

## Impulse auf Leitungen

Um die Ausbreitung von Impulsen auf einer Leitung zu studieren, versuchen wir zunächst eine Lösung in der Laplace-Ebene der komplexen Frequenz  $p$  aufzustellen. Die Impulsausbreitung auf einer endlichen fehlangepassten Leitung ist ein Problem, wo die Vorteile der Laplacetransformation wirklich zum tragen kommen. Wir setzen dabei eine ideale Leitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_0$  und der Länge  $l$  sowie der Phasengeschwindigkeit  $v$  der Welle voraus. Für eine solche Leitung ergibt sich die frequenzunabhängige Laufzeit  $T = l/v$ . Zum Startzeitpunkt  $t = 0$  sei die Leitung energiefrei ( $a(0,z) = b(0,z) \equiv 0$ ).

Die angeschlossene Wellenquelle (siehe Abschnitt Wellenquellen) startet zunächst die Urwelle  $b_0(p) = u_0(p) \cdot (1 + w_G(p))^{-1}$ , die Ursache für die Schar der hinlaufenden und rücklaufenden Wellen

$$a(p, z) = \frac{b_0(p)}{1 - \tilde{\Gamma}_L(p) \cdot \Gamma_G(p)} \cdot e^{-p \cdot \frac{z}{v}} \quad \text{und} \quad b(p, z) = \frac{b_0(p) \cdot \tilde{\Gamma}_L(p)}{1 - \tilde{\Gamma}_L(p) \cdot \Gamma_G(p)} \cdot e^{p \cdot \frac{z}{v}} \quad \text{ist.}$$

Spannung und Strom auf der Leitung ergeben sich aus der Überlagerung  $a + b$  und  $a - b$ . Für die Rücktransformation dieser Ausdrücke benutzen wir zweckmäßig für den Nenner die folgende Entwicklung in eine geometrische

Reihe. Das ist möglich, da das Produkt  $|\tilde{\Gamma}_L(p) \cdot \Gamma_G(p)| \leq 1$  gilt.

$$\frac{1}{1 - \tilde{\Gamma}_L(p) \cdot \Gamma_G(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{\Gamma}_L(p) \cdot \Gamma_G(p))^k$$

Ausgeschrieben lauten  $a$  und  $b$  nun

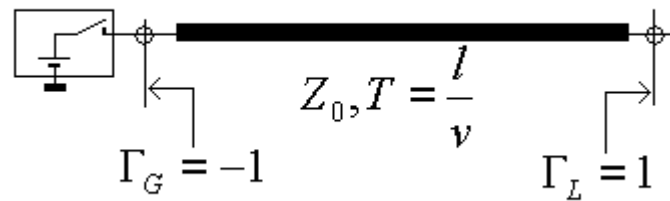
$$a(p, z) = b_0(p) \cdot [1 + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT}) + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT})^2 + \dots + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT})^k + \dots] \cdot e^{-p \cdot \frac{z}{v}}$$

$$b(p, z) = b_0(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot [1 + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT}) + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT})^2 + \dots + (\Gamma_G(p) \cdot \Gamma_L(p) \cdot e^{-2pT})^k + \dots] \cdot e^{-p(2T - \frac{z}{v})}$$

Diese Ausdrücke müssen nun gliedweise unter Zuhilfenahme des Entwicklungssatzes für bekannte Quellfunktionen  $b_0(p)$  und Leitungsbeschaltungen  $G_G(p)$  und  $G_L(p)$  rücktransformiert werden. Wir wollen zwei Beispiele betrachten.

### Beispiel

Anschalten einer Gleichspannung  $U$  einer Quelle mit  $W_G = 0$  an eine leerlaufende Leitung mit der Laufzeit  $T$  und dem Wellenwiderstand  $Z_0$ .



Für  $b_0$  gilt  $b_0 = \frac{U \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_0}}}{p} = \frac{u_0}{p}$ . Damit lauten die Wellensummen

$$a(p, z) = \frac{u_0}{p} \cdot [e^{-p\frac{z}{v}} - e^{-p(2T+\frac{z}{v})} + e^{-p(4T+\frac{z}{v})} + \dots + (-1)^k \cdot e^{-p(2kT+\frac{z}{v})} + \dots]$$

und

$$b(p, z) = \frac{u_0}{p} \cdot [e^{-p(2T-\frac{z}{v})} - e^{-p(4T-\frac{z}{v})} + e^{-p(6T-\frac{z}{v})} + \dots + (-1)^k \cdot e^{-p(2(k+1)T-\frac{z}{v})} + \dots]$$

Die Rücktransformation ist in diesem Falle recht einfach.  $\frac{u_0}{p} \bullet \longrightarrow \circ \mathbf{e}(t)$ , der

Einschaltfunktion und die  $e^{-pt_k}$  sind Verschiebeterme. Damit ergibt sich

$$a(t, z) = u_0 \cdot [\mathbf{e}(t - \frac{z}{v}) - \mathbf{e}(t - 2T - \frac{z}{v}) + \mathbf{e}(t - 4T - \frac{z}{v}) + \dots + (-1)^k \cdot \mathbf{e}(t - 2kT - \frac{z}{v}) + \dots]$$

und

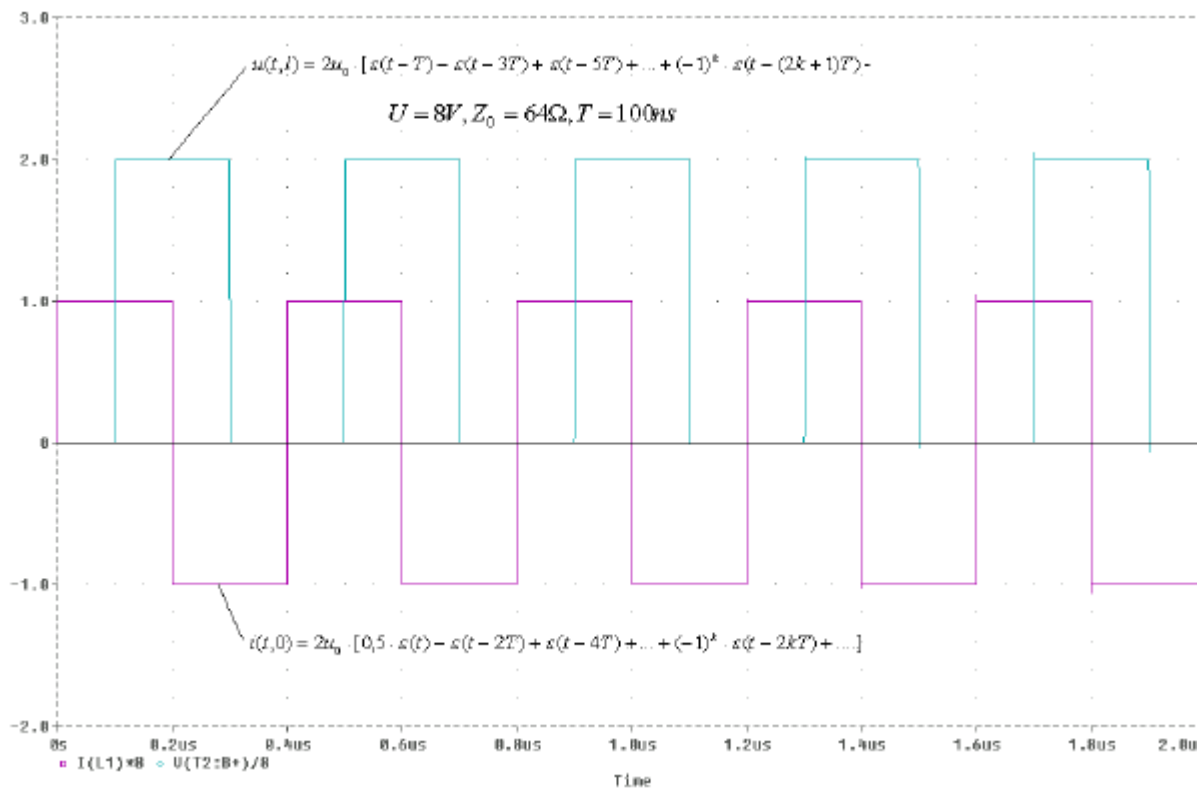
$$b(t, z) = u_0 \cdot [\mathbf{e}(t - 2T - \frac{z}{v}) - \mathbf{e}(t - 4T - \frac{z}{v}) + \mathbf{e}(t - 6T - \frac{z}{v}) + \dots + (-1)^k \cdot \mathbf{e}(t - 2(k+1)T - \frac{z}{v}) + \dots]$$

Daraus folgt nun z.B.  $u(t, l)$  und  $i(t, 0)$

$$u(t, l) = 2u_0 \cdot [\mathbf{e}(t - T) - \mathbf{e}(t - 3T) + \mathbf{e}(t - 5T) + \dots + (-1)^k \cdot \mathbf{e}(t - (2k+1)T) + \dots]$$

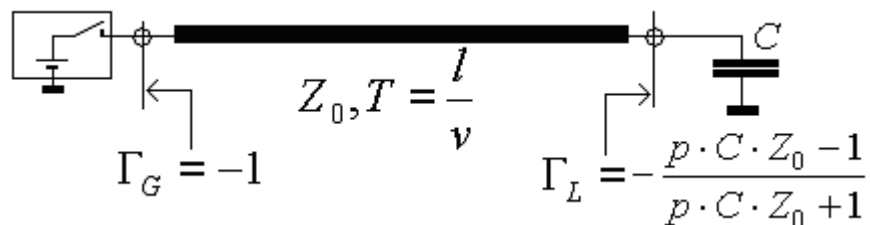
$$i(t, 0) = 2u_0 \cdot [0,5 \cdot \mathbf{e}(t) - \mathbf{e}(t - 2T) + \mathbf{e}(t - 4T) + \dots + (-1)^k \cdot \mathbf{e}(t - 2kT) + \dots]$$

Das Diagramm zeigt das übereinstimmende Ergebnis der Simulation.



## Beispiel

Im nächsten Beispiel wollen wir die Leitung mit einem Kondensator abschließen.



Mit  $p_C = \frac{1}{C \cdot Z_0}$ ,  $\rightarrow \Gamma_L = -\frac{p - p_C}{p + p_C}$  und  $\tilde{\Gamma}_L = -\frac{p - p_C}{p + p_C} \cdot e^{-p2T}$

$$u(p, z) = \frac{u_0}{p} \cdot \left[ e^{-p \frac{z}{v}} - \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right) \cdot e^{-p(2T - \frac{z}{v})} + \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right) \cdot e^{-p(2T + \frac{z}{v})} \right. \\ \left. - \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right)^2 \cdot e^{-p(4T - \frac{z}{v})} + \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right)^2 \cdot e^{-p(4T + \frac{z}{v})} + \dots \right. \\ \left. - \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right)^k \cdot e^{-p((2kT - \frac{z}{v})} + \left( \frac{p - p_C}{p + p_C} \right)^k \cdot e^{-p((2k+1)T + \frac{z}{v})} - \dots \right]$$

Die Verschiebeterme  $e^{-pt_0}$  sind zunächst unbedeutend. Sie liefern nach der Rücktransformation Zeitverschiebungen für die einzelnen Glieder. Wesentlich sind die Terme

$$F_k(p) = \frac{1}{p} \cdot \left( \frac{p - p_c}{p + p_c} \right)^k, \text{ die sich in}$$

$$F_k(p) = \frac{1}{p} \cdot \left( \frac{p - p_c}{p + p_c} \right)^{k-1} \cdot \left( \frac{p - p_c}{p + p_c} \right) = F_{k-1}(p) \cdot \left( 1 - \frac{2p_c}{p + p_c} \right) = F_{k-1}(p) - \frac{2p_c}{p + p_c} \cdot F_{k-1}(p)$$

umformen lassen. Zu der Bildfunktion  $2p_c \cdot (p + p_c)^{-1}$  gehört  $2p_c \cdot e^{-p_c t}$  im Zeitbereich. Damit lässt sich zur Berechnung von  $f_k(t)$  eine einfache Rekursion angeben. Es gilt für  $f_k(t)$

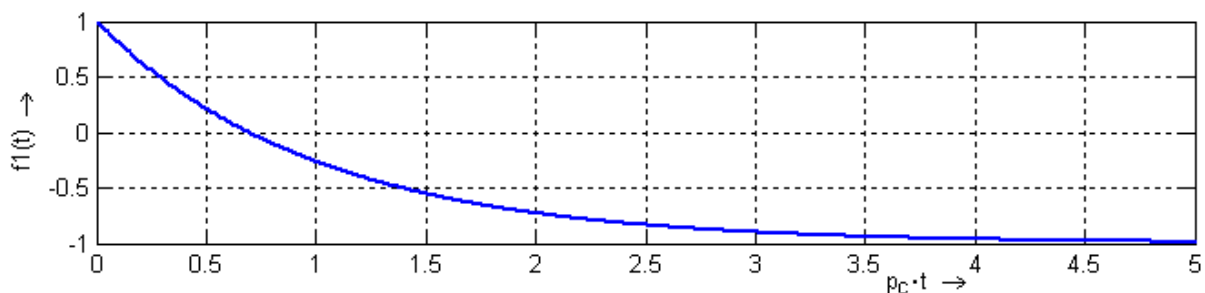
$$f_k(t) = f_{k-1}(t) - (2p_c \cdot e^{-p_c t}) * (f_{k-1}(t)).$$

Da alle Funktionen nur für positive Zeiten existieren schränken sich die Integrationsgrenzen der Faltung automatisch auf 0 und t ein.

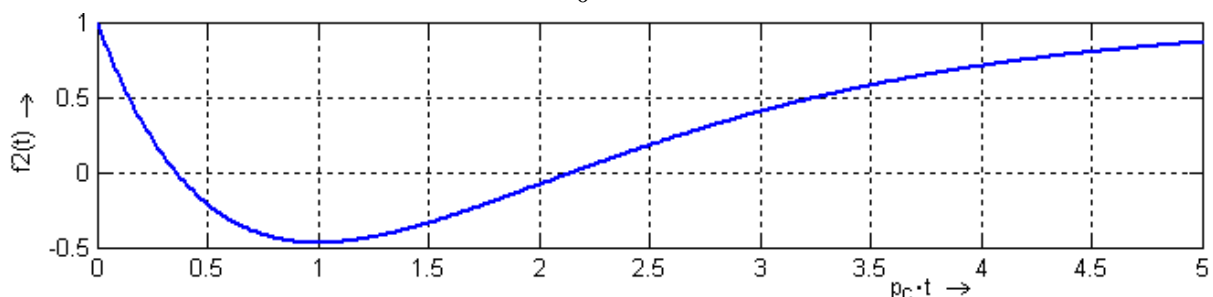
$$f_k(t) = f_{k-1}(t) - 2p_c \cdot e^{-p_c t} \int_0^t f_{k-1}(\mathbf{t}) \cdot e^{p_c \mathbf{t}} d\mathbf{t}$$

Beginnend mit  $f_0(p) = \frac{1}{p}$  und  $f_0(t) = 1$  folgen

$$f_1(t) = 1 - 2p_c \cdot e^{-p_c t} \int_0^t 1 \cdot e^{p_c \mathbf{t}} d\mathbf{t} = -1 + 2e^{-p_c t}$$

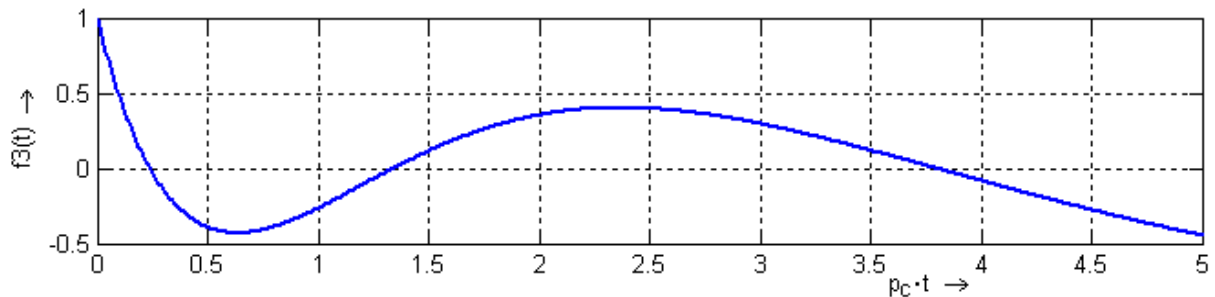


$$f_2(t) = -1 + 2e^{-p_c t} + 2p_c \cdot e^{-p_c t} \int_0^t (1 - 2e^{-p_c \mathbf{t}}) \cdot e^{p_c \mathbf{t}} d\mathbf{t} = 1 - 4p_c t \cdot e^{-p_c t}$$



$$f_3(t) = 1 - 4p_C t \cdot e^{-p_C t} - 2p_C \cdot e^{-p_C t} \int_0^t (1 - 4p_C t \cdot e^{-p_C t}) \cdot e^{p_C t} dt =$$

$$= -1 + 2(1 - 2p_C t + 2(p_C t)^2) \cdot e^{-p_C t}$$

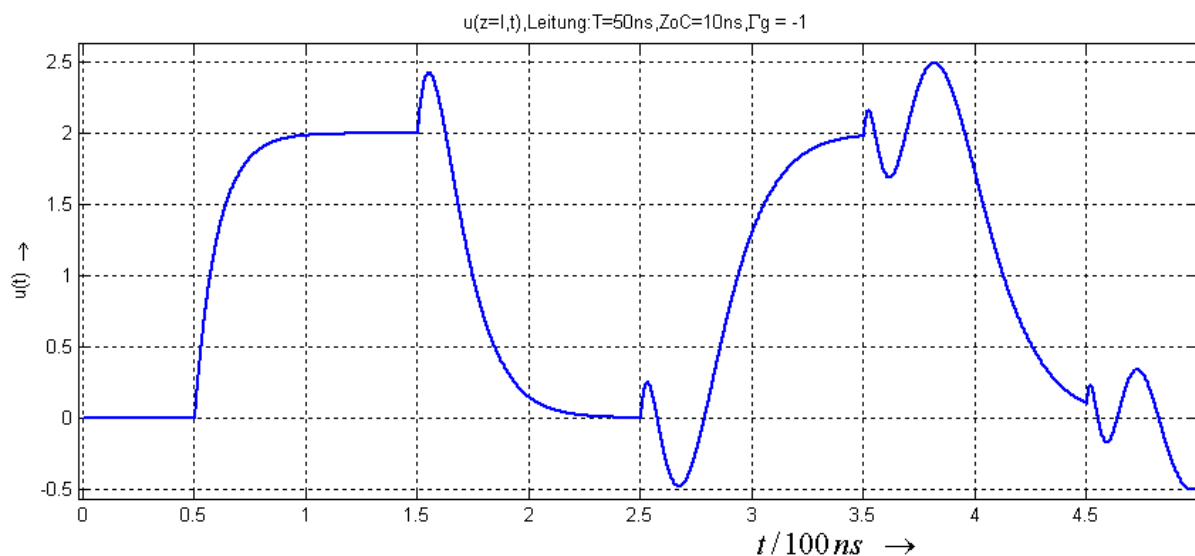


u.s.w.

Es sind jeweils so viele Schwingungsformen zu berechnen, wie für die Verfolgung der jeweiligen Spannung erforderlich ist. Die Lösung erlaubt die Berechnung des Spannungsverlaufes (und jeder anderen Größe) für jeden gewünschten Ort auf der Leitung. Als Beispiel untersuchen wir den Verlauf am Ende der Leitung. Wir setzen dazu  $z=l$  und setzen die einzelnen Lösungs-

funktionen mit der entsprechenden Zeitverschiebung  $T = \frac{l}{v}$  ein.

$$u(t, z=l) = u_0 \cdot [f_0(t-T) - f_1(t-T) + f_1(t-3T) - f_2(t-3T) + f_2(t-5T) - f_3(t-5T) + f_3(t-7T) - f_4(t-7T) + f_4(t-9T) + \dots]$$



Das geschilderte Verfahren erlaubt es im Prinzip für beliebige Orte auf dem Kabel und beliebige lineare Abschlusselemente für jeden Zeitpunkt Ströme, Spannungen und Wellengrößen zu berechnen. In den meisten Fällen interessiert man sich aber für die Spannungen am Anfang und Ende der Leitung und es ist (vor allem numerisch) einfacher die Leitung als Zweitor (Vierpol) zu betrachten und das Übertragungsverhalten mit Hilfe der Fouriertransformation (auch numerisch, FFT) zu analysieren.

## Die Leitung als Zweitor

Gehen wir von den beiden Wellen

$$a(j\omega, z) = a_1(j\omega) \cdot e^{-g \cdot z} \quad \text{und} \quad b(j\omega, z) = b_2(j\omega) \cdot e^{g \cdot (z-l)}$$

aus, so können wir daraus leicht die normierten Werte von

$$u_1(j\omega) = a_1(j\omega) + b_2(j\omega) \cdot e^{-g \cdot l}, \quad i_1(j\omega) = a_1(j\omega) - b_2(j\omega) \cdot e^{-g \cdot l}$$

und

$$u_2(j\omega) = a_1(j\omega) \cdot e^{-g \cdot l} + b_2(j\omega), \quad i_2(j\omega) = a_1(j\omega) \cdot e^{-g \cdot l} - b_2(j\omega).$$

Drücken wir jetzt  $u_1$  und  $i_1$  durch  $u_2$  und  $i_2$  aus und eliminieren  $a_1$  und  $b_2$ , so erhalten wir die wohlbekannte Kettenform der Vierpolgleichungen in normierter Schreibweise.

$$u_1(j\omega) = \cosh(g \cdot l) \cdot u_2(j\omega) + \sinh(g \cdot l) \cdot i_2(j\omega)$$

$$i_1(j\omega) = \sinh(g \cdot l) \cdot u_2(j\omega) + \cosh(g \cdot l) \cdot i_2(j\omega)$$

Entnormieren wir jetzt Ströme und Spannungen mit dem Wellenwiderstand  $Z_0$ , so ergibt sich

$$u_1(j\omega) = \cosh(g \cdot l) \cdot u_2(j\omega) + Z_0 \sinh(g \cdot l) \cdot i_2(j\omega)$$

$$i_1(j\omega) = \frac{1}{Z_0} \sinh(g \cdot l) \cdot u_2(j\omega) + \cosh(g \cdot l) \cdot i_2(j\omega)$$

Als Matrix geschrieben hat das Gleichungssystem folgende Form

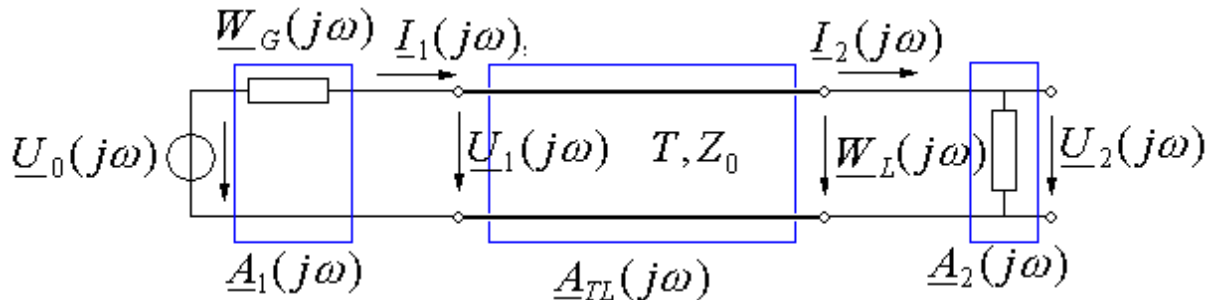
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(g \cdot l) & Z_0 \sinh(g \cdot l) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(g \cdot l) & \cosh(g \cdot l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Dabei ist  $\cosh(g \cdot l)$  der Kehrwert der Leerlaufspannungsübertragung und der Kehrwert der Kurzschlussstromübertragung. Die Ausdrücke  $Z_0 \sinh(g \cdot l)$  und  $\frac{1}{Z_0} \sinh(g \cdot l)$  sind die Kehrwerte der Transadmittanz und der Transimpedanz.

Für den Fall der verlustfreien Leitung gilt einfacher  $g = j\beta$  und für  $g \cdot l$  können wir  $j\omega T$  schreiben. Damit lauten die Kettengleichungen in diesem Falle

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{w} \cdot T) & jZ_0 \sin(\mathbf{w} \cdot T) \\ j \frac{1}{Z_0} \sin(\mathbf{w} \cdot T) & \cosh(\mathbf{w} \cdot T) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Mit Hilfe der Kettenmatrizen kann man nun auf einfache Weise die Kettenmatrix einer kompletten Übertragungsschaltung bestimmen und erhält die Spannungsübertragung aus dem Element  $A_{11}$ .



Die angegebene Betriebsschaltung ist die Kettenschaltung der drei Vierpole

$\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_{TL}$  und  $\underline{A}_2$ . Die Matrizen von  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$  lauten

$$\underline{A}_1(j\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 & \underline{W}_G(j\mathbf{w}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2(j\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \underline{W}_L^{-1}(j\mathbf{w}) & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit bestimmt sich das Element  $\underline{A}_{11}$  der Gesamtschaltung zu

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11}(j\mathbf{w}) &= \frac{\underline{U}_0(j\mathbf{w})}{\underline{U}_2(j\mathbf{w})}, \\ &= \cos(\mathbf{w}T) \cdot \left(1 + \frac{\underline{W}_G(j\mathbf{w})}{\underline{W}_L(j\mathbf{w})}\right) + j \sin(\mathbf{w}T) \cdot \left(\frac{\underline{W}_G(j\mathbf{w})}{Z_0} + \frac{Z_0}{\underline{W}_L(j\mathbf{w})}\right) \end{aligned}$$

und  $\underline{U}_2$  zu

$$\underline{U}_2(j\mathbf{w}) = \frac{\underline{U}_0(j\mathbf{w})}{\cos(\mathbf{w}T) \cdot \left(1 + \frac{\underline{W}_G(j\mathbf{w})}{\underline{W}_L(j\mathbf{w})}\right) + j \sin(\mathbf{w}T) \cdot \left(\frac{\underline{W}_G(j\mathbf{w})}{Z_0} + \frac{Z_0}{\underline{W}_L(j\mathbf{w})}\right)}$$

bestimmt.

Diese Gleichung ist nun bei bekanntem  $\underline{U}_0$  Basis für die Berechnung der Signalform am Ausgang. Das kann analytisch oder numerisch geschehen. Im zweiten Fall leistet die FFT sehr gute Dienste.

Ist die Leitung länger und müssen Dämpfung und Dispersion berücksichtigt werden gilt

$$\underline{U}_2(j\omega) =$$

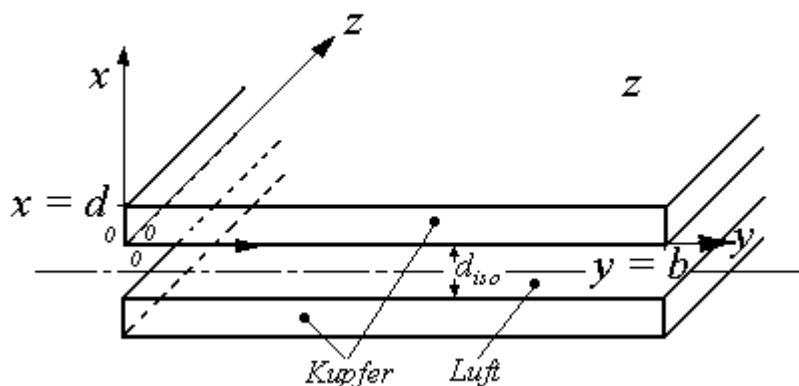
$$\frac{\underline{U}_0(j\omega)}{\cosh(\underline{g}(j\omega) \cdot l) \cdot \left(1 + \frac{\underline{W}_G(j\omega)}{\underline{W}_L(j\omega)}\right) + \sinh(\underline{g}(j\omega) \cdot l) \cdot \left(\frac{\underline{W}_G(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega)} + \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{W}_L(j\omega)}\right)}$$

Auf der Basis dieser Übertragungsfunktionen kann man das Spektrum von  $\underline{U}_2$  bestimmt werden. Das kann dann durch Rücktransformation in den Zeitbereich überführt werden. Diese Rücktransformation wird in den meisten Fällen numerisch erfolgen. Voraussetzung ist, dass für das vorliegende Kabel exakte

Berechnungen von  $R'(j\omega)$ ,  $L'(j\omega)$ ,  $C'(j\omega)$  und  $G'(j\omega)$  vorliegen. Für Koaxialkabel und einige andere spezielle Kabelformen ist das exakt möglich, für andere Kabelstrukturen gibt es brauchbare Näherungen.  $G'(j\omega)$  kann in den meisten Fällen vernachlässigt werden, für  $R'(j\omega)$  und  $L'(j\omega)$  muß unbedingt der Einfluß des Skineffektes berücksichtigt werden.

### Skineffekt und Proximityeffekt

Der Skineffekt beschreibt die Verdrängung von Wechselströmen aus dem Inneren von elektrischen Leitern an deren Oberfläche. Der Proximityeffekt beschreibt den Einfluß von Wechselstromfeldern auf die Stromverteilung in benachbarten Leitern. Beide Effekte sind verwandt und treten in Kabeln gemeinsam auf. Wir wollen die Stromverdrängung an dem Beispiel der randfeldfreien Bandleitung untersuchen, da dort die Feldverhältnisse besonders einfach zu überblicken sind.



Zwischen den beiden Leiterbahnen, im Luftraum läuft eine Wechselstromwelle in z-Richtung. Sie wird getragen von den Feldkomponenten  $iE_x(t)$  und  $jH_y(t)$ .

Der Zusammenhang mit Strom und Spannung ist

$$E_x = \frac{u(t)}{d_{iso}} \quad \text{und} \quad H_y = \frac{i(t)}{b}.$$



Bevor wir mit der eigentlichen Analyse der Stromverdrängung beginnen, bestimmen wir die Leitungskonstanten  $R'$ ,  $L'$ ,  $C'$  und  $G'$  aus den stationären Feldlösungen.

Für  $R'$  und  $C'$  gelten

$$R' = \frac{2}{\mathbf{k}_{Cu} \cdot b \cdot d} \quad \text{und} \quad C' = \epsilon \cdot \frac{b}{d_{iso}}.$$

$G'$  kann in der Regel  $G' = 0$  gesetzt werden.  $L'$  gliedert sich in  $L'_a$  und  $L'_i$ .  $L'_a$  ist dabei dem Magnetfeld im Dielektrikum und  $L'_i$  dem im Leiter zugeordnet. Beide Anteile lassen sich am einfachsten über die gespeicherte Feldenergie berechnen.

$$W_m = L \frac{I^2}{2} = \oint_{\text{Volumen}} \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} dV$$

Da im stationären Fall für  $H$  die Lösungen bekannt sind

Dielektrikum:  $H = \frac{I}{b}$ , homogen      Metall:  $H = \frac{I}{b} \left(1 - \frac{x}{d}\right)$ , ist es einfach die beiden Anteile an  $L'$  zu berechnen.

$$L' = L'_a + L'_i, \quad L'_a = \mu_0 \frac{d_{iso}}{b} \quad \text{und} \quad L'_i = 2 \cdot \frac{\mu_0}{3} \cdot \frac{d}{b}.$$

## Stromverdrängung

Ein sehr kleiner Teil der von der Welle transportierten Leistung dringt in den Leiter ein und wird dort zum Teil beim Ladungstransport in Wärme umgesetzt, zum Teil aber nur im Magnetfeld zwischengespeichert (Wirk- und Blindleistung). Für die Feldkomponenten im Kupferleiter gilt:

$$\vec{E} = \vec{k} \cdot E_z(x, t) \quad \text{und} \quad \vec{H} = \vec{j} \cdot H_y(x, t).$$

Im Leiter selbst gibt es keinen Verschiebungsstrom, deshalb reduzieren sich die Maxwell'schen Gleichungen auf

$$\text{rot}\{\vec{E}\} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \text{rot}\{\vec{H}\} = \mathbf{k}_{Cu} \cdot \vec{E}.$$

Wenn wir für den Leitungsstrom den Ansatz  $i(t) = I_a \cdot \exp(j\omega t)$  machen folgen auch alle Feldkomponenten dieser Zeitform und die Maxwellschen Gleichungen vereinfachen sich zusammen mit unseren Feldansätzen zu Gleichungen für die komplexen Amplituden  $E_z(x)$  und  $H_y(x)$

$$-\frac{\partial E_z(x)}{\partial x} = -j\omega \cdot \mu_0 \cdot H_y(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial H_y(x)}{\partial x} = \mathbf{k}_{Cu} \cdot E_z(x).$$

Da nun nur noch Ableitungen nach  $x$  auftreten können wir zusammenfassend schreiben:

$$E_z'' = j\omega \cdot \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{k}_{Cu} \cdot E_z \quad \text{und} \quad H_y'' = j\omega \cdot \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{k}_{Cu} \cdot H_y.$$

Die Gleichungen zeigen, daß es sich beim Eindringen der Felder ins Metall um einen Diffusionsvorgang handelt.

Für beide DGLn gelten die Grundlösungen  $\exp(\pm kx)$  und so können wir schreiben:

$$E_z(x) = E_1 \cdot e^{k \cdot x} + E_2 \cdot e^{-k \cdot x} \quad \text{und} \quad H_y(x) = H_1 \cdot e^{k \cdot x} + H_2 \cdot e^{-k \cdot x}$$

$$\text{mit } k^2 = j\omega \cdot \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{k}_{Cu} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\pm(1+j)}{d}$$

$$\text{und der Eindringtiefe} \quad d = \sqrt{\frac{2}{\omega \cdot \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{k}_{Cu}}}.$$

Die freien Konstanten müssen nun über die Randbedingungen bei  $x = 0$  und  $x = d$  festgelegt werden. Am einfachsten ist das für die magnetische Feldstärke  $H$ . Sie besitzt nur eine tangentielle Komponente, die bei  $x = 0$  stetig übergehen muß und bis  $x = d$  auf null abgebaut wird.

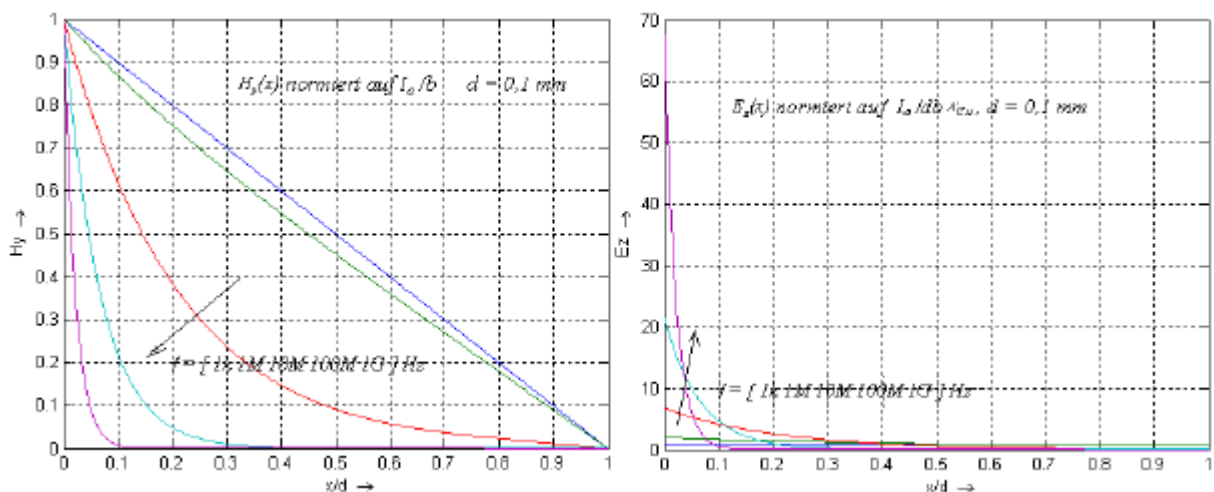
$$x=d: \quad 0 = H_1 \exp(kd) + H_2 \exp(-kd) \rightarrow H_2 = -H_1 \exp(2kd)$$

$$x=0: \quad I_a / b = H_1 + H_2 \rightarrow H_1 = \frac{I_a}{b \cdot (1 - \exp(2kd))} \quad \text{und für } H_y(x) \text{ ergibt sich}$$

$$H_y(x) = \frac{I_a}{b} \cdot \frac{e^{kx} - e^{2kd} \cdot e^{-kx}}{1 - e^{2kd}} = \frac{I_a}{b} \cdot \frac{\sinh(k \cdot (d - x))}{\sinh(k \cdot d)}$$

Die elektrische Feldstärke berechnet sich nun aus  $E_z = \frac{1}{\mathbf{k}_{Cu}} \cdot H_y'$  zu

$$E_z(x) = -k \cdot \frac{I_a}{b \cdot \mathbf{k}_{Cu}} \cdot \frac{\cosh(k \cdot (d - x))}{\sinh(k \cdot d)}.$$



Für hohe Frequenzen ( $\delta \ll d$ ) vereinfachensich die Abhängigkeiten zu einfachen exponentiellen Ausdrücken

$$H_y(x) = \frac{I_a}{b} \cdot e^{-kx} \text{ und } E_z(x) = -k \cdot \frac{I_a}{b \cdot \kappa_{Cu}} \cdot e^{-kx}$$

Mit  $H_y(0)$  und  $E_z(0)$  sind zwei zur Metalloberfläche transversale, zueinander senkrechte Feldkomponenten bekannt, die über den Pointingschen Vektor eine Komplexe Leistungsströmung in das Kupfer hinein beschreiben. Die einströmende Leistung durch ein Flächenelement  $dA = b \cdot dz$  ergibt sich zu

$$dS = (\vec{E}(x=0) \times \vec{H}(x=0)) \cdot d\vec{A} = \left[ \vec{k} \cdot \left( -k \cdot \frac{I}{b \cdot \kappa_{Cu}} \cdot \frac{\cosh(kd)}{\sinh(kd)} \right) \times \vec{j} \cdot \frac{I}{b} \right] \cdot \vec{i} \cdot (b dz)$$

Alle Einheitsvektoren stehen senkrecht aufeinander und ergeben  $(\vec{k} \times \vec{j}) \cdot \vec{i} = -1$ . Für die auf  $dz$  bezogene komplexe Leistung  $S' = P' + jQ'$  gilt

$$S' = k \cdot \frac{I^2}{b \cdot \kappa_{Cu}} \cdot \tanh(k \cdot d)$$

Diese Leistung entspricht der in  $R'$  in Wärme umgesetzten Leistung und der in  $L_i'$  gespeicherten induktiven Blindleistung

$$k \cdot \frac{I^2}{b \cdot \kappa_{Cu} \cdot \tanh(k \cdot d)} = I^2 \cdot (R' + j\omega \cdot L_i')$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$R' + j\omega \cdot L_i' = \frac{k}{b \cdot \kappa_{Cu} \cdot \tanh(k \cdot d)}$$

Dabei ist  $R'$  der Widerstandsbelag und  $L_i'$  der Anteil am Induktivitätsbelag, der durch das Magnetfeld im Metall entsteht. Eine gute Möglichkeit das Ergebnis zu überprüfen stellen die Grenzwerte dar, die  $R'$  und  $L_i'$  für sehr kleine Frequenzen annehmen. Mit der Frequenz wird auch  $k(\omega)$  sehr klein und wir können  $\tanh(x)$  durch die ersten Glieder der Taylorreihe ersetzen. Um  $L_i'$  mit zu erfassen sind die ersten drei Glieder erforderlich

$$R' + j\omega \cdot L_i' = \frac{k}{b \cdot \kappa_{Cu} \cdot (k \cdot d - \frac{1}{3}(k \cdot d)^3)} \approx \frac{1}{b \cdot \kappa_{Cu} \cdot d} \cdot (1 + \frac{1}{3}(k \cdot d)^2)$$

Der Vergleich liefert

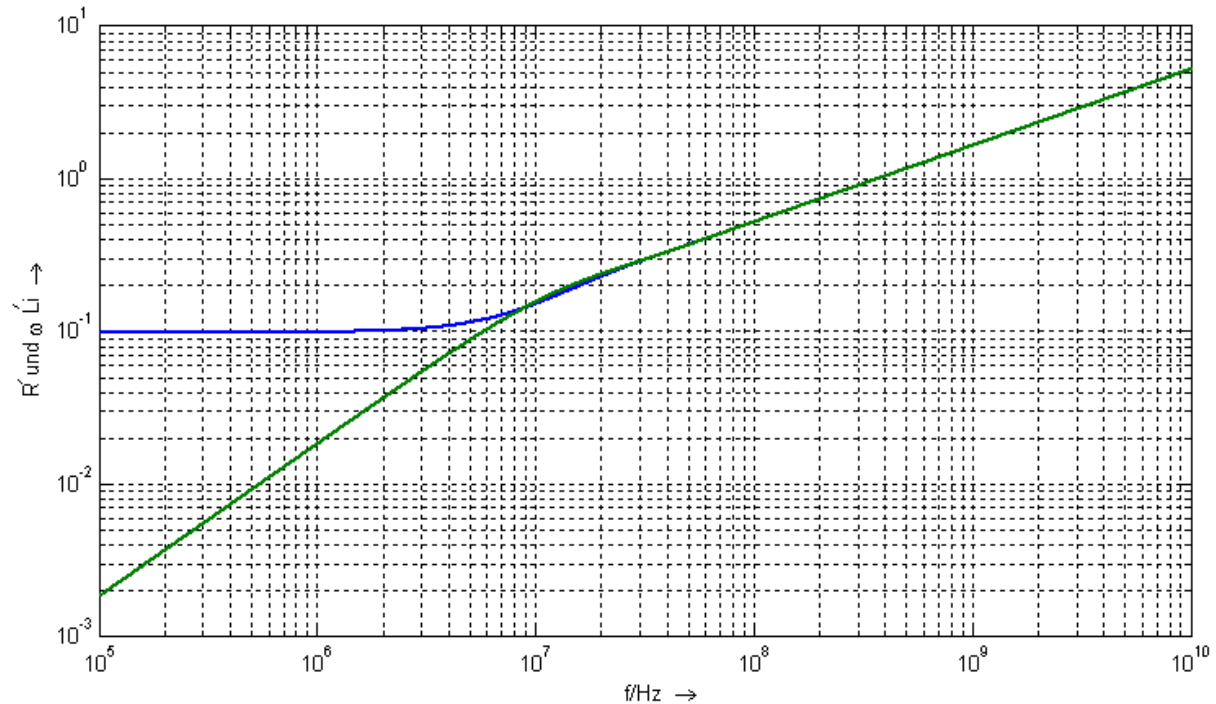
$$R' = \frac{1}{b \cdot k_{Cu} \cdot d} \quad \text{und} \quad L_i' = \frac{\mu_0}{3} \cdot \frac{d}{b}, \text{ Werte, die auch die Analyse}$$

der Stationären Felder ergibt. Berücksichtigen wir noch den Rückleiter erhalten

$$\text{wir abschließend} \quad R' + j\omega \cdot L_i' = \frac{2k}{b \cdot k_{Cu} \cdot \tanh(k \cdot d)}.$$

### Beispiel:

Für die Leiterabmessungen  $d = 35 \mu m$  und  $b = 10 mm$  erhalten wir:



$$L_a = 125,66 \text{ nH/m}$$

