

10 Messung von Ohmschen Widerständen

Motivation

Bestimmung von Induktivitäten

- Messung des Widerstandswert, Induktivität, Kapazität von elektrischer Widerstand, Spule, Kondensator
- elektrische Leitfähigkeit von Werkstoffen
 - Leiter und Isolatoren ($\mu\Omega \dots T\Omega$)
- rein „ohmsche“ Widerstände $\rightarrow U, I$ „in Phase“
- Scheinwiderstände (komplexe Widerstände) $\rightarrow U/I$ Phasenlage - $90^\circ \dots 90^\circ$
 - Kapazität
 - Induktivität
- Komplexe Widerstände (Schein- & Blindwiderstände) \rightarrow Kapitel 11
- Ohmsche Widerstände wichtige elektrische Größe für Sensorik, z.B.
 - Thermistoren (Temperatur)
 - Dehnungsmessstreifen (Länge)
 - Photoleiter (Lichtintensität)
 - Schleifwiderstände (Orts- / Winkelmessung)

Überblick

Messung von Ohmschen Widerständen

- Definition
- Strom- und Spannungsmessung
- Anwendung einer Konstant-Stromquelle
- Messung kleiner Widerstände und Widerstandsdifferenzen
- Brückenschaltungen zur Widerstandsbestimmung

Ohmscher Widerstand

Definition

$$R = \frac{u(t)}{i(t)}$$

Rein ohmsche Widerstände:
Verhältnis von u und i zeitunabhängig

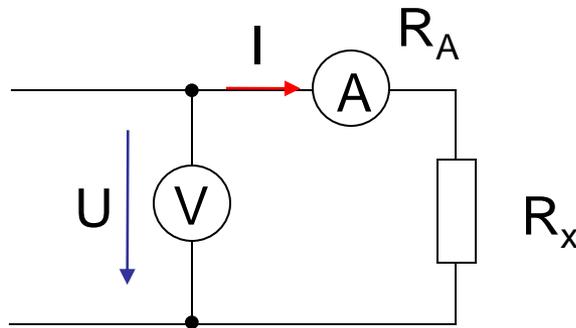
Messung

Gleichzeitige Messung von Strom und Spannung

Reale Messinstrumente → nicht vernachlässigbarer Innenwiderstand

→ Stromrichtige Messung und spannungsrichtige Messung

Stromrichtige Messung



R_A : Innenwiderstand des Strommessgerätes

Bestimmter Widerstand:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I(R_x + R_A)}{I} = R_x + R_A$$

Systematische Messabweichung

$$e = R - R_x = R_A$$

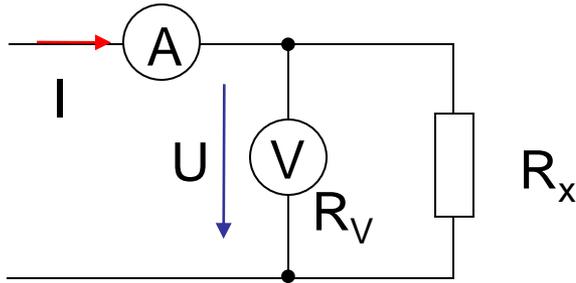
Korrigierter Messwert:

$$R_{\text{korr}} = \frac{U}{I} - R_A$$



geeignet für $R_x \gg R_A$

Spannungsrichtige Messung



R_V : Innenwiderstand des Spannungsmessgerätes

Bestimmter Widerstand:

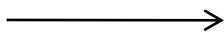
$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_V + I_{R_x}} = \frac{U}{\frac{U}{R_V} + \frac{U}{R_x}} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$$

Systematische Messabweichung

$$e = R - R_x = \frac{-R_x}{1 + \frac{R_V}{R_x}}$$

Korrigierter Messwert:

$$R_{\text{korr}} = \frac{U}{I - \frac{U}{R_V}}$$



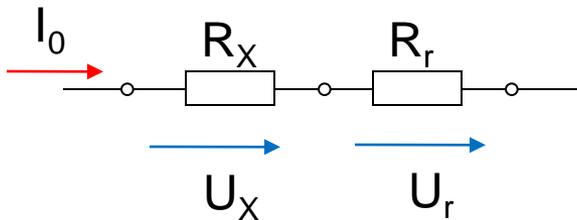
geeignet für $R_x \ll R_V$

Messung durch Vergleich mit einem Referenzwiderstand

Ziel: Vermeidung des Einflusses der Messgerät-Innenwiderstände

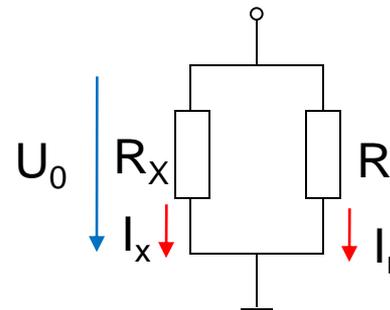
- systematische Messabweichung
- zwei Messgeräte tragen zur Messabweichung bei

Spannungsvergleich



$$R_X = \frac{U_X}{U_r} R_r$$

Stromvergleich

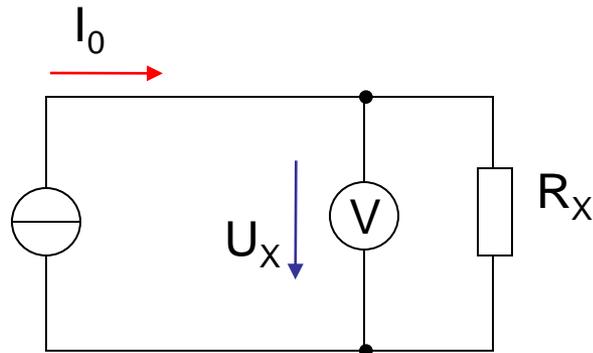


$$R_X = \frac{I_r}{I_X} R_r$$

Achtung: Messbereich der Messgeräte zwischen den Vergleichsmessungen konstant halten

Messung unter Verwendung einer Konstant-Stromquelle

→ „Ohmmeter“ als Teil der Multimeter



definierter
Konstantstrom I_0

Messung U_x

Bestimmung $R_x = \frac{U_x}{I_0}$

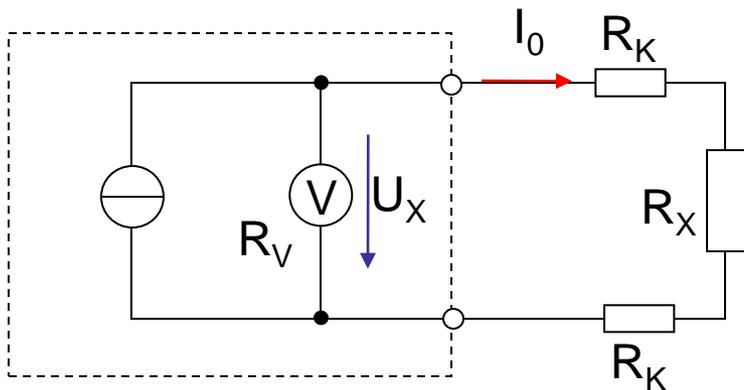
R korrigiert $R_x = \frac{U_x}{I_0 - \frac{U_x}{R_v}}$

Eingeprägter Konstantstrom:

- I_0 muss groß genug sein, um U_x genau genug messen zu können
- I_0 muss klein genug sein, um R_x nicht thermisch zu belasten
- Überschreiten der max. Ausgangsspannung der Stromquelle vermeiden

2- und 4-Draht-Widerstandsmessung

2-Draht-Messung



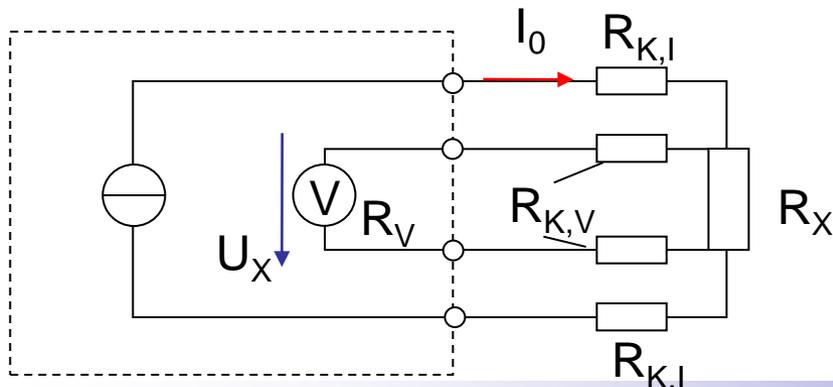
$$R_{\text{Mess}} = \frac{U_X}{I_0} = R_X + 2R_K$$

$$e = R_{\text{Mess}} - R_X = 2R_K$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{e}{R_X} = \frac{2R_K}{R_X}; e_{\text{rel}} \rightarrow 0, \text{ wenn } R_X \gg 2R_K$$

wenn R_X sehr klein \rightarrow

4-Draht-Messung

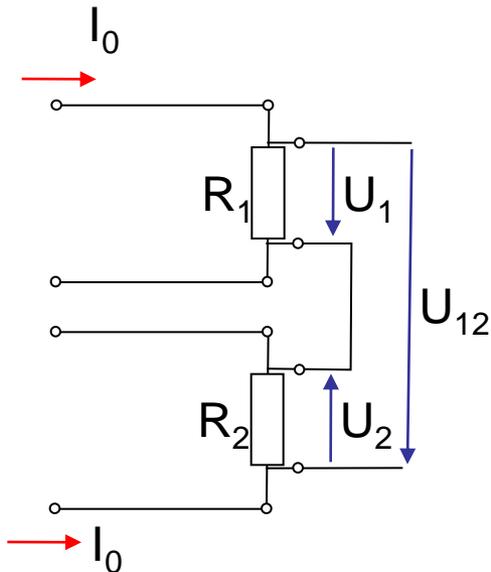


- keine Erfassung der Spannungsabfälle über $R_{K,I}$ durch V
- $R_V \gg R_{K,V} \rightarrow R_{K,V}$ können für U-Messung vernachlässigt werden
- Laborgeräte (Umschaltung mgl):
2-wire Ω , 4-wire Ω

Messung von Widerstandsdifferenzen

Anwendung in Sensorik / Prozessmesstechnik zur Trennung von Mess- und Störeffekten bei widerstandsbasierenden Messverfahren:

erwünschter Effekt A \rightarrow Widerstandsänderung ΔR_A (z.B. durch Längenänderung)
Störeffekt B \rightarrow Widerstandsänderung ΔR_B (z.B. durch Temperaturänderung)



$$U_{12} = U_1 - U_2 = I_0(R_1 - R_2)$$

$$R_1 = R_0 + \Delta R_A + \Delta R_B$$

$$R_2 = R_0 + \Delta R_B$$

$$U_{12} = I_0[(R_0 + \Delta R_A + \Delta R_B) - (R_0 + \Delta R_B)] = I_0 \Delta R_A$$

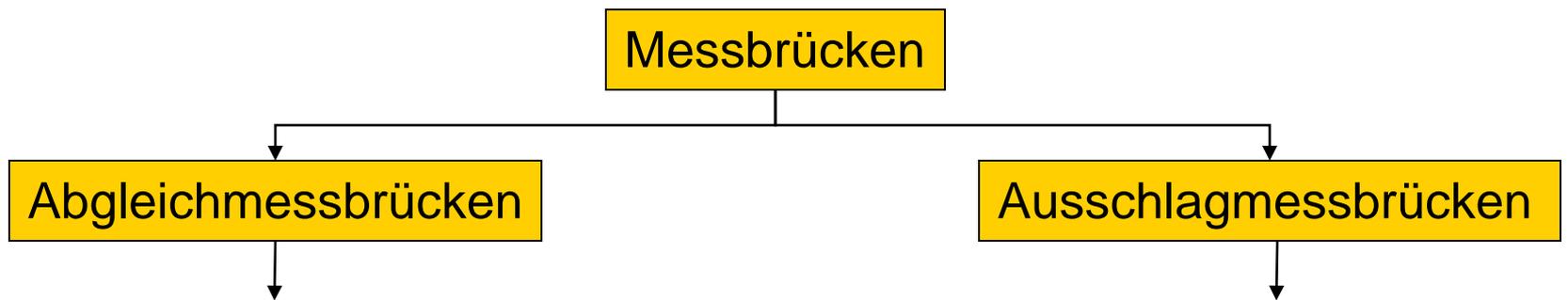
Überblick

Messbrücken zur Widerstandsbestimmung

Alternative zur Widerstandsbestimmung mit Hilfe von Strom- und Spannungsmessung

Messbrücke: Widerstandsnetzwerk, mit

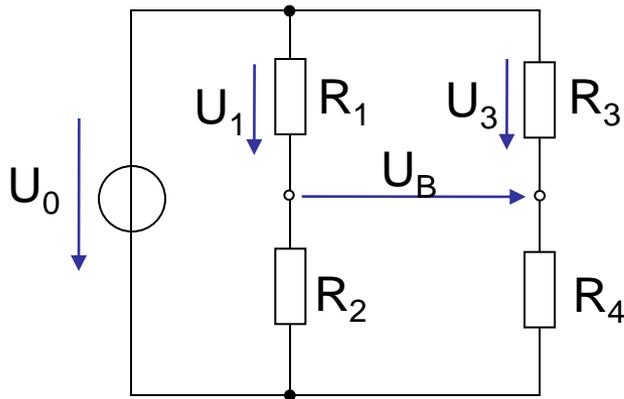
- Konstantstromspeisung
- Konstantspannungspeisung



- basieren auf „Nullabgleich“ der Brückenspannung mittels Veränderung eines oder mehrerer Einstellwiderstände
- Wheatstone-Brücke, Thomson-Brücke

- basieren Bestimmung des Widerstands aus resultierender Brückenspannung nach Arbeitspunkteinstellung
- kontinuierliche Widerstandsbestimmung ohne „Nullabgleich“

Abgleichbrücke: Wheatstone'sche Brücke



Berechnung:

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3 + R_4}$$

$$U_B = U_3 - U_1$$

$$U_B = U_0 \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = U_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

„Null“-Abgleichbedingung:

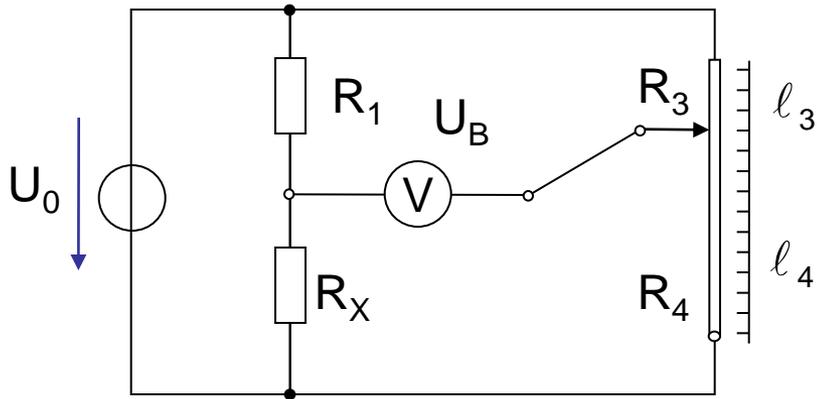
$$U_B \stackrel{!}{=} 0 = U_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

$$R_2 R_3 = R_1 R_4$$

$$R_2 = R_X = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$

Wheatstone-Brücke

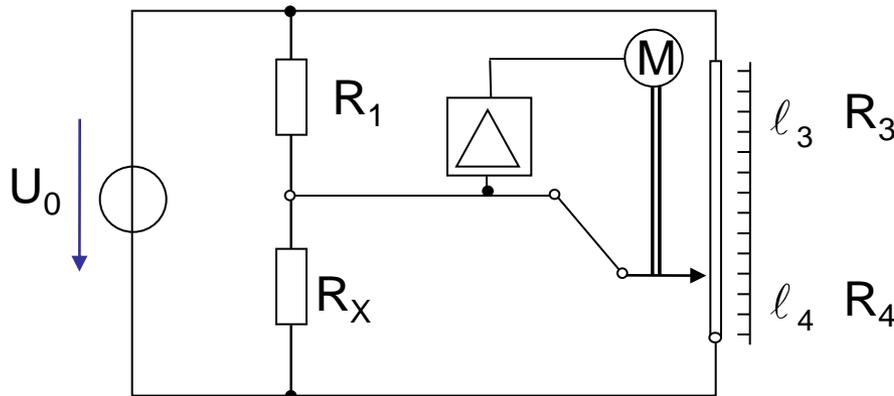
Schleifdraht-Messbrücke



$$R_3 = l_3 \frac{\rho}{A} \quad R_4 = l_4 \frac{\rho}{A}$$

$$R_x = R_2 = R_1 \frac{R_3}{R_4} = R_1 \frac{l_3}{l_4}$$

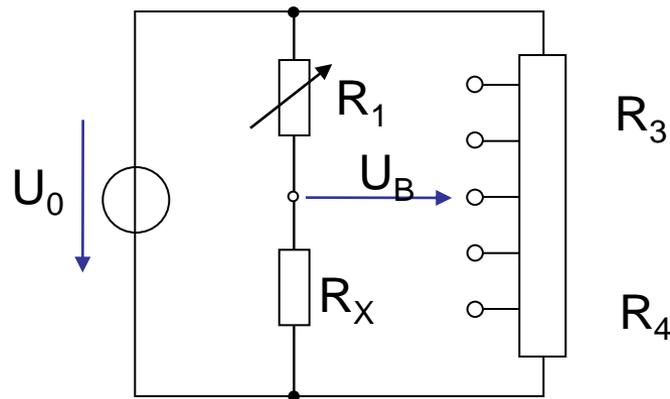
Elektro-mechanischer Abgleich



Brückenspannung zur
Ansteuerung des Schleifer-
motors
Kopplung mit Anzeige

Wheatstone-Brücke

Brücke mit Dekadenteiler (Grob- / Feinabstimmung)

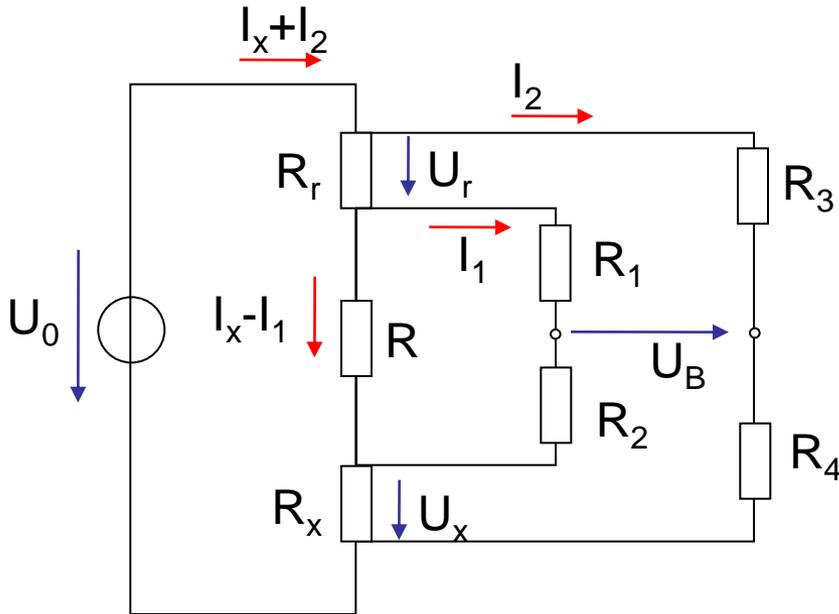


$$R_X = \frac{R_1 R_4}{R_3}$$

R_3, R_4 : Dekadenteiler zur Bereichswahl
 R_1 : Feinabstimmung der Brücke
innerhalb der Dekade

Abgleichbrücke: Thomson-Brücke

Brücke zur Messung von Widerständen bis $10^{-7}\Omega$



niederohmiger Strompfad: R_r, R, R_x

hochohmiger Spannungsmesspfad: R_1, R_2, R_3, R_4

mechanische Kopplung: $R_1/R_2 = R_3/R_4$

$$U_r = I_2 R_3 - I_1 R_1$$

$$U_x = I_2 R_4 - I_1 R_2$$

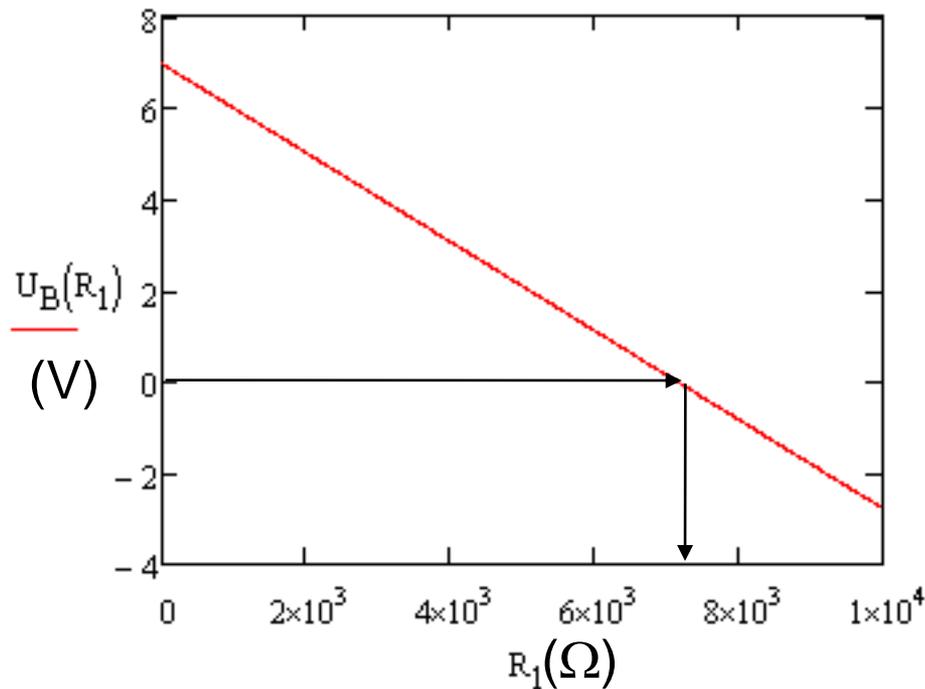
für Abgleichfall $U_B = 0$

$$\frac{U_x}{U_r} = \frac{I_2 R_4 - I_1 R_2}{I_2 R_3 - I_1 R_1} = \frac{R_4}{R_3} \frac{I_2 - I_1 \frac{R_2}{R_4}}{I_2 - I_1 \frac{R_1}{R_3}} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$$

$$I_r = I_x = \frac{U_r}{R_r} = \frac{U_x}{R_x} \rightarrow R_x = R_r \frac{U_x}{U_r} = R_r \frac{R_2}{R_1}$$

Thomson-Brücke

Beispiel: $R=20\Omega$, $R_x=200\Omega$, $R_r=500\Omega$, $U_0=10V$



abgeglichen bei:

$$R_1 = 7,143 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Poti 1: } R_2 = 10 \text{ k}\Omega - 7,143 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Poti 2: } R_4 = 10 \text{ k}\Omega - R_3$$

$$R_3 = R_4 * R_1 / R_2$$

$$R_x = R_r * R_2 / R_1$$

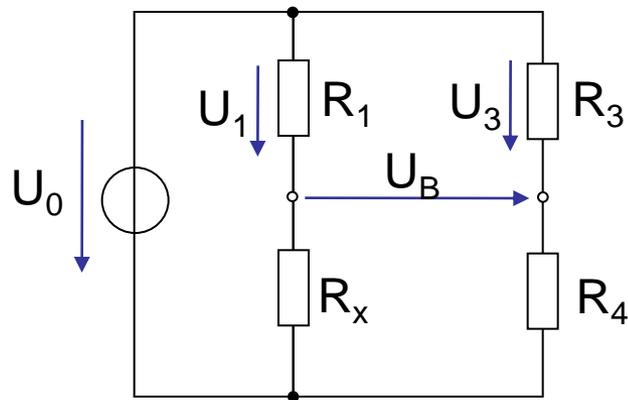
$$\rightarrow R_x = 200 \Omega$$

Ausschlagmessbrücken

Wirkungsweise

Brücke wird nicht abgeglichen, nach Abgleich des Arbeitspunktes ist
 Brückenspannung Maß für den Widerstand R_x
 Anwendung: Messung von Widerstandsänderungen

Prinzip und Kenngrößen



Brücken-
spannung

$$U_B = U_0 \frac{R_x R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_x)(R_3 + R_4)}$$

Empfindlich-
keit

$$E(R_1) = \frac{\partial U_B}{\partial R_x} = U_0 \frac{R_1}{(R_1 + R_x)^2}$$

max. Empfindlichkeit

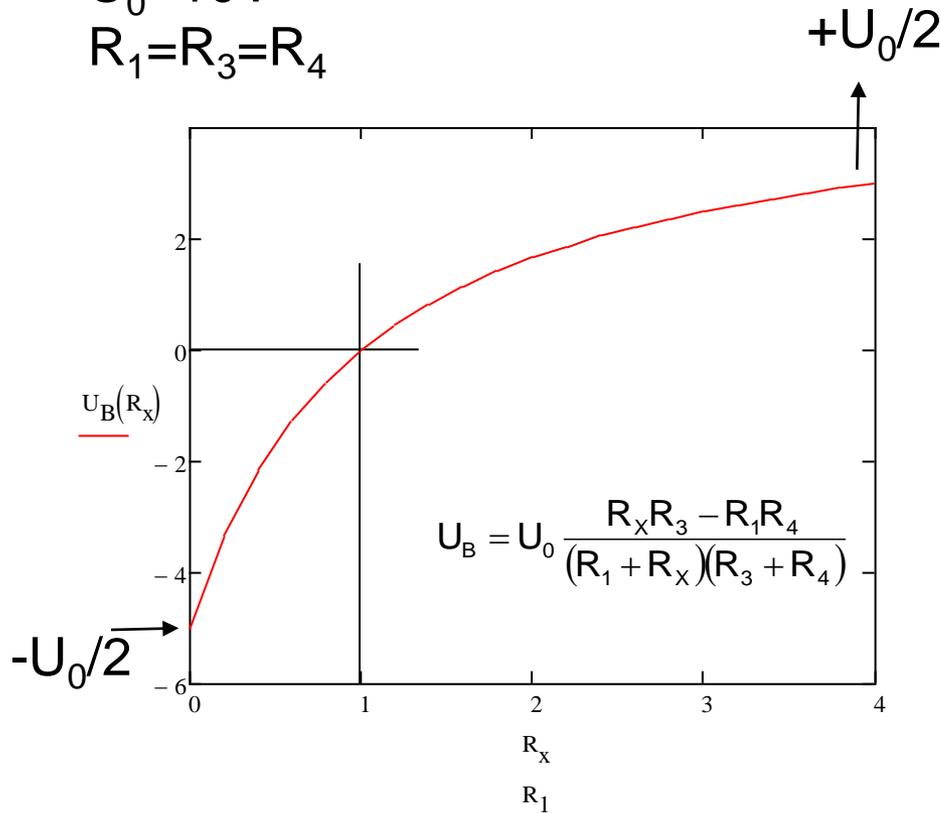
$$\frac{\partial E}{\partial R_1} = 0 \rightarrow R_1 = R_x$$

Graphische Darstellung

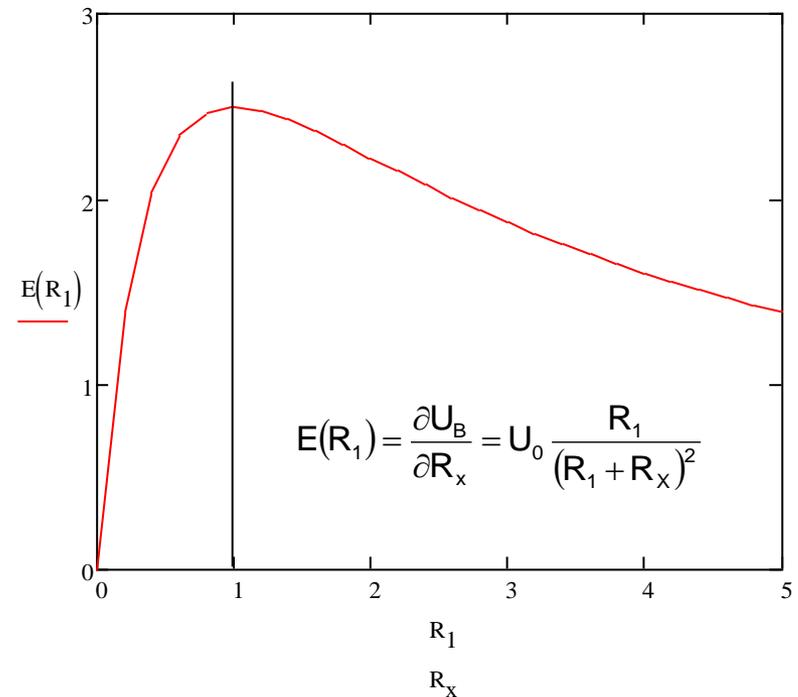
Brückenspannung

$$U_0 = 10V$$

$$R_1 = R_3 = R_4$$



Empfindlichkeit

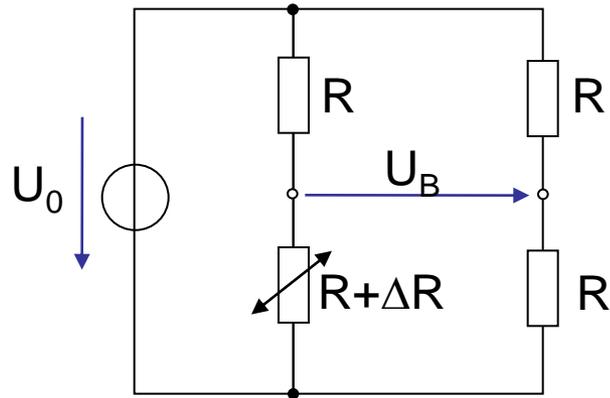


Viertel-, Halb- und Vollbrücke

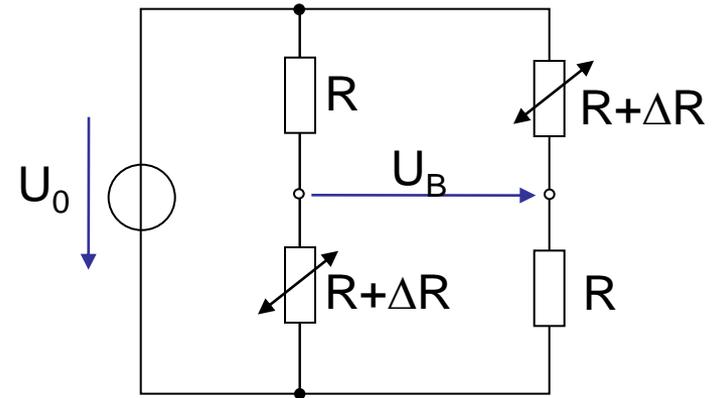
Beispiele

Mehrere Sensorelemente in der Brücke \rightarrow Empfindlichkeitserhöhung

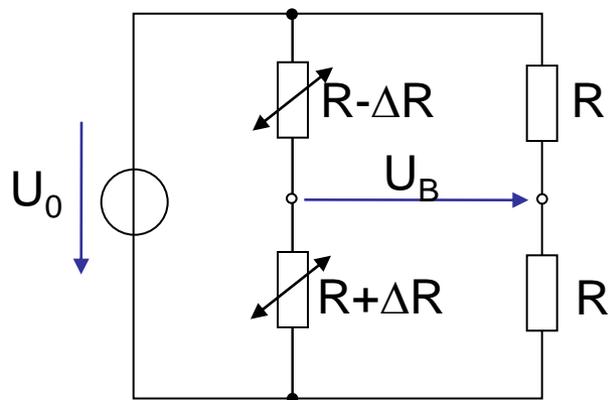
Viertelbrücke



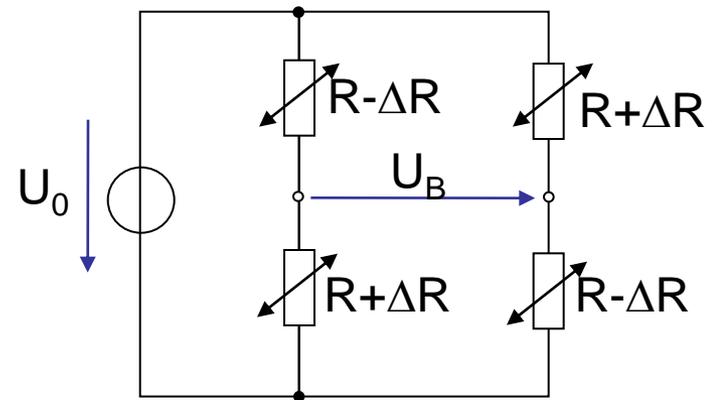
Halbbrücke I



Halbbrücke II



Vollbrücke



Berechnungen

Mehrere Sensorelemente in der Brücke → Empfindlichkeitserhöhung

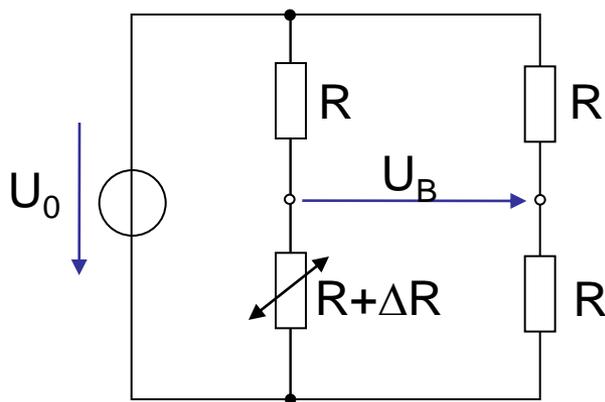
Brückenspannung:

$$U_B = U_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Empfindlichkeit der Brücke:

$$E = \frac{\partial U_B}{\partial \Delta R}$$

Viertelbrücke



$$R_2 = R + \Delta R, \quad R_1 = R_3 = R_4 = R$$

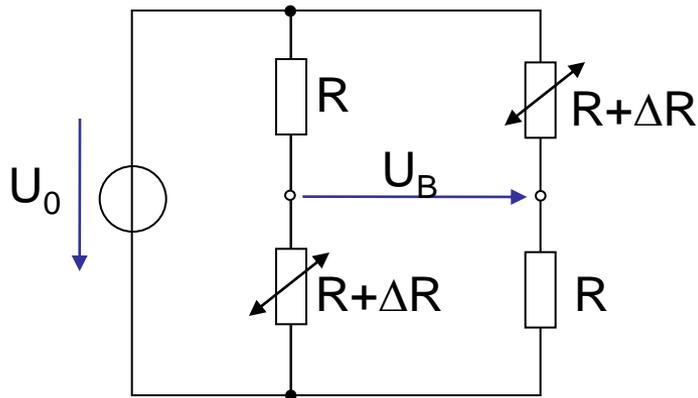
$$U_B = U_0 \frac{(R + \Delta R)R - RR}{(2R + \Delta R)2R} = U_0 \frac{\Delta R}{2(2R + \Delta R)}$$

$$U_B \approx U_0 \frac{\Delta R}{4R}, \quad |\Delta R| \ll R$$

$$E = \frac{\partial U_B}{\partial \Delta R} \approx \frac{U_0}{4R}, \quad |\Delta R| \ll R$$

Berechnungen

Halbbrücke I



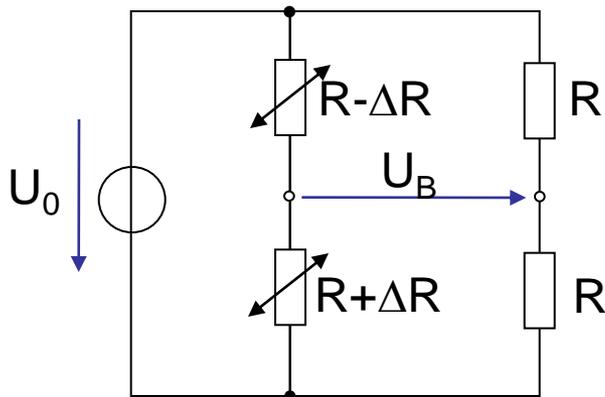
$$R_2 = R + \Delta R, \quad R_3 = R + \Delta R, \quad R_1 = R_4 = R$$

$$U_B = U_0 \frac{(R + \Delta R)(R + \Delta R) - RR}{(2R + \Delta R)(2R + \Delta R)} = U_0 \frac{2R\Delta R + (\Delta R)^2}{(2R + \Delta R)^2}$$

$$U_B \approx U_0 \frac{\Delta R}{2R}, \quad |\Delta R| \ll R$$

$$E = \frac{\partial U_B}{\partial \Delta R} \approx \frac{U_0}{2R}, \quad |\Delta R| \ll R$$

Halbbrücke II



$$R_1 = R - \Delta R, \quad R_2 = R + \Delta R, \quad R_3 = R_4 = R$$

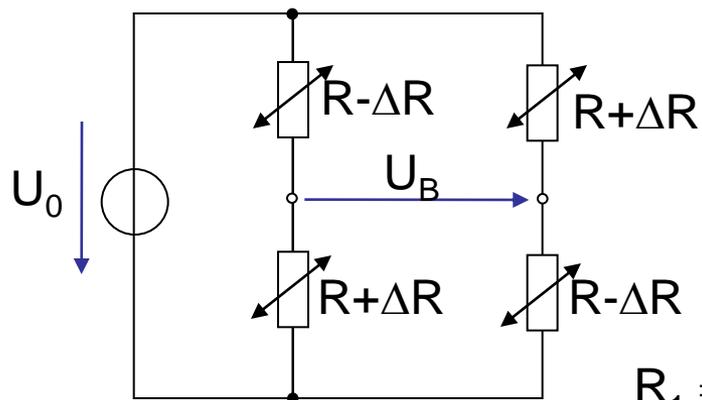
$$U_B = U_0 \frac{(R + \Delta R)R - (R - \Delta R)R}{(2R)(2R)} = U_0 \frac{2R\Delta R}{4R^2}$$

$$U_B = U_0 \frac{\Delta R}{2R}$$

$$E = \frac{\partial U_B}{\partial \Delta R} = \frac{U_0}{2R}$$

Berechnungen

Vollbrücke



$$R_1 = R - \Delta R, \quad R_2 = R + \Delta R,$$

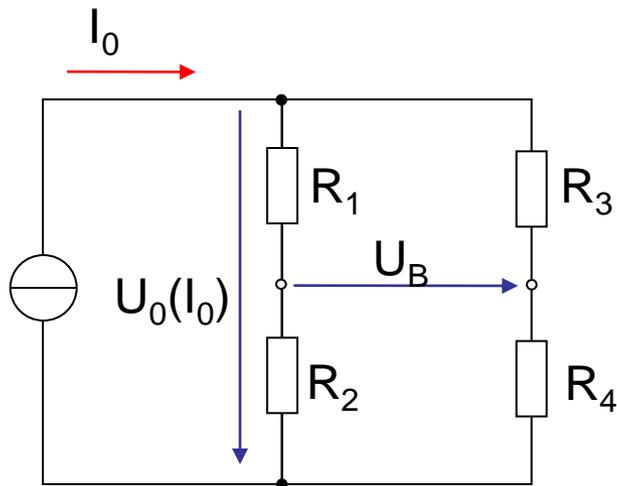
$$R_3 = R + \Delta R, \quad R_4 = R - \Delta R$$

$$U_B = U_0 \frac{(R + \Delta R)^2 - (R - \Delta R)^2}{(2R)(2R)} = U_0 \frac{2R\Delta R - (-2R\Delta R)}{4R^2}$$

$$U_B = U_0 \frac{\Delta R}{R}$$

$$E = \frac{\partial U_B}{\partial \Delta R} = \frac{U_0}{R}$$

Stromgespeiste Ausschlag-Messbrücke



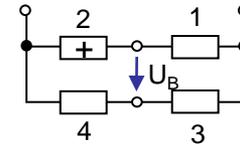
$$U_0(I_0) = I_0 [(R_1 + R_2) \parallel (R_3 + R_4)]$$

$$U_0(I_0) = I_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$$

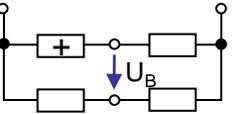
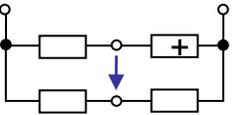
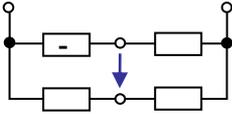
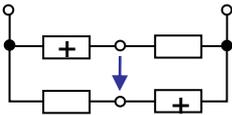
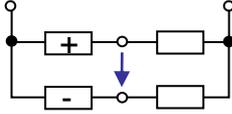
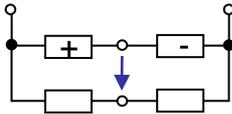
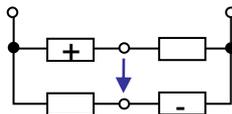
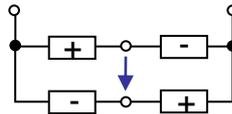
$$U_B = I_0 \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

$$U_B = I_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = I_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\sum_i R_i}$$

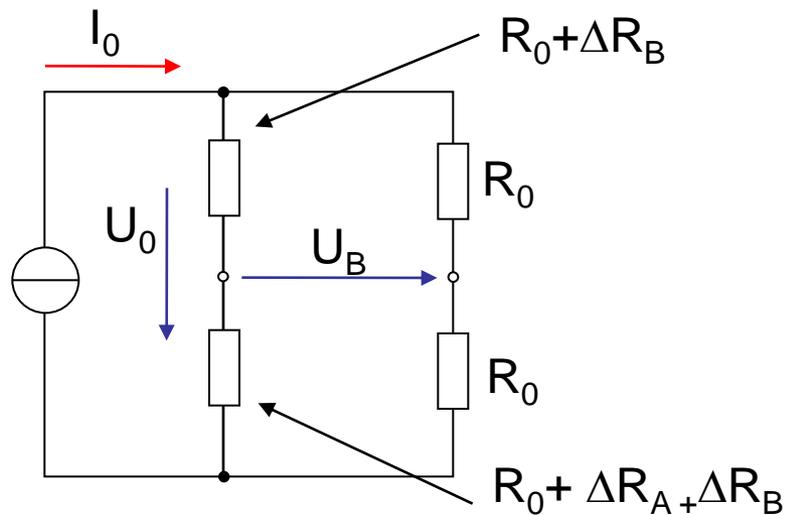
Zusammenfassung Brückenempfindlichkeiten



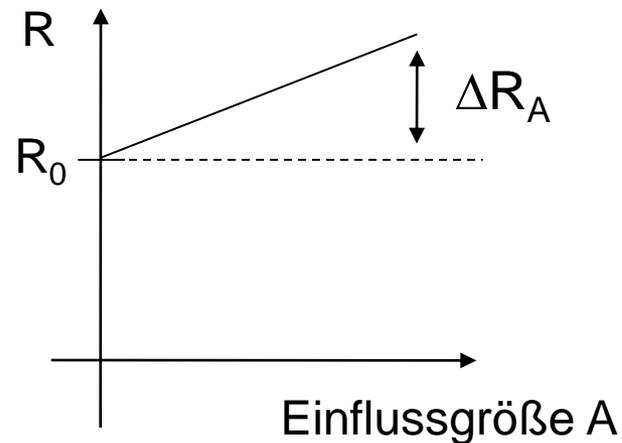
 $R_i = R + \Delta R$
 $R_i = R - \Delta R$

		U₀-gespeist	I₀-gespeist
1		$U_B \approx U_0 \frac{\Delta R}{4R}$	$U_B \approx I_0 \frac{\Delta R}{4}$
2		$U_B \approx -U_0 \frac{\Delta R}{4R}$	$U_B \approx -I_0 \frac{\Delta R}{4}$
3		$U_B \approx -U_0 \frac{\Delta R}{4R}$	$U_B \approx -I_0 \frac{\Delta R}{4}$
4		$U_B \approx U_0 \frac{\Delta R}{2R}$	$U_B = I_0 \frac{\Delta R}{2}$
5		$U_B \approx U_0 \frac{\Delta R}{2R}$	$U_B = I_0 \frac{\Delta R}{2}$
6		$U_B = U_0 \frac{\Delta R}{2R}$	$U_B = I_0 \frac{\Delta R}{2}$
7		$U_B \approx -U_0 \frac{1}{4} \left(\frac{\Delta R}{R} \right)^2$	$U_B = -I_0 \frac{1}{4} \frac{(\Delta R)^2}{R}$
8		$U_B = U_0 \frac{\Delta R}{R}$	$U_B = I_0 \Delta R$

Nullpunktunterdrückung und Kompensation einer Störgröße



Einflussgröße: A, Störgröße: B



$$U_B = I_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{\sum_i R_i}$$

$$U_B = I_0 \frac{(R_0 + \Delta R_A + \Delta R_B) R_0 - R_0 (R_0 + \Delta R_B)}{4R_0 + \Delta R_A + 2\Delta R_B}$$

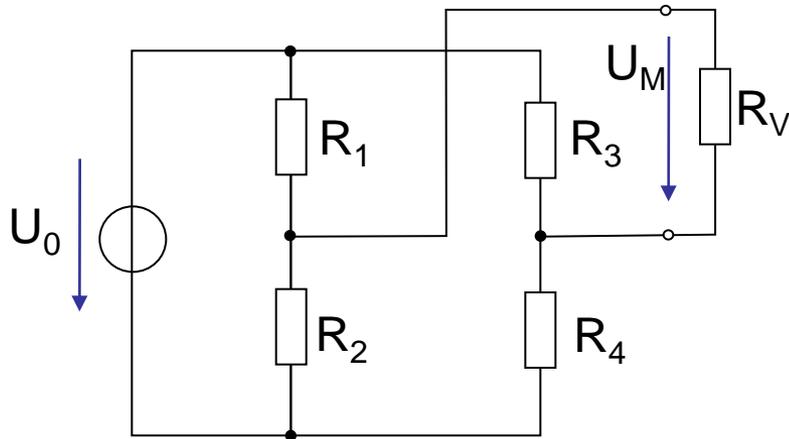
$$U_B = I_0 \frac{R_0 \Delta R_A}{4R_0 + \Delta R_A + 2\Delta R_B} \approx \frac{I_0}{4} \Delta R_A$$

$$U_B(\Delta R_A) \approx \frac{I_0}{4} \Delta R_A$$

- Nullpunkt R_0 unterdrückt
- Störgröße B kompensiert

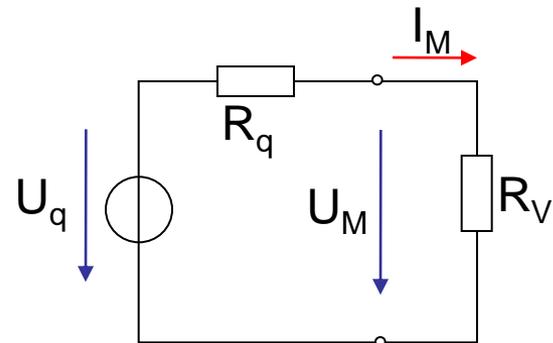
Belastete Brücke

bisher: Messung von U_B ohne Rückwirkung auf die Brücke ($R_V \rightarrow \infty$)
jetzt: Messung von U_B mit realem Voltmeter (Innenwiderstand R_V)



Ersatzschaltbild

R_q : Quelleninnenwiderstand
 U_q : Quellenspannung



Belastete Brücke

Berechnung

$$U_q = U_B(R_V \rightarrow \infty) = U_0 \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

U_0 kurzgeschlossen \rightarrow Brückenwiderstand

$$R_q = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

gemessene Brückenspannung bei Belastung:

$$U_M = R_V I_M = R_V \frac{U_q}{R_q + R_V}$$

Abweichung

systematisch:

$$e = U_M - U_q = U_M - U_{B(R_V \rightarrow \infty)}$$

relativ:

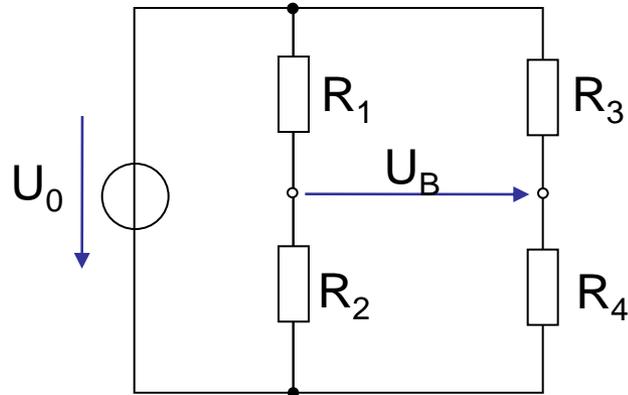
$$e_{\text{rel}} = \frac{e}{U_B} = \frac{U_M - U_B}{U_B} = \frac{U_M}{U_B} - 1$$

$$e_{\text{rel}} = \frac{R_V}{(R_q + R_V)} - 1 = -\frac{R_q}{R_q + R_V}$$

\rightarrow Relative Abweichung von U_B durch Belastung der Brücke ist klein,
wenn $R_V \gg R_q$

- hochohmige Messung von U_B
- „Quellwiderstand“ der Brücke muss klein sein

Beispiel zur Dimensionierung der Brücke



Beispiel

$$R_x = R_2 = R_{2,0} + \Delta R$$

→ Dimensionierungsvorschriften für Brücke (Beispiel $R_2 = R_{2,0} + \Delta R$):

1. $R_1 = R_{2,0}$, wegen max. Empfindlichkeit der Brücke (s. Folie 17)
2. $R_3/R_4 = R_1/R_2$, wegen Nullpunktbestimmung der Brücke, $U_B = 0$ (s. Folie 12), nur Verhältnis der Widerstände ist festgelegt
3. R_3, R_4 nicht zu klein, da sonst U_0 belastet wird
4. R_3, R_4 nicht zu groß, da sonst Ungenauigkeit der Bestimmung von U_B ; Widerstand der Messbrücke zu groß – Belastung von U_B Messabweichung (s. Folie 27)
5. zweckmäßig: R_3, R_4 in Größenordnung von R_1 und R_2

Lernziele Kapitel 10

- Ohmsche Widerstände
- Strom- und spannungsrichtige Messung
- Referenzwiderstand, Konstantstromquelle
- Messbrücken
 - Abgleichmessbrücken
 - Ausschlagmessbrücken
 - Viertel-, Halb-, Vollbrücken
 - richtige Dimensionierung der Brückenschaltungen