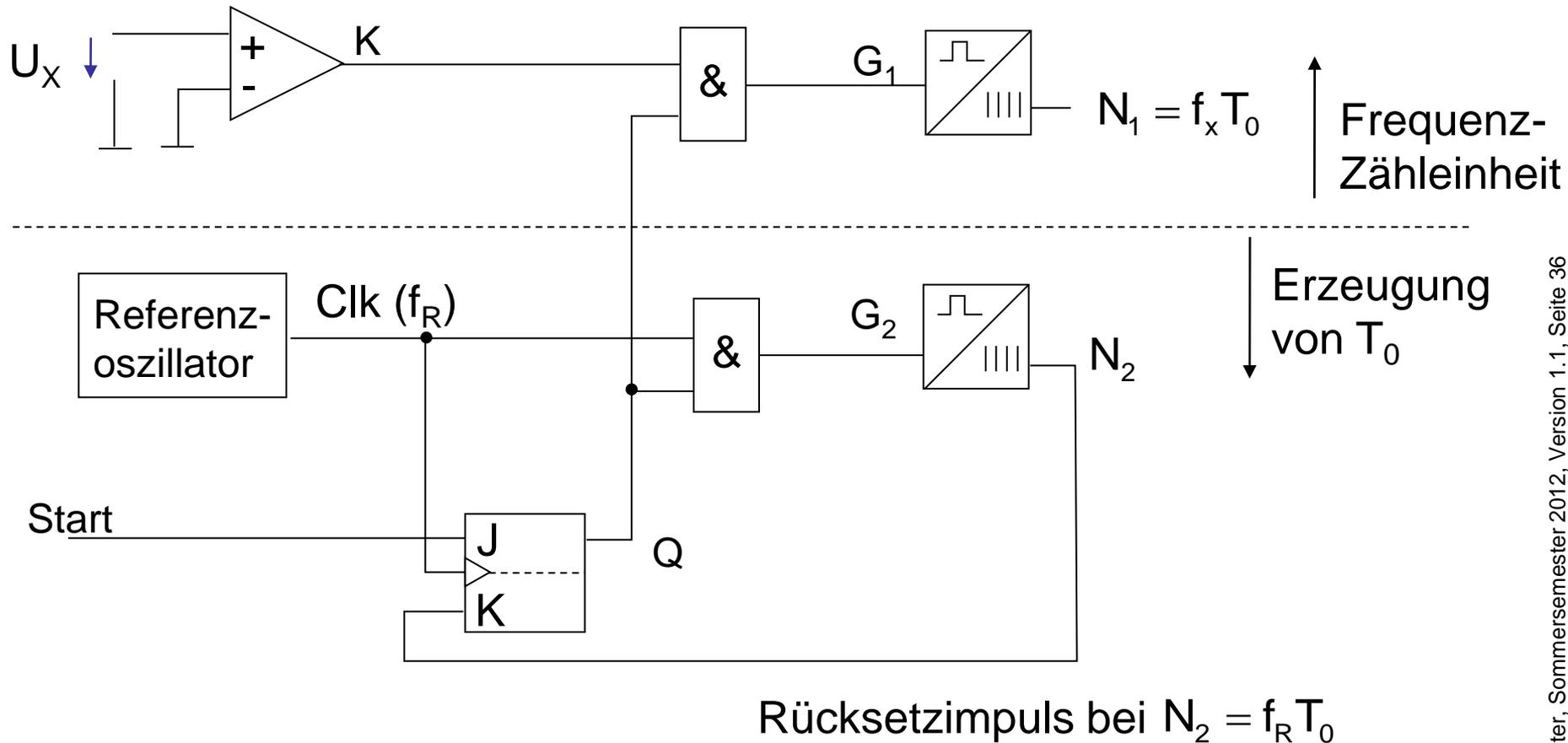
P: Prüfbit

Digitale Frequenzmessung

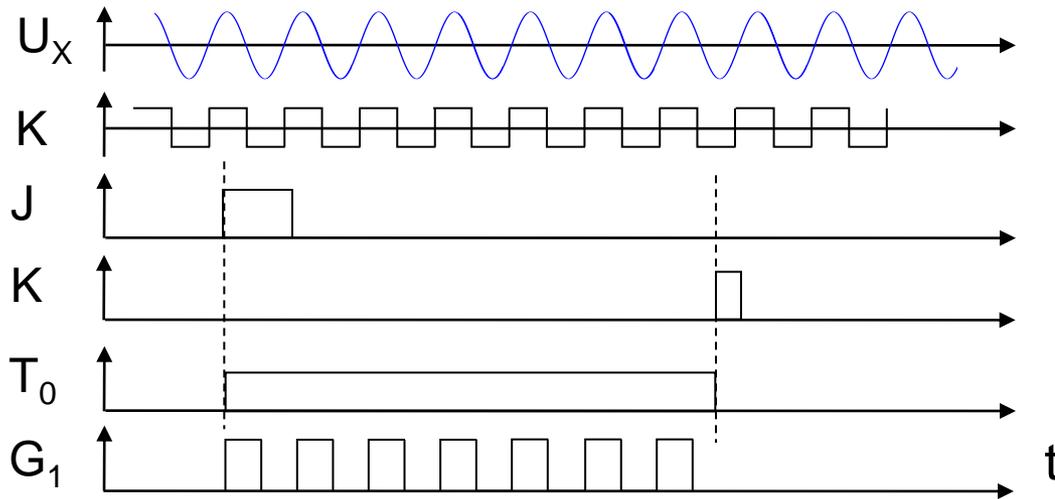
Übersicht



Direkte Zählung



Direkte Zählung



gesuchte Frequenz:

$$N_1 = f_x T_0 \quad T_0 = \frac{N_2}{f_R}$$

$$f_x = \frac{N_1}{T_0} \quad \rightarrow \quad f_x = \frac{N_1}{T_0} = \frac{N_1}{N_2} f_R$$

Auflösung:

$$\Delta f_x = \frac{\partial f_x}{\partial N_1} \Delta N_1 = \frac{1}{T_0} \Delta N_1 = \frac{1}{T_0}$$

Unsicherheit:

$$\frac{u_{f_x}}{f_x} = \left| \pm \frac{\partial f_x}{\partial N_1 f_x} 1 \right| + \left| \pm \frac{\partial f_x}{\partial f_R f_x} \Delta f_R \right|$$

$$\frac{u_{f_x}}{f_x} = \frac{1}{N_1} + \left| \frac{\Delta f_R}{f_R} \right|$$

Umkehrverfahren

Kleine Frequenzen → hohe Auflösung / kleine Messunsicherheit
nur mit langen Messzeiten

Messzeitverkürzung (bei gleicher Auflösung) durch

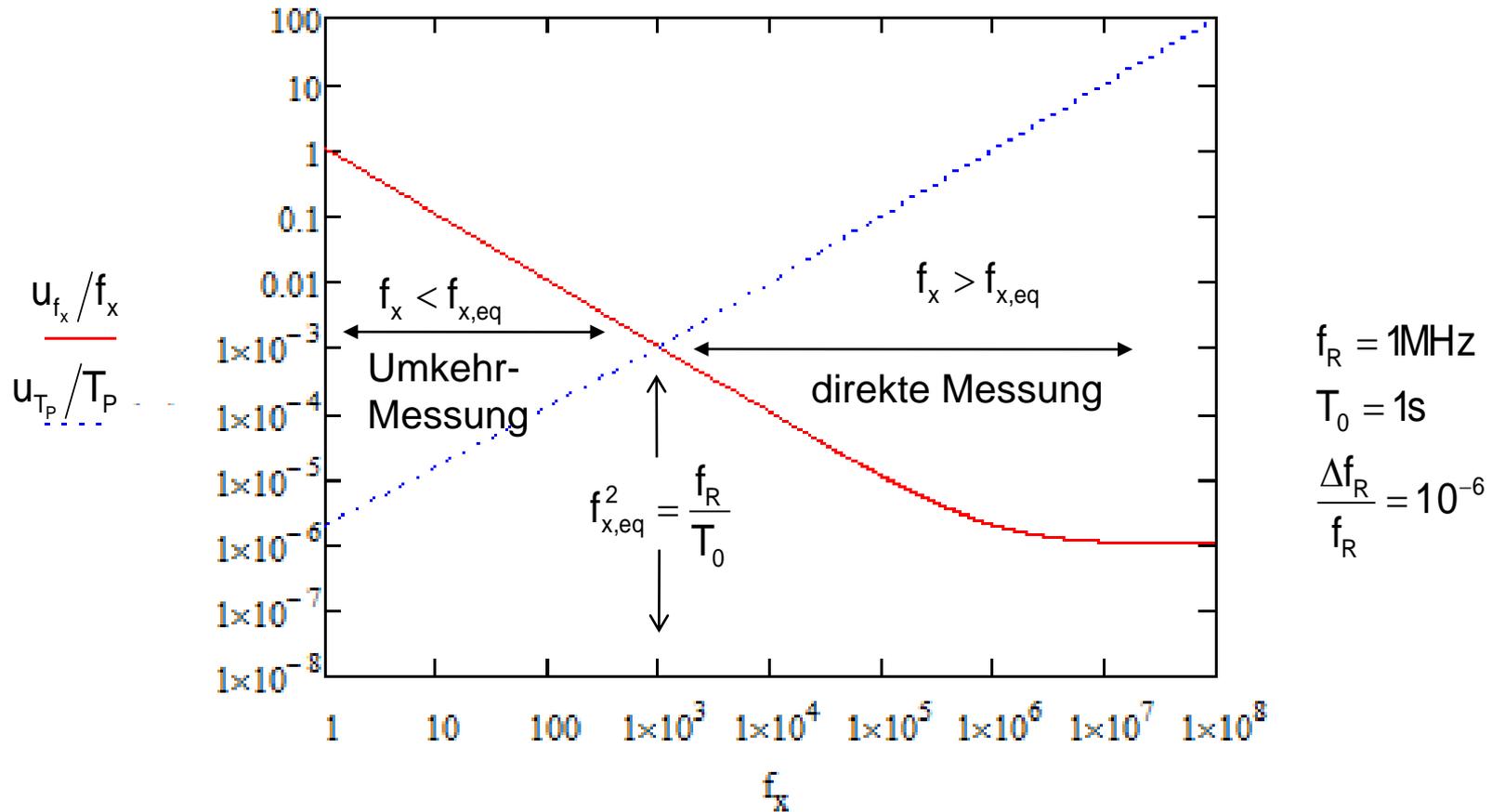
- Messung der Periodendauer T_P
- Berechnung der Frequenz mittels Kehrwertbildung:

$$f = \frac{1}{T_P}$$

Beispielrechnungen (in der Vorlesung)

praktische Frage: Bei welcher Frequenz f_x ist die Unsicherheit beider Methoden bei vorgegebener Torzeit bzw. Referenzfrequenz gleich ?

Vergleich Direkte Zählung vs. Umkehrverfahren



Zusammenfassung

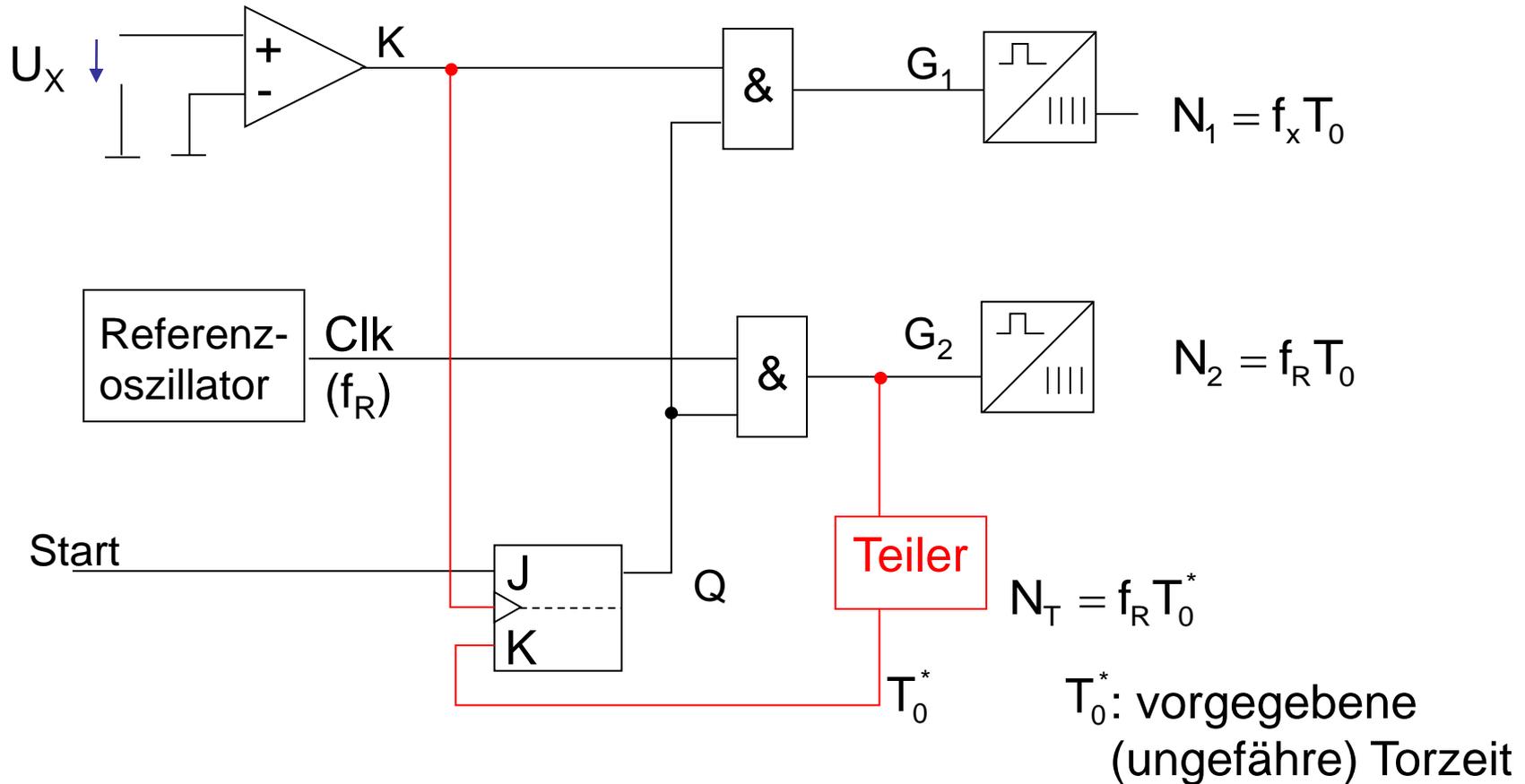
Ursachen der Messunsicherheiten

- Quantisierungsfehler
- Zeit- & Frequenzbasisfehler
- Triggerfehler

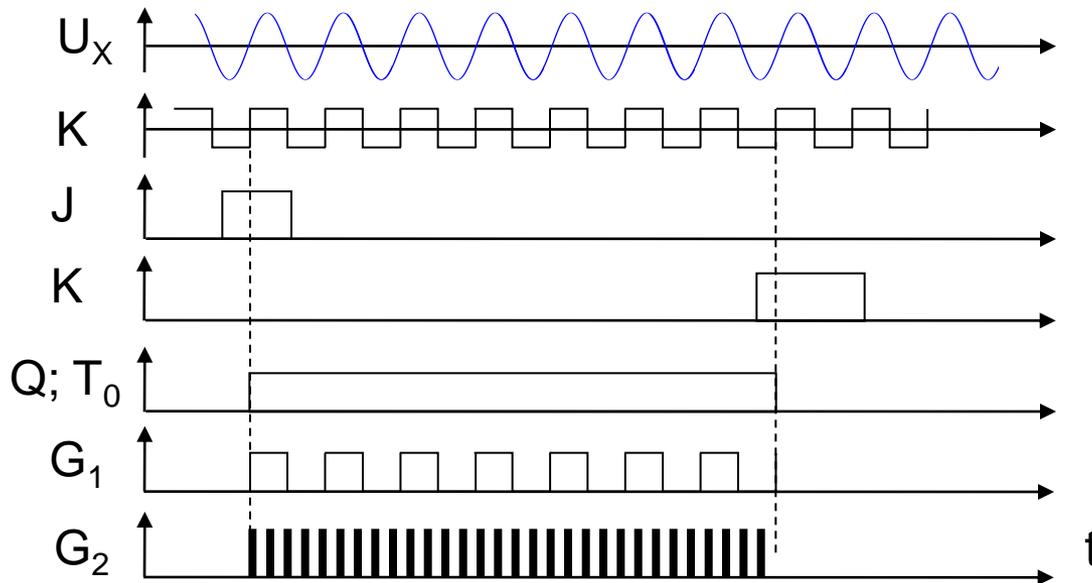
(Achtung: „Fehler“ = Unsicherheit)

Verhältniszählverfahren

Messung der Dauer einer bestimmten Anzahl von Perioden des Eingangssignals
Ziel: Reduzierung des Quantisierungsfehlers & Triggerfehlers



Verhältniszählverfahren



Im Unterschied zur direkten Zählung:

$$T_0 = nT_{P,U_x} = n \frac{1}{f_x} \approx T_0^*$$

Auflösung:

$$N_1 = f_x T_0 = n$$

$$N_2 = f_R T_0$$

$$\longrightarrow f_x = \frac{N_1}{T_0} = \frac{N_1}{N_2} f_R$$

$$\Delta f_x = \left| \frac{\partial f_x}{\partial N_2} \right| \Delta N_2 = \frac{N_1 f_R}{N_2^2} \Delta N_2 = \frac{f_x}{N_2} \Delta N_2$$

$$\frac{\Delta f_x}{f_x} = \frac{\Delta N_2}{N_2} = \frac{1}{N_2} = \frac{1}{T_0 f_R}$$

relative Auflösung nur abhängig von $T_0 f_R$

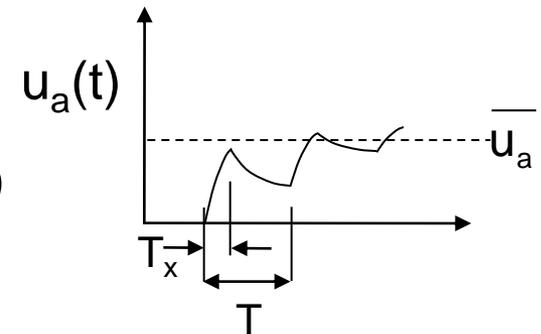
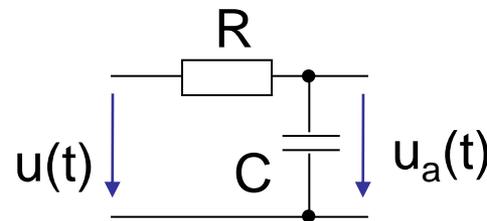
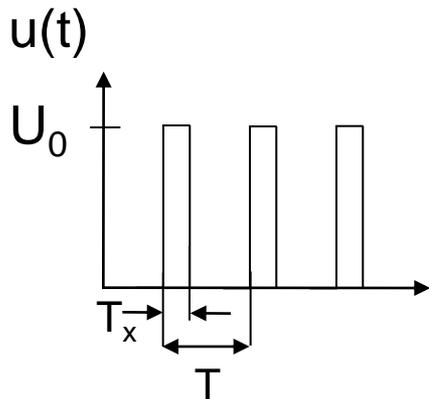
Universalzähler



- Zeit-, Frequenzmessung integriert
- Messgrößen: Frequenz, Periodendauer, Zeitintervalle, Phasendifferenzen (bei 2 Kanalgeräten)
- Parameter bei Frequenzmessung: Torzeit -- > Auflösung
- Einstellungsmöglichkeiten: Signalkopplung, Triggerrung (AC/DC), Triggerschwelle, Triggerflanke (slope), Triggersperre, Signalabschwächung, Tiefpassfilterung (Unterdrückung von Störsignalen)
- Eingang: $1\text{M}\Omega$, $50\ \Omega$
- Genauigkeiten werden durch Referenz-Oszillatoren bestimmt:
Quarz: 10^{-5} , Ofenquarzen (10^{-6} .. 10^{-8}), Rubidium-Oszillatoren: 10^{-9}

Analoge Messung einer Zeit t/u-Umformung

Messziel: Zeitdauer als analoger Spannungswert $U = U(t) \sim t$



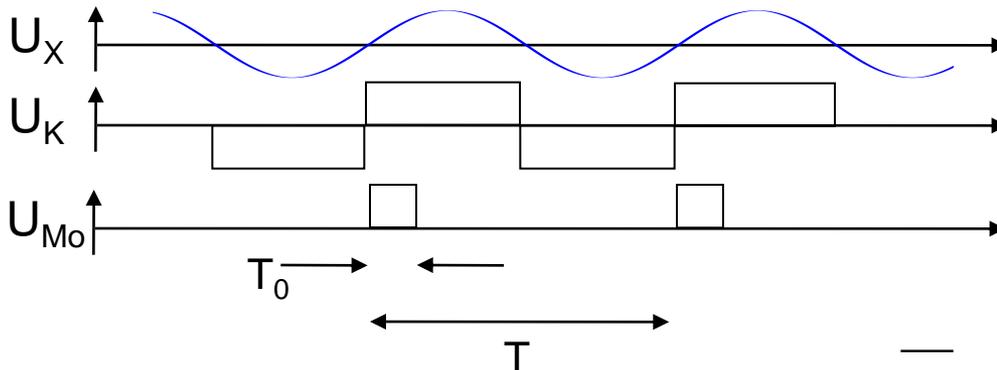
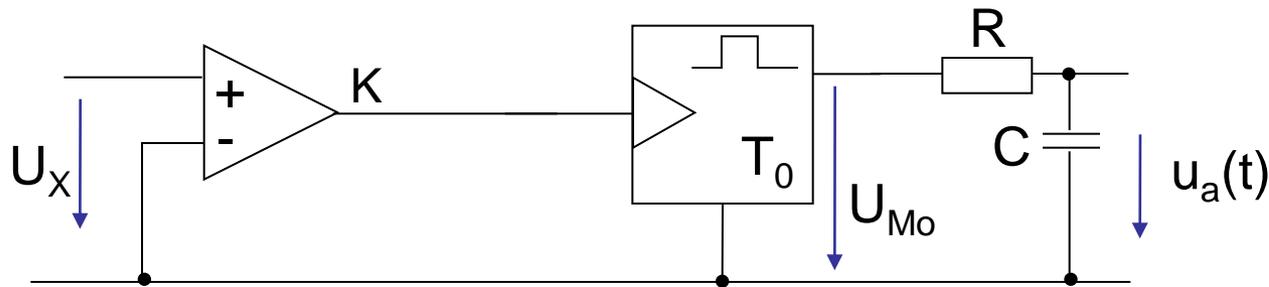
$$\bar{u}_a = U_0 \frac{T_x}{T}$$

Dauer eines Pulses T_x
Periodendauer T

RC dimensionieren, dass
a) Einschwingen schnell
b) Welligkeit klein ist

Analoge Messung einer Frequenz f/u-Umformung

Messziel: Frequenz als analoger Spannungswert $U = U(f) \sim f_x$



U_{Mo} glätten mit RC Glied

$$\bar{u}_a = U_0 \frac{T_X}{T} = U_0 \frac{T_0}{T} = U_0 T_0 f_x$$

Lernziele Kapitel 12

- Wiederholung digitaler Grundsaltungen
- Digitale Darstellung von Zahlen
- „Flip Flops“ als Bausteine von Zählern
- Zeitintervallmessung, Periodendauermessung, Messung einer Phasenverschiebung
 - Prinzipien und Grundsaltungen
 - Auflösung und Genauigkeit
- Digitale Frequenzmessung, Direkte Zählung, Umkehrverfahren und Verhältniszählverfahren
 - Auflösung und Genauigkeit
 - Fehler: Quantisierungsfehler, Zeit- & Frequenzbasisfehler, Triggerfehler
 - Entscheidung über die Wahl der Messmethode