

# 11 Messung von komplexen Widerständen

---

# Überblick

---

Messung von beliebigen ohmschen, Schein- und Blindwiderständen → Impedanzmessung

- Reale passive Bauelemente im Wechselstromkreis
- Strom- und Spannungsmessung
- Strom-, Spannungs- und Phasenwinkelmessung
- Resonanzverfahren (Schwingkreismessung)
- Messung an Verbrauchern im Wechselstromnetz
- Messbrücken für Wechselspannung

# Komplexe Scheinwiderstände

---

Blindwiderstände  $\varphi = \varphi_U - \varphi_I = \pm 90^\circ$

Verlustwinkel  $\delta = 90^\circ - \varphi$

keine Verlustfreien Spulen und Kondensatoren

Beispiele für Verluste:

- in Kondensatoren: Verlustwiderstand des Dielektrikums
- in Spulen: Ohmscher Widerstand der Wicklung („Kupferverluste“), induzierte Wirbelstromverluste („Eisenverluste“)

Beschreibung durch

komplexen Scheinwiderstand: Ohmscher und Blindwiderstand

# Komplexer Impedanz (Scheinwiderstand)

komplexer Scheinwiderstand (Impedanz)  
( $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$  komplexe Effektivwertzeiger)

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

$$\underline{Z} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} + j\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = R + jX$$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}|e^{j\varphi_Z}$$

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\underline{Z}\})^2 + (\operatorname{Im}\{\underline{Z}\})^2}$$

→

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U}{I}$$

$$\varphi = \varphi_Z = \varphi_U - \varphi_I$$

kapazitiver,  
induktiver Blindwiderstand:

Ohmscher Widerstand:  $R = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\}$

Blindwiderstand:  $X = \operatorname{Im}\{\underline{Z}\}$

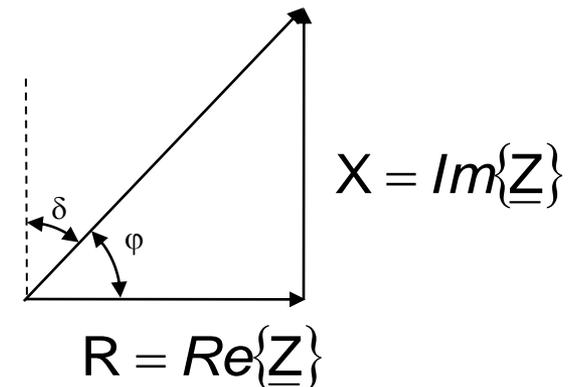
$$X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad X_L = \omega L$$

# Verlustfaktor und Güte einer Komponente

Verlustwinkel:  $\delta = 90^\circ - |\varphi|$

Verlustfaktor:  
(dissipation  
factor)  $d = \tan \delta = \tan(90^\circ - |\varphi|) = \frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}\}}{|\operatorname{Im}\{\underline{Z}\}|}$

Güte  
(Gütefaktor,  
quality factor)  $Q = \frac{1}{d} = \frac{1}{\tan \delta}$



Widerstandsdreieck

# Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

## Reihenersatzschaltung

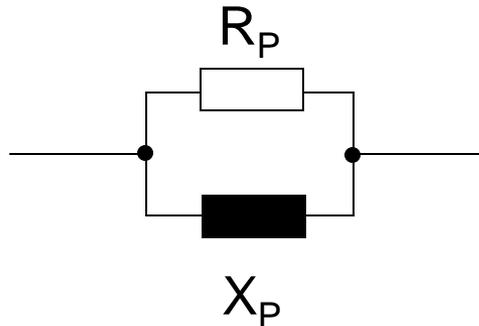


## Komplexer Scheinwiderstand

$$\underline{Z} = R_s + jX_s$$

s: seriell

## Parallelersatzschaltung

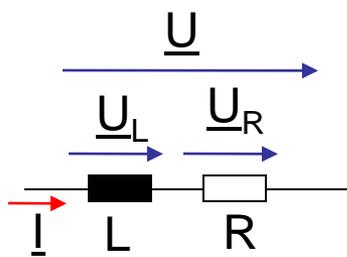
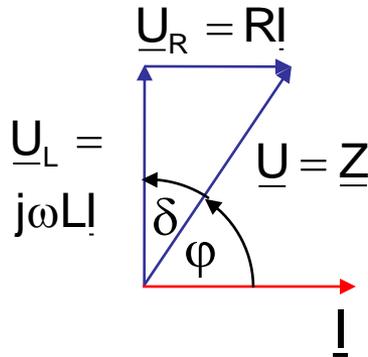
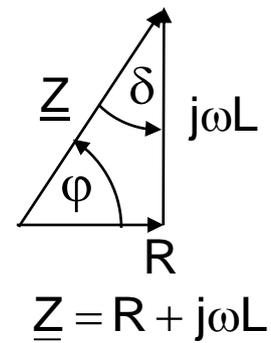
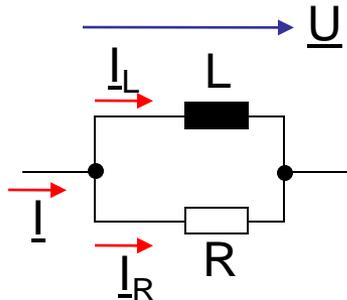
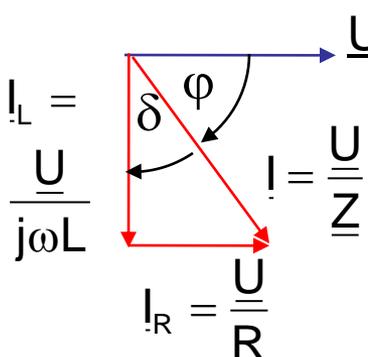
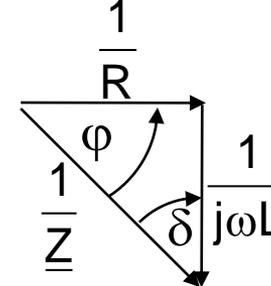


$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p}$$

p: parallel

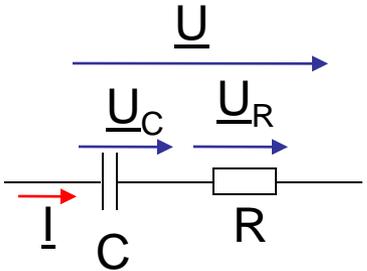
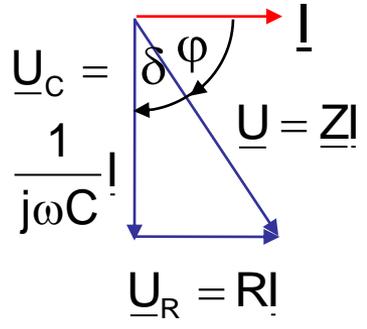
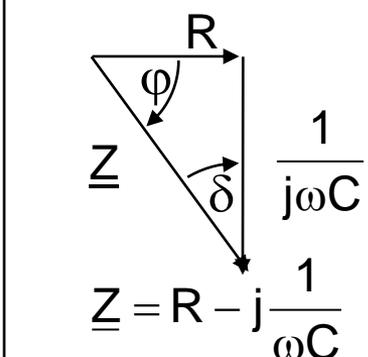
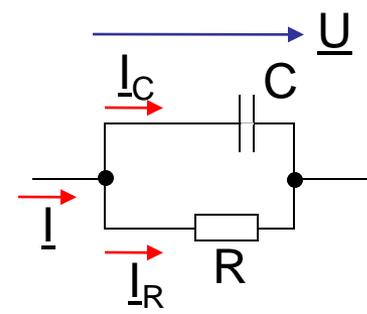
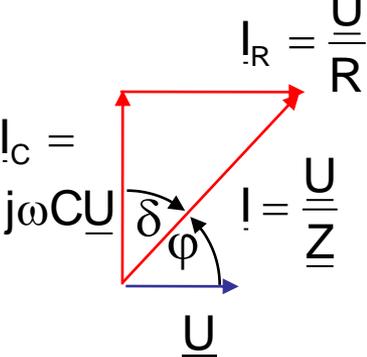
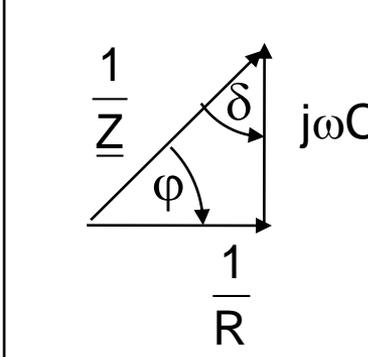
# Reale Bauelemente

## Ersatzschaltungen für Spulen

Ersatzschaltung	Zeigerdiagramm der Effektivwerte	Zeigerdiagramm Scheinwiderstand	$\tan \delta$
		 $\underline{Z} = R + j\omega L$	$\frac{U_R}{U_L}$ $\frac{R}{\omega L}$
		 $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$	$\frac{I_R}{I_L}$ $\frac{\omega L}{R}$

# Reale Bauelemente

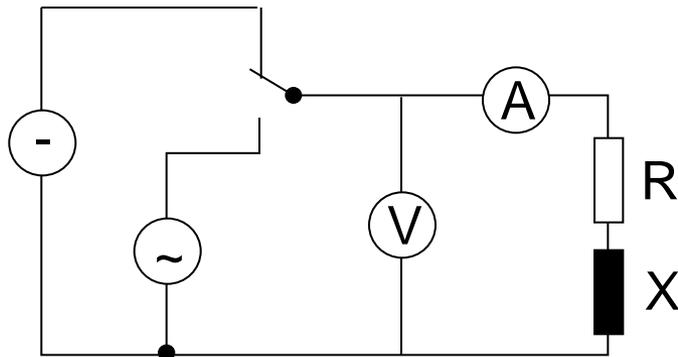
## Ersatzschaltungen für Kondensatoren

Ersatzschaltung	Zeigerdiagramm der Effektivwerte	Zeigerdiagramm Scheinwiderstand	$\tan \delta$
	 $\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}$ $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$ $\underline{U}_R = R \underline{I}$	 $\underline{Z} = R - j \frac{1}{\omega C}$	$\frac{U_R}{U_C}$ $\omega CR$
	 $\underline{I}_C = j\omega C \underline{U}$ $\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}$ $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$	 $j\omega C$ $\frac{1}{R}$	$\frac{I_R}{I_C}$ $\frac{1}{\omega CR}$

# Strom- und Spannungsmessung

Es gilt:  $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$        $Z = |\underline{Z}| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$

Beispiel: Reihenersatzschaltbild



$$\underline{Z} = R + jX$$

$$R = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}, \quad |\underline{Z}| = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$$

$$|\underline{Z}|^2 = R^2 + X^2$$

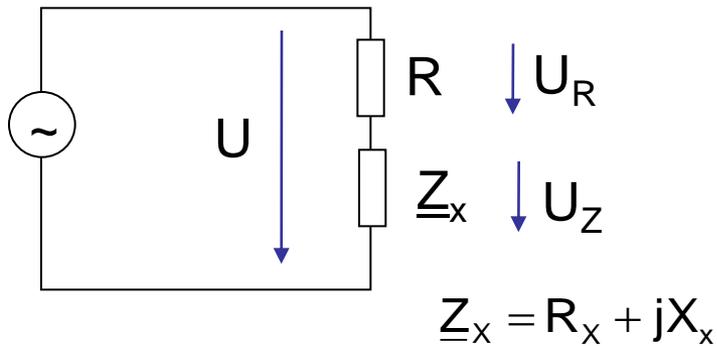
$$X = \sqrt{|\underline{Z}|^2 - R^2}$$

Probleme durch Gleichwertbestimmung von R:

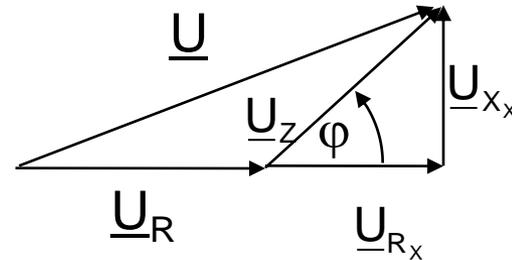
-keine Messung der frequenzabhängigen Verluste (z.B. Wirbelstromverluste )

→ Methode unbrauchbar, wenn diese Verluste bei Wechselspannung auftreten.

# Drei-Spannungs-Messverfahren



Spannungs-Zeigerdiagramm:



$$U^2 = U_R^2 + U_Z^2 - 2U_R U_Z \cos(180^\circ - \varphi_z)$$

$$|\varphi_z| = \arccos\left(\frac{U^2 - U_R^2 - U_Z^2}{2U_R U_Z}\right)$$

$$Z = \frac{U_Z}{I} = \frac{U_Z}{\frac{U_R}{R}} = R \frac{U_Z}{U_R}$$

→

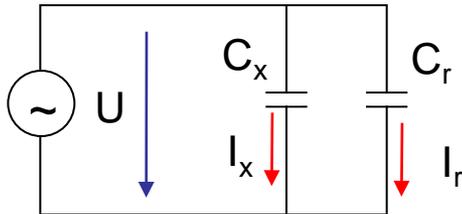
$$R_x = Z \cos(\varphi) = R \frac{U_Z}{U_R} \cos(\varphi_z)$$

$$|X_x| = Z \sin(\varphi) = R \frac{U_Z}{U_R} \sin(\varphi_z)$$

bis auf Vorzeichen von  $\varphi_z$  und  $X_x$  bestimmt.

# Vergleich mit Referenzelement

Strommessung

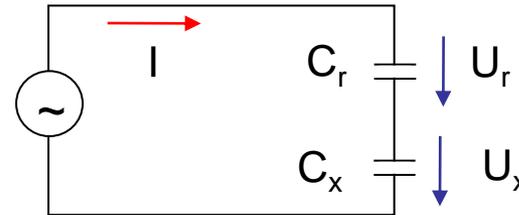


$$U = U_X = U_r$$

$$\frac{I_X}{\omega C_X} = \frac{I_r}{\omega C_r}$$

$$C_X = C_r \frac{I_X}{I_r}$$

Spannungsmessung

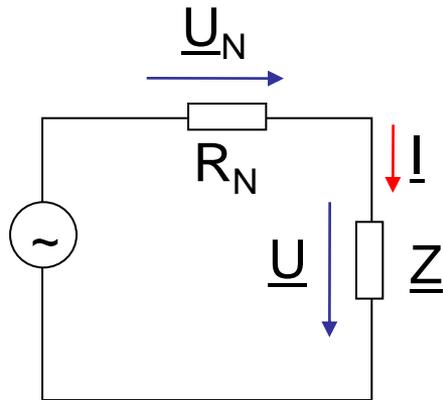


$$I = I_X = I_r$$

$$\omega C_X U_X = \omega C_r U_r$$

$$C_X = C_r \frac{U_r}{U_X}$$

# Messung von Strom, Spannung und Phasenwinkel: U-I Methode



Strombestimmung:

$$\underline{U}_N = R_N \underline{I}$$
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_N}{R_N}$$

$$\underline{Z} = R_N \frac{\underline{U}}{\underline{U}_N} = \frac{U_{\text{eff}}}{U_{N,\text{eff}}} R_N e^{j(\varphi_U - \varphi_{U_N})}$$

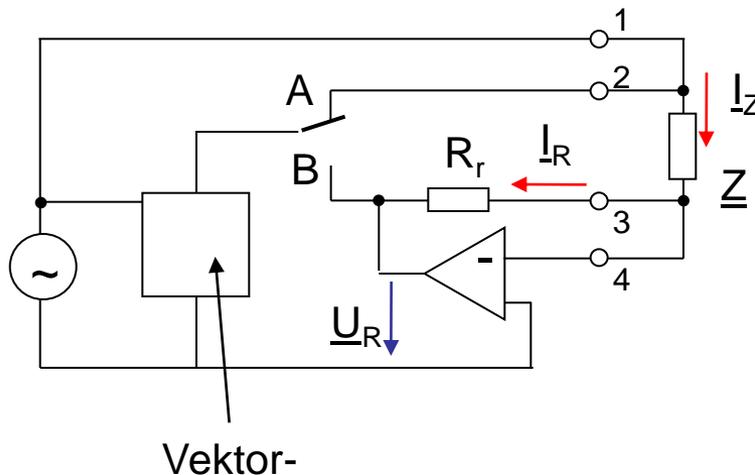
Bestimmung von  $\underline{Z}$  durch

- Messung der Effektivwerte  $U$ ,  $U_N$ ,
- die Phasendifferenz der Spannungen

Problem: Genauigkeit der Phasendifferenzmessung

# Messung von Strom, Spannung und Phasenwinkel: Impedanzmessgeräte

Beispiel: Präzisions LCR-Messgeräte „auto-balancing bridge“  
(Agilent Technologies)



Vektor-Spannungsmesser:

Stellung A:  $\underline{U}_0 = a + jb$

Stellung B:  $\underline{U}_R = c + jd$

(Messung von U mit  
Referenz:  $0^\circ$  &  $90^\circ$ )

Prinzip (bis etwa 100kHz):

$$\underline{U}_R = I_R R_r = I_Z R_r \quad (\text{I-U Konverter})$$

$$I_Z = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_0}{I_Z} = R_r \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_R}$$

Ergebnis:

$$\underline{Z} = R_x + jX_x = R_r \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_R} = R_r \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + j \frac{bc - ac}{c^2 + d^2} \right)$$

$$R_x = R_r \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad X_x = R_r \frac{bc - ac}{c^2 + d^2}$$

# LCR Messgerät



Agilent Tech.

Vorteile des balancing Prinzips:  
-Eingangsimpedanz des Amp-Meters (I-U Konverters) = 0  
-Kapazität der Anschlusskabel kann vernachlässigt werden, da kein Potential zwischen „4“ und Masse

Ausgabemöglichkeiten (incl. Komponenten des Ersatzschaltbildes):

$$|Z|, |Y|, \varphi_Z, \tan \delta, Q, R_S, X_S, L_S, C_S, R_P, X_P, L_P, C_P$$

Genauigkeiten: 0,1%, Gütemessungen bis über  $10^5$

Impedanzmessbereich: 0,01  $\Omega$ ...100 M $\Omega$

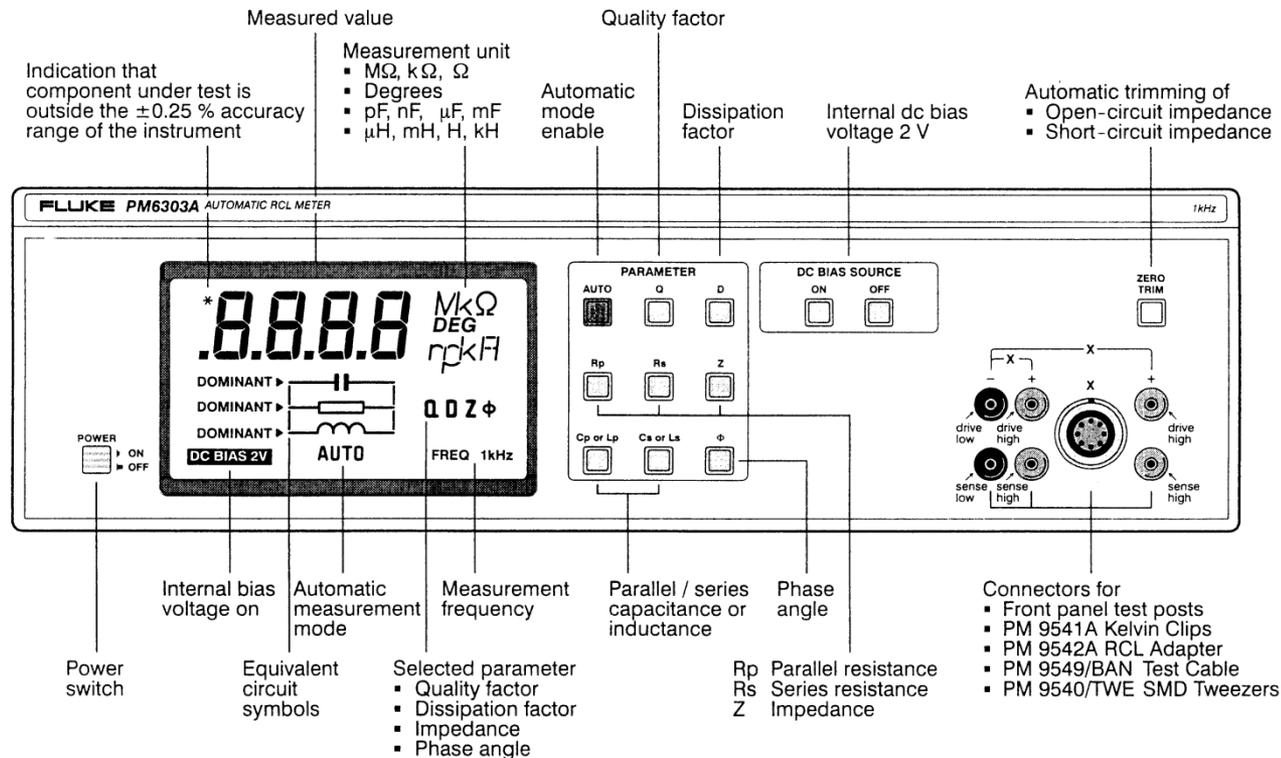
Geräte mit fester (1kHz) oder einstellbarer Quellenfrequenz (..100MHz, 1GHz)

# Beispiel PM6303A

PM6303A AUTOMATIC RCL METER 1kHz

Operating Card

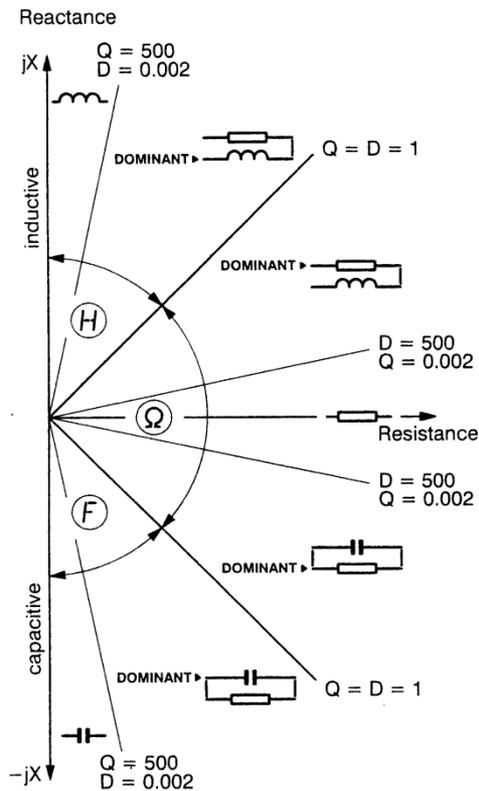
4822 872 10159  
951206



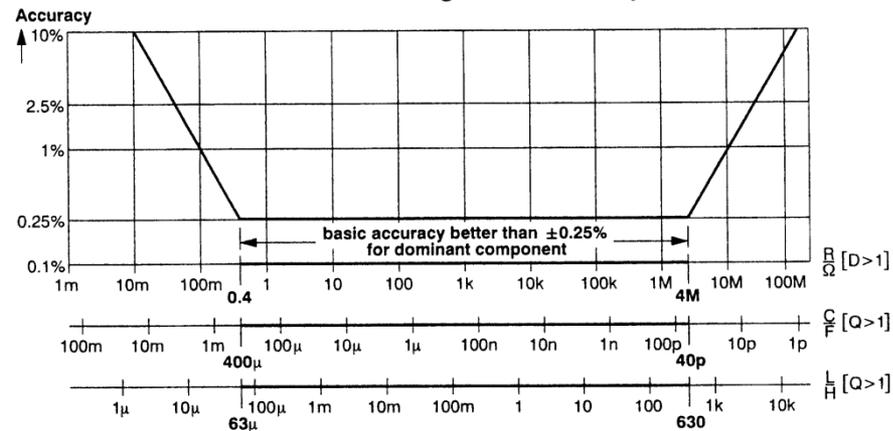
FLUKE®

# Beispiel PM6303A

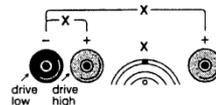
## Auto Mode Decision Diagram



## Measurement Ranges and Accuracy



- For SMD components use PM 9542SMD Adapter or the PM 9540/TWE SMD Tweezers.
- For larger components use PM 9542A RCL Adapter.
- For in-circuit measurement of components use PM 9541A Kelvin Clips Test Cable or the PM 9540/TWE SMD Tweezers.
- For two-wire measurement plug two normal test leads into the upper connectors.
- Center segments of digits flash when
  - Component exceeds measurement range. ( $R > 200 \text{ M}\Omega$ ,  $C > 100 \text{ mF}$ ,  $L > 20 \text{ kH}$ ,  $Q$  or  $D > 500$ ).
  - Resistances or inductances are measured with **DC BIAS 2V** on.
- Discharge capacitors before connecting.
- ZERO TRIM** compensates:
  - Contact and line resistances (up to  $10 \Omega$  in short circuit).
  - Stray capacitances in open circuit.
- Measurement frequency 1 kHz fixed.
- Measurement update rate: 2 measurements per second.



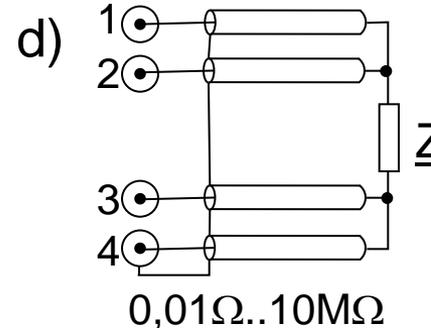
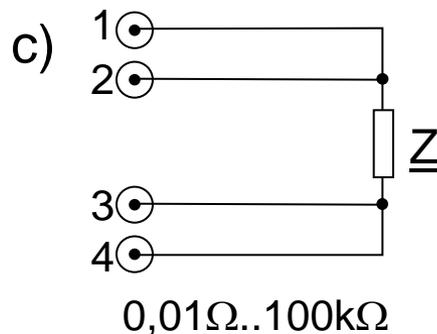
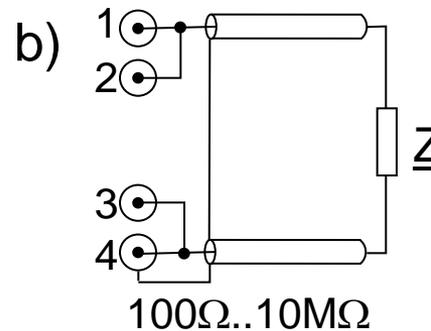
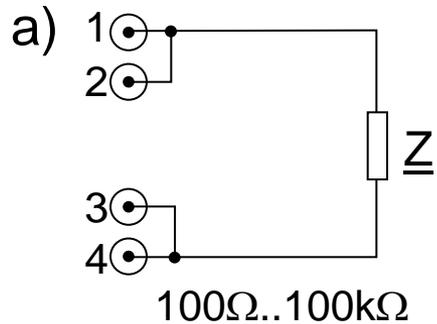
# Probenkontaktierung

Parasitäre Effekte:

niedrige Frequenzen: Leitungs- und Kontaktwiderstände, Induktivitäten

hohe Frequenzen: Kapazitäten und elektromagnetische Streufelder

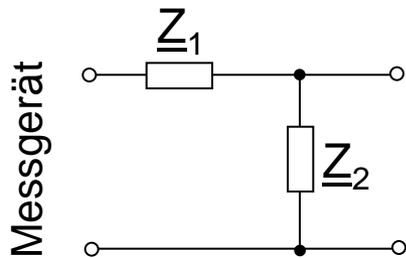
—————> 4 (5)-Leiteranschluss der Proben



# Kalibrierung

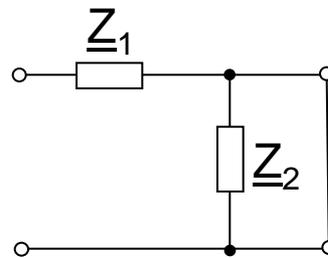
Ziel: Minimierung der Störeffekte der Messleitungen / Anschlüsse („open-short-load“, „open-short“ – Methode); Modell der Anschlüsse:

a) „open“



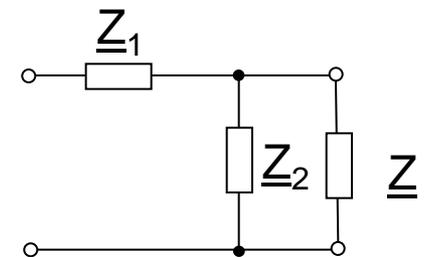
$$Z_{\text{open}} = Z_1 + Z_2$$

b) „short“



$$Z_{\text{short}} = Z_1$$

Messung:

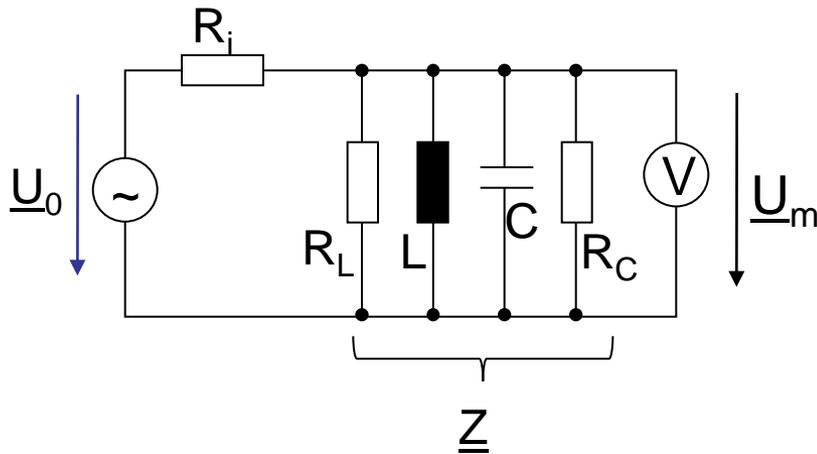


$$Z_{\text{Anz}} = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z}}$$

$$Z = \frac{Z_{\text{Anz}} - Z_{\text{short}}}{1 - \frac{Z_{\text{Anz}} - Z_{\text{short}}}{Z_{\text{open}} - Z_{\text{short}}}} \approx \frac{Z_{\text{Anz}} - Z_{\text{short}}}{1 - \frac{Z_{\text{Anz}} - Z_{\text{short}}}{Z_{\text{open}}}}, \text{ für } Z_{\text{open}} \gg Z_{\text{short}}$$

# Resonanzverfahren

Bestimmung der Komponentenparameter aus Resonanzfrequenz und Bandbreite (Güte) eines Schwingkreises



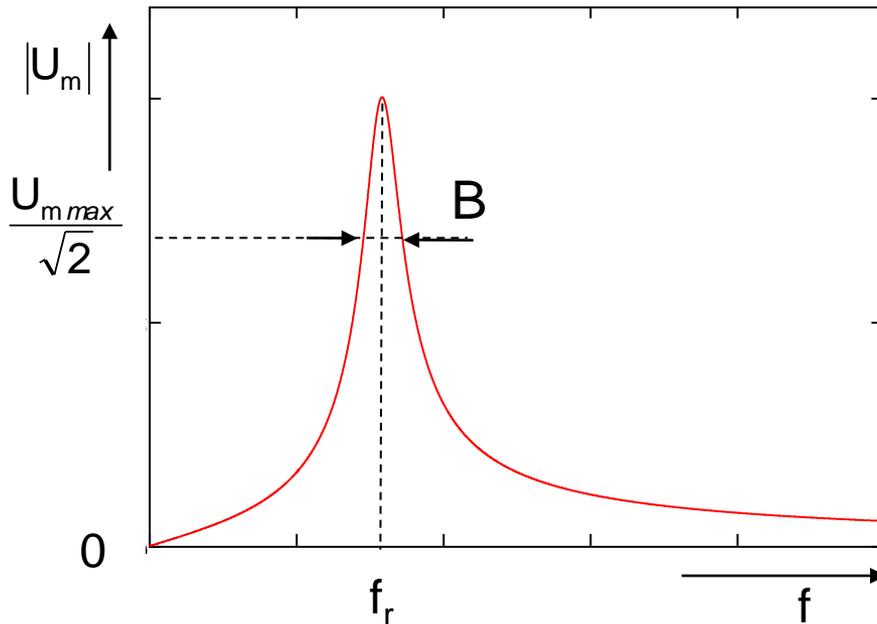
$$\underline{U}_m = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_i} \underline{U}_0 = \underline{U}_0 \frac{1}{1 + R_i \frac{1}{\underline{Z}}}$$

mit  $\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_C} + \frac{1}{R_L}$

$$\underline{U}_m(\omega) = \underline{U}_0 \frac{\frac{R_{\text{ges}}}{R_i}}{1 + jR_{\text{ges}} \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}$$

# Resonanzverfahren

Resonanzkurvendiskussion:



1. Resonanzfrequenz

$$|\underline{U}_m(\omega)| \rightarrow \max.$$

$$\omega_r C = \frac{1}{\omega_r L}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

2. Bandbreite

$$B = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi R_{\text{ges}} C}$$

$$Q = \frac{f_r}{B}$$

3. bestimmbare Größen:

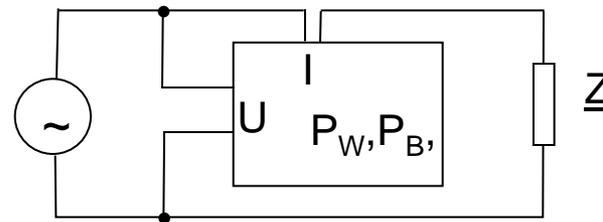
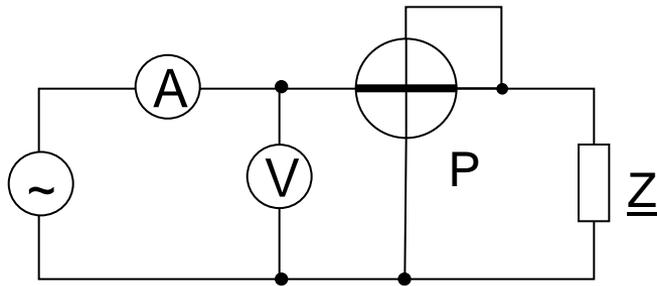
$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 L}$$

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C}$$

$$Q_x = \frac{f_r}{B}$$

# Messung an Verbrauchern im Wechselspannungsnetz

Messziel: Bestimmung der Impedanz von Netzkomponenten unter Betriebsbedingungen



Bestimmung von  $\underline{Z}$   
aus Wirkleistung

$$|Z| = \frac{U}{I}, \quad \cos \varphi = \frac{P}{UI}$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{\pm j \arccos \left( \frac{P}{UI} \right)}$$

aus Blindleistung

$$|Z| = \frac{U}{I}, \quad \sin \varphi = \frac{P_B}{UI}$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} e^{j \arcsin \left( \frac{P_B}{UI} \right)}$$

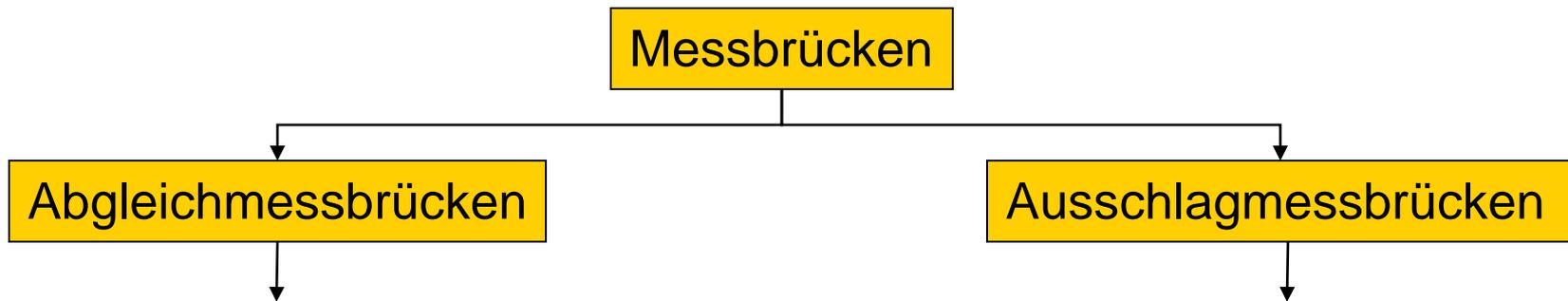
$\varphi > 0, P_B > 0$  induktive Last

$\varphi < 0, P_B < 0$  kapazitive Last

# Wechselspannungs-Messbrücken

## Überblick

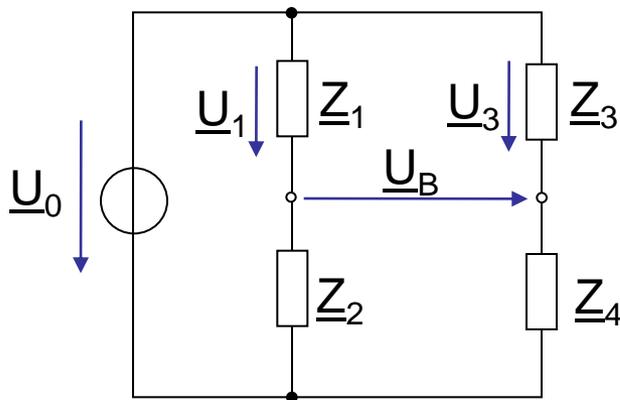
---



- Vielzahl bekannter Brücken
- Kapazitäts-Messbrücke nach Wien
- Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell
- Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell-Wien
- Phasenschieber-Brücke
- uva.

- ähnlich den Gleichspannungs-Schaltungen
- Viertelbrücke
  - Halbbrücke
  - Vollbrücke

# Prinzip



Berechnung:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_0 \left( \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} - \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right) = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

„Null“-Abgleichbedingung:

$$\underline{U}_B \stackrel{!}{=} 0 = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4, \quad \text{bzw.} \quad \underline{Y}_2 \underline{Y}_3 = \underline{Y}_1 \underline{Y}_4$$

# Zwei Abgleichbedingungen

$$\underline{U}_B \stackrel{!}{=} 0$$

$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

$$(R_2 + jX_2)(R_3 + jX_3) = (R_1 + jX_1)(R_4 + jX_4)$$

$$R_2 R_3 - X_2 X_3 = R_1 R_4 - X_1 X_4$$

$$X_2 R_3 + R_2 X_3 = X_1 R_4 + R_1 X_4$$

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi_Z} = Z e^{j\varphi_Z}$$

$$Z_2 Z_3 = Z_1 Z_4$$

$$\varphi_2 + \varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_4$$

komplexe  
Abgleichbedingung

Komponentenschreibweise

Bedingung für Realteil

Bedingung für Imaginärteil

Polarschreibweise

Bedingung für Betrag

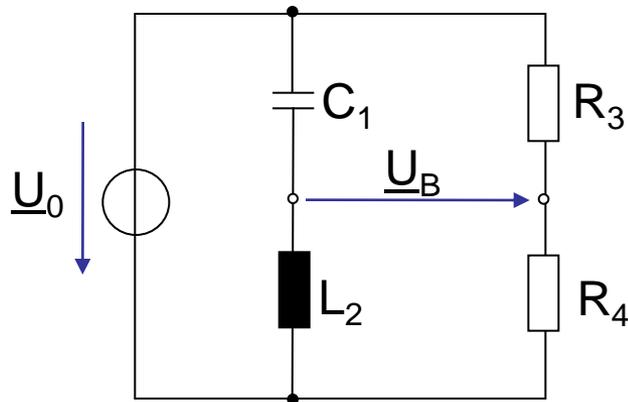
Bedingung für Phase

—————> Wechselstrombrücken haben 2 Abgleichbedingungen

# Prinzip

zwei unabhängige Stellglieder in Brücke nötig  
Oszilloskop als „Nullinstrument“

Beispiel für nicht abgleichbare Brücke



$$\varphi_1 < 0, \varphi_2 > 0$$

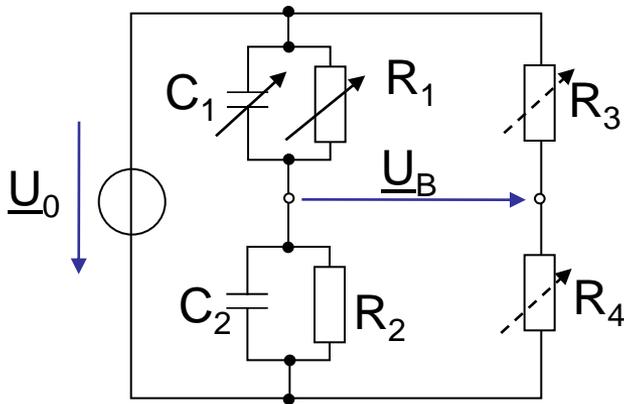
$$\varphi_3 = \varphi_4 = 0$$

$$\longrightarrow \varphi_2 + \varphi_3 \neq \varphi_1 + \varphi_4$$

# Kapazitäts-Messbrücke nach Wien

Vermessung verlustbehafteter Kondensatoren

Gesucht  $C_2$  und Wirkwiderstand  $R_2$



Berechnung (Abgleichbedingung):

$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

$$\frac{R_2}{j\omega C_2} R_3 = \frac{R_1}{j\omega C_1} R_4$$

$$R_2 + \frac{1}{j\omega C_2} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}$$

„Null“-Abgleichbedingung:

$$R_2 R_3 + j\omega R_1 R_2 R_3 C_1 = R_1 R_4 + j\omega R_1 R_2 R_4 C_2$$

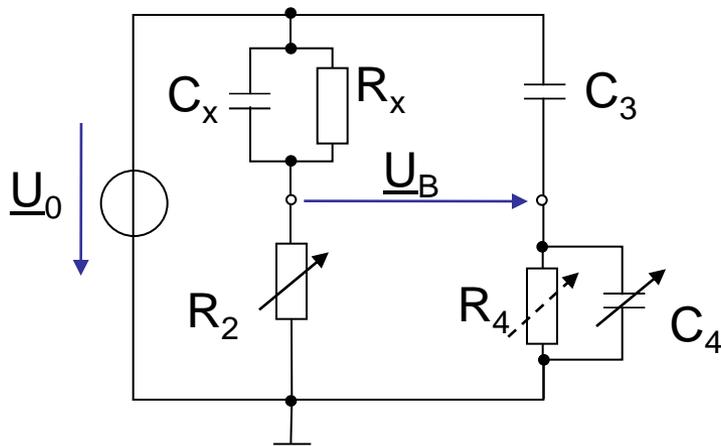
$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1$$

$$C_2 = \frac{R_3}{R_4} C_1$$

$$d = \tan \delta_1 = \tan \delta_2 = \frac{1}{C_1 R_1} = \frac{1}{C_2 R_2}$$

# Kapazitäts-Messbrücke nach Schering

Hochspannungstechnik: Vermessung von hochspannungsfesten Kapazitäten (z.B. Güte des Dielektrikums, Fertigungstests)



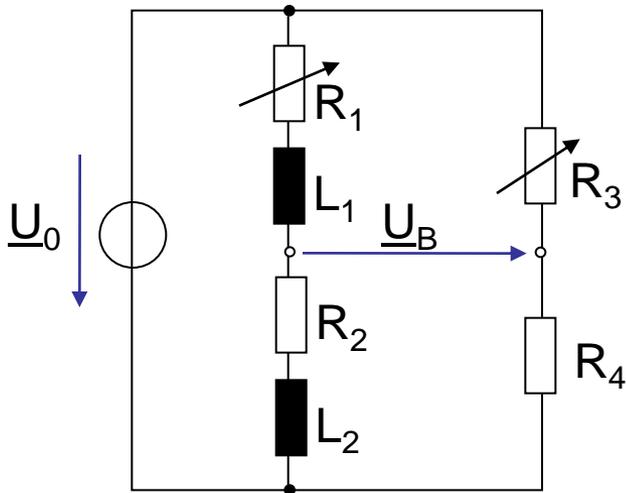
$$\underline{Y}_1 \underline{Y}_4 = \underline{Y}_2 \underline{Y}_3$$

$$C_x = C_3 \frac{R_4}{R_2 (1 + (\omega R_4 C_4)^2)}$$

$$\tan \delta = \frac{1}{\omega R_x C_x} = \omega R_4 C_4$$

# Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell

Messziel: Bestimmung verlustbehafteter Induktivitäten  
(gesucht  $R_2$ ,  $L_2$ )



$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

$$(R_2 + j\omega L_2)R_3 = (R_1 + j\omega L_1)R_4$$

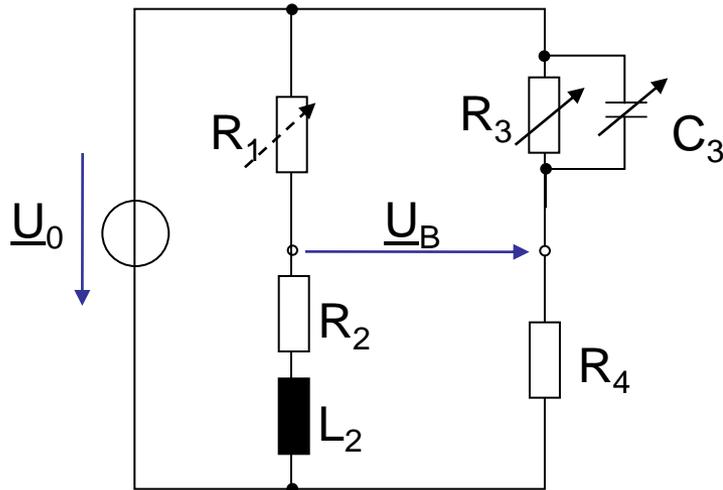
$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1$$

$$L_2 = \frac{R_4}{R_3} L_1$$

# Induktivitäts-Messbrücke nach Maxwell-Wien

Messziel: Bestimmung verlustbehafteter Induktivitäten

Vorteil: Bestimmung mit Kapazitätsnormal, keine Referenzinduktivität nötig  
(gesucht  $R_2$ ,  $L_2$ )



$$\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \underline{Z}_4$$

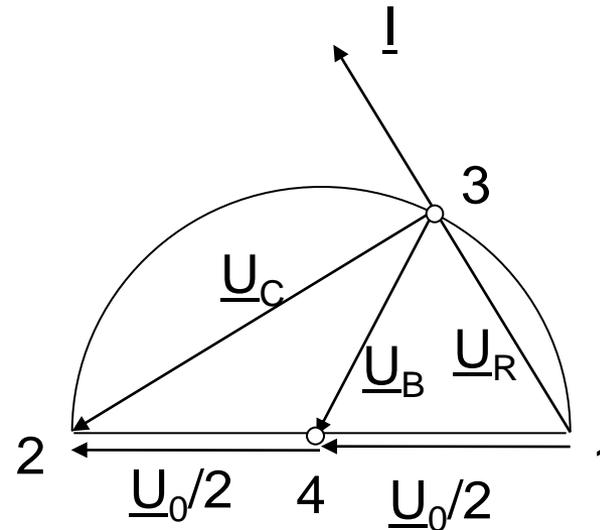
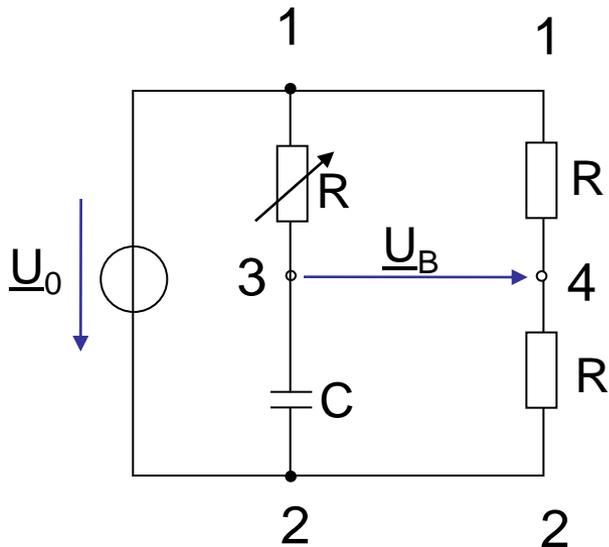
$$(R_2 + j\omega L_2) \left( \frac{\frac{R_3}{j\omega C_3}}{R_3 + \frac{1}{j\omega C_3}} \right) = R_1 R_4$$

$$R_2 = \frac{R_4}{R_3} R_1$$

$$L_2 = R_1 R_4 C_3$$

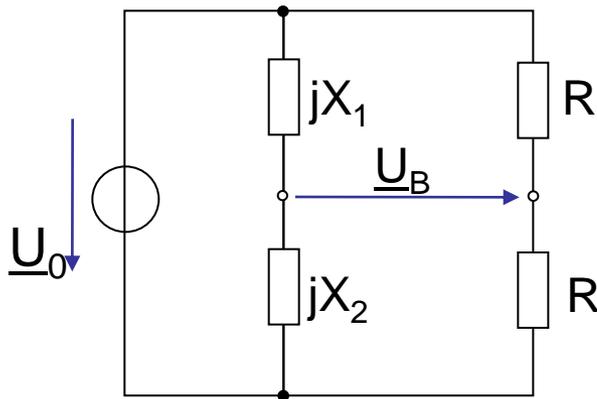
# Phasenschieber-Brücke

Ziel: Einstellung der Phase einer Spannung.  
Nullabgleich der Brücke nicht möglich.



# Ausschlagbrücken für Wechselspannung

Messziel: Messung nichtelektrischer Größen mit induktiven bzw. kapazitiven Aufnehmern, ohmsche Anteile werden hier vernachlässigt



$$\underline{U}_B = \underline{U}_0 \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 \underline{Z}_4}{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)(\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)}$$

$$\underline{U}_B = \underline{U}_0 \frac{j(X_2 - X_1)R}{j(X_1 + X_2)2R} = \frac{\underline{U}_0}{2} \frac{X_2 - X_1}{X_1 + X_2}$$

Viertelbrücke ( $X_1 = X_0$ ;  $X_2 = X_0 + \Delta X$ )

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{U}_0}{2} \frac{\Delta X}{2X_0 + \Delta X} \approx \frac{\underline{U}_0}{4X_0} \Delta X$$

Halbbrücke ( $X_1 = X_0 - \Delta X$ ;  $X_2 = X_0 + \Delta X$ )

$$\underline{U}_B = \frac{\underline{U}_0}{2} \frac{(X_0 + \Delta X) - (X_0 - \Delta X)}{(X_0 + \Delta X) + (X_0 - \Delta X)} = \frac{\underline{U}_0}{2X_0} \Delta X$$

# Lernziele Kapitel 11

---

- Reale Spule und Kondensator im Wechselstromkreis
- C und L durch Strom und Spannungsmessung
- Strom-, Spannungs- und Phasenwinkelmessung
- Impedanz-Messgeräte
- Resonanzverfahren im Schwingkreis
- Messung an Verbrauchern unter Last im Wechselstromkreis
- Messbrücken für Wechselspannung