

$$du = dL \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \qquad di = dC \cdot \frac{\partial u}{\partial t}$$

Aus diesem Modell ergeben sich für  $u(z, t)$  und  $i(z, t)$  folgende sogenannte **Telegraphengleichungen**:

$$-\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = L' \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial i(z, t)}{\partial z} = C' \cdot \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} .$$

für eine verlustlose homogene Leitung.

### Lösung der Telegraphengleichungen:

Mit den Fouriertransformierten  $U(z, j\omega) = F\{u(z, t)\}$  und  $I(z, j\omega) = F\{i(z, t)\}$  vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$-\frac{dU(z, j\omega)}{dz} = j\omega L' \cdot I(z, j\omega) \quad \text{und} \quad -\frac{dI(z, j\omega)}{dz} = j\omega C' \cdot U(z, j\omega) .$$

Daraus lassen sich nun leicht identische DGL für  $I$  und  $U$  gewinnen :

$$U''(z, j\omega) - \omega^2 L' C' \cdot U(z, j\omega) = 0 \quad \text{und} \quad I''(z, j\omega) - \omega^2 L' C' \cdot I(z, j\omega) = 0 .$$

Grundlösungen dieser DGL sind  $e^{-jbz}$  und  $e^{+jbz}$  mit  $\mathbf{b} = \omega \sqrt{L' C'}$ .

Damit kann man nun die allgemeine Lösung für  $U(z, j\omega)$  und  $I(z, j\omega)$  angeben, die wie die Telegraphengleichungen zeigen nicht unabhängig voneinander sind.

$$U(z, j\omega) = U^{(+)}(j\omega) \cdot e^{-jbz} + U^{(-)}(j\omega) \cdot e^{+jbz}$$

und

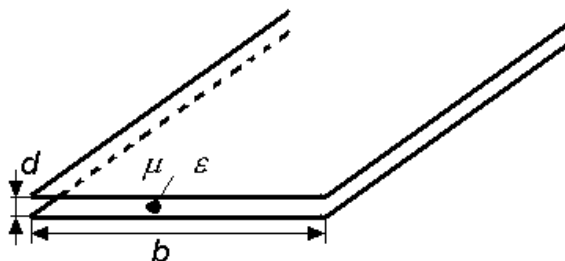
$$I(z, j\omega) = \frac{\mathbf{w} \cdot C'}{b} \left( U^{(+)}(j\omega) \cdot e^{-jbz} - U^{(-)}(j\omega) \cdot e^{+jbz} \right)$$

Der Faktor  $\mathbf{w} \cdot C' \cdot b^{-1}$  ist der Kehrwert des Wellenwiderstandes  $Z_0$  der idealen Leitung der die Amplituden der hinlaufenden und der rücklaufenden Spannungs- und Stromwelle miteinander verknüpft.

$$Z_0 = \frac{U^{(+)}(j\omega)}{I^{(+)}(z, j\omega)} = -\frac{U^{(-)}(j\omega)}{I^{(-)}(z, j\omega)} = \frac{b}{\mathbf{w} \cdot C'} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}.$$

Der Wellenwiderstand  $Z_0$  ist also ein reiner Rechenwert (wie auch der Feldwellenwiderstand  $\eta$ ).

### Beispiel Plattenleitung :



$$C' = \frac{\varepsilon \cdot b}{d} \quad L' = \frac{\mu \cdot d}{b}$$

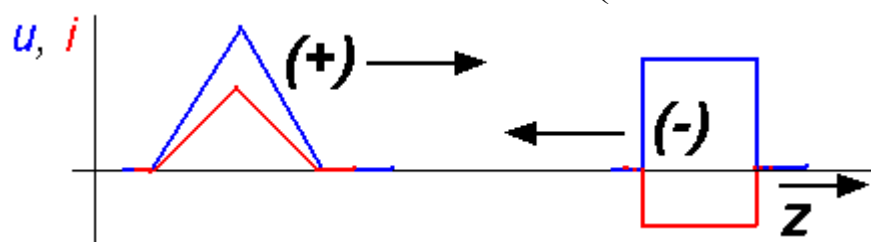
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{d}{b} \quad \beta = \omega \sqrt{\varepsilon \cdot \mu} = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Bei der Rücktransformation in den Zeitbereich bewirken die Exponentialterme

$$e^{\pm j\omega \frac{z}{v}} \text{ Zeitverschiebungen um die Laufzeit } \frac{z}{v} \text{ der zu } U^{(\pm)} \text{ und } I^{(\pm)} \text{ gehörigen}$$

Impulsformen  $u(t)$  und  $i(t)$ .

$$u(z, t) = u^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right) + u^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right) \quad \text{u.} \quad i(z, t) = \frac{1}{Z_0} \left( u^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right) - u^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right) \right).$$



## Energietransport auf einer Leitung

Jede der beiden Teilwellen transportiert Energie in die jeweilige Richtung mit einer Leistung

$$p^{(+)}(z, t) = u^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right) \cdot i^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{\left(u^{(+)}\right)^2}{Z_0} = \left(i^{(+)}\right)^2 \cdot Z_0$$

und

$$p^{(-)}(z, t) = -u^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right) \cdot i^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right) = \frac{\left(u^{(-)}\right)^2}{Z_0} = \left(i^{(-)}\right)^2 \cdot Z_0$$

Die durch ein gedachte Fläche bei  $z$  hindurchtretende Nettoleistung ist somit

$$p(z, t) = p^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right) - p^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right) = \frac{\left(u^{(+)}\right)^2}{Z_0} - \frac{\left(u^{(-)}\right)^2}{Z_0} = \left(i^{(+)}\right)^2 \cdot Z_0 - \left(i^{(-)}\right)^2 \cdot Z_0$$

Es zeigt sich, daß in den Leistungsflüssen die gleiche Information wie in den Strömen und Spannungen enthalten ist. Die Leistungen sind aber im Gegensatz zu Strömen und Spannungen auch bei den höchsten Frequenzen in ihren Teilflüssen getrennt meßbar. Das ist Grund genug die Signalbeschreibung bei hohen Frequenzen auf (normierte) Leistungswellen zu stellen.

## Normierte Leistungswellen

Definition:

Normierte Welle in positiver  $z$ -Richtung

$$\tilde{a}(z, t) = \sqrt{p^{(+)}\left(t - \frac{z}{v}\right)} = \frac{u^{(+)}(z, t)}{\sqrt{Z_0}} = i^{(+)}(z, t) \cdot \sqrt{Z_0}$$

Normierte Welle in negativer  $z$ -Richtung

$$\tilde{b}(z, t) = \sqrt{p^{(-)}\left(t + \frac{z}{v}\right)} = \frac{u^{(-)}(z, t)}{\sqrt{Z_0}} = -i^{(-)}(z, t) \cdot \sqrt{Z_0}$$

Die Leistungen sind identisch mit den Amplitudenquadraten der normierten Wellen.

$$p(z, t) = \left(\tilde{a}(z, t)\right)^2 - \left(\tilde{b}(z, t)\right)^2$$

Mit den normierten Wellen lassen sich auch Strom und Spannung auf der Leitung angeben.

$$u(z,t)/\sqrt{Z_0} = \tilde{a}(z,t) + \tilde{b}(z,t) \quad \text{und} \quad i(z,t) \cdot \sqrt{Z_0} = \tilde{a}(z,t) - \tilde{b}(z,t).$$

Das legt es nahe auch Strom und Spannung in entsprechender Weise zu Normieren.

Definition:

Normierte Leitungsspannung :  $\tilde{u}(z,t) = u(z,t) / \sqrt{Z_0}$

Normierter Leitungsstrom :  $\tilde{i}(z,t) = i(z,t) \cdot \sqrt{Z_0}$

Für Strom und Spannung auf der Leitung ergibt sich nun sehr einfach

$$\tilde{u}(z,t) = \tilde{a}(z,t) + \tilde{b}(z,t) \quad \text{und} \quad \tilde{i}(z,t) = \tilde{a}(z,t) - \tilde{b}(z,t).$$

Von besonderem Nutzen sind weiter die Fouriertransformierten der normierten Größen.

$$\tilde{u}(z,t) = \tilde{a}(z,t) + \tilde{b}(z,t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{U}(z, j\omega) = \tilde{A}(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} + \tilde{B}(j\omega) \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}}$$

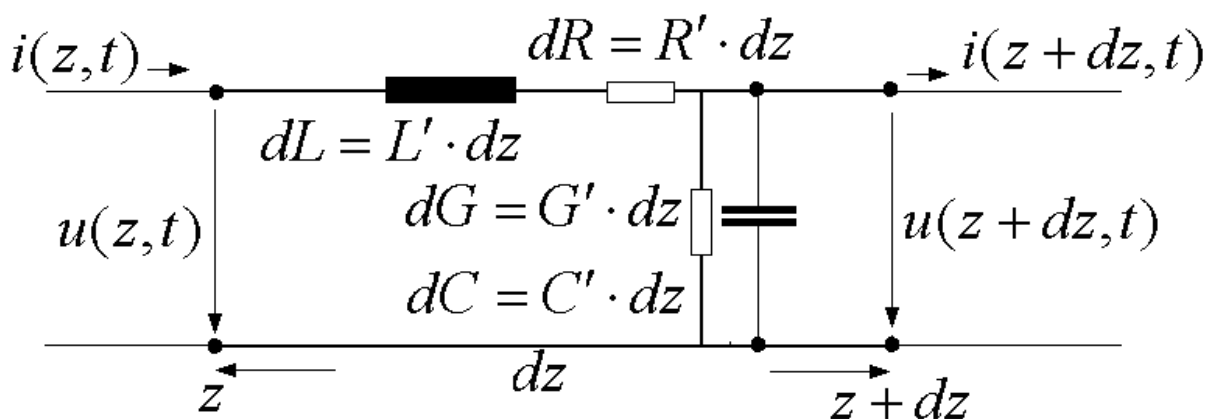
$$\tilde{i}(z,t) = \tilde{a}(z,t) - \tilde{b}(z,t) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{I}(z, j\omega) = \tilde{A}(j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} - \tilde{B}(j\omega) \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}}$$

Mit Hilfe dieser Zeiger läßt sich zum Beispiel die (scheinbare) Impedanz einer Leitung an der Stelle  $z$  angeben.

$$\underline{z}(j\omega) = \frac{Z(j\omega)}{Z_0} = \frac{\tilde{U}(z, j\omega)}{\tilde{I}(z, j\omega)}$$

### Ergänzung: Leitung mit Verlusten

Fügt man in das ESB eines Leitungselementes den Längswiderstand  $dR = R' \cdot dz$  und den Querleitwert  $dG = G' \cdot dz$  ein, erhält man das Modell einer Leitung mit Verlusten.



Die Wellengleichungen und Lösungen unterscheiden sich nicht grundsätzlich.

$$-\frac{dU(z, j\omega)}{dz} = (R' + j\omega L') \cdot I(z, j\omega)$$

und

$$-\frac{dI(z, j\omega)}{dz} = (G' + j\omega C') \cdot U(z, j\omega) \quad .$$

Die Ausbreitungskonstante wird jetzt komplex (Dämpfungsanteil)

$$\underline{g}^2 = (\underline{a} + j\underline{b})^2 = (R' + j\omega L') \cdot (G' + j\omega C')$$

Für den technisch sehr wichtigen Fall schwacher Dämpfung ( $R' \ll j\omega L'$ ) und ( $G' \ll j\omega C'$ ) ergibt sich:

$$\underline{b} = \omega \cdot \sqrt{L'C'} \quad \text{und} \quad \underline{a} = \frac{1}{2} (G' \cdot Z_0 + R' \cdot Z_0^{-1}).$$

Zu der Ausbreitungskoeffizienten  $j\underline{b}$  der idealen Leitung kommt ein Dämpfungskoeffizient  $\underline{a}$ , der sich bei längeren Leitungen bemerkbar macht.

Die Lösung im Bildbereich lautet nun

$$U(z, j\omega) = U^{(+)}(j\omega) \cdot e^{-j\underline{b} \cdot z} \cdot e^{-\underline{a} \cdot z} + U^{(-)}(j\omega) \cdot e^{+j\underline{b} \cdot z} \cdot e^{+\underline{a} \cdot z}$$

und

$$\underline{I}(z, j\omega) = \frac{1}{\underline{Z}} \left( U^{(+)}(j\omega) \cdot e^{-j\underline{b} \cdot z} \cdot e^{-\underline{a} \cdot z} - U^{(-)}(j\omega) \cdot e^{+j\underline{b} \cdot z} \cdot e^{+\underline{a} \cdot z} \right).$$

Der in der zweiten Gleichung auftretende **Wellenwiderstandsoperator** hat nun die Form

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad . \quad \text{Für hohe Frequenzen gilt dabei} \quad \underline{Z} \approx Z_0 \quad .$$

Spielt die Dämpfung eine Rolle, muß man also für die Wellenausbreitung  $j\underline{b}$  durch  $\underline{g} = \underline{a} + j\underline{b}$  ersetzen.

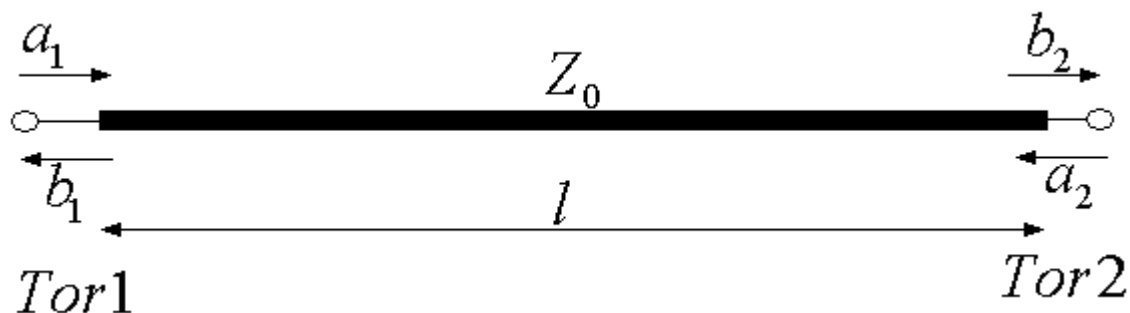
## Leitungen endlicher Länge mit Quelle und Last

Betrachten wir eine Leitung der Länge  $l$  und den Toren (Klemmenpaare) 1 und 2 und beschreiben die Leitungsgrößen im Bildbereich. Die in ein Tor einlaufende Welle sei  $a_k$ , die auslaufende  $b_k$ . Aus Gründen der Tradition wollen wir weiterhin auch alle normierten Bildgrößen durch kleine Buchstaben kennzeichnen. So gilt auf der Leitung

$$u(z, j\omega) = a(0, j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} + b(0, j\omega) \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}}$$

und

$$i(z, j\omega) = a(0, j\omega) \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} - b(0, j\omega) \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}} .$$



Mit  $a_1 = a(0, j\omega)$  und  $b_1 = b(0, j\omega)$  auch einfacher

$$u(z, j\omega) = a_1 \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} + b_1 \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}} \quad \text{und} \quad i(z, j\omega) = a_1 \cdot e^{-j\omega \frac{z}{v}} - b_1 \cdot e^{+j\omega \frac{z}{v}} .$$

Für  $z = 0$  können wir schreiben :

$$u_1 = u(0, j\omega) = a_1 + b_1 \quad \text{und} \quad i_1 = i(0, j\omega) = a_1 - b_1 ,$$

und für  $z = l$  gilt :

$$u_2 = u(l, j\omega) \quad \text{und} \quad i_2 = -i(l, j\omega) \quad \text{und} \quad \text{die Laufzeit} \quad T = \frac{l}{v}$$

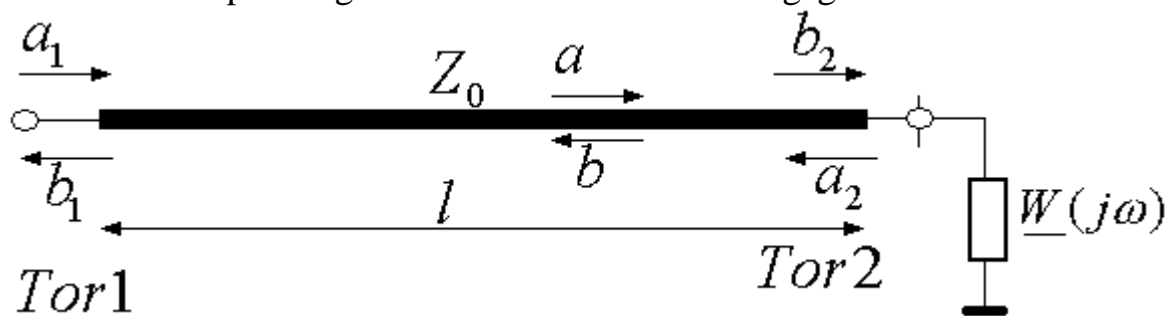
$$u_2 = a_1 \cdot e^{-j\omega T} + b_1 \cdot e^{+j\omega T} \quad \text{und} \quad i_2 = -a_1 \cdot e^{-j\omega T} + b_1 \cdot e^{+j\omega T} .$$

Schreiben wir abkürzend  $b_2 = a_1 \cdot e^{-j\omega T}$  und  $a_2 = b_1 \cdot e^{+j\omega T}$  dann gilt

$$u_2 = a_2 + b_2 \quad \text{und} \quad i_2 = a_2 - b_2 .$$

## Der komplexe Reflexionsfaktor

Wird Tor 2 mit der Lastimpedanz  $\underline{W}(j\omega)$  abgeschlossen wird dadurch das Verhältnis von Spannung und Strom am Ort  $z = l$  vorgegeben.



$$\underline{W}(j\omega) = \frac{U(l, j\omega)}{I(l, j\omega)} = Z_0 \cdot \frac{a(l, j\omega) + b(l, j\omega)}{a(l, j\omega) - b(l, j\omega)}$$

Das verknüpft auch die Amplituden von rücklaufender und hinlaufender Welle an dieser Stelle

$$b(l, j\omega) = a(l, j\omega) \cdot \frac{\underline{W} - Z_0}{\underline{W} + Z_0}.$$

Nur wenn  $\underline{W} = Z_0$  gilt gibt es keine rücklaufende Welle. In allen anderen Fällen wird ein Teil der hinlaufenden Welle reflektiert, damit die Abschlussbedingungen erfüllt werden können. Dieser Anteil wird durch den komplexen Reflexionsfaktor  $\Gamma$  bestimmt ( $\Gamma$  legt Betrag und Phase der rücklaufenden Welle relativ zu hinlaufenden fest).

$$\Gamma = \frac{b(l, j\omega)}{a(l, j\omega)} = \frac{\underline{W} - Z_0}{\underline{W} + Z_0}.$$

Wir wollen noch die normierte Abschlussimpedanz  $w$  und die Admittanz  $y = 1/w$  einführen, weil dadurch deutlich wird, daß es beim Reflexionsfaktor nur auf das Verhältnis der Impedanz zu  $Z_0$  ankommt.

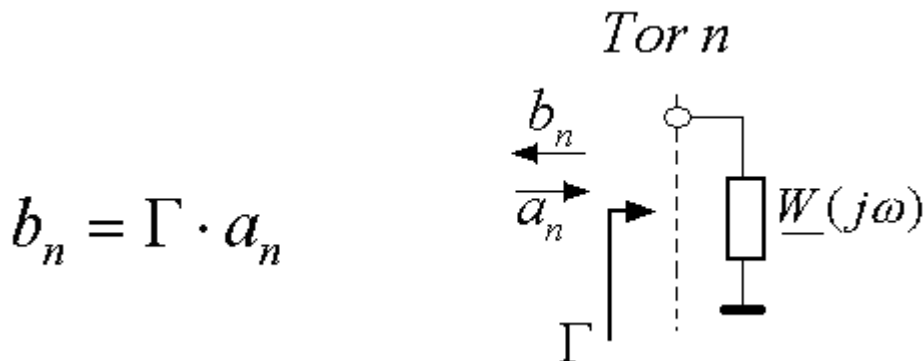
$$\Gamma = \frac{\underline{W} - Z_0}{\underline{W} + Z_0} = \frac{w - 1}{w + 1} = \frac{1 - y}{1 + y}$$

**Wichtig!** Nur wenn die Leitung mit **Impedanzen** abgeschlossen wird, die den **Wert des Wellenwiderstandes** haben, treten **keine Reflexionen** auf.

Reflexionsfaktor und Abschlussimpedanz sind eindeutig einander zugeordnet. Bei bekanntem Reflexionsfaktor kann man auf die Impedanz  $w$  ( $W$ ) schließen.

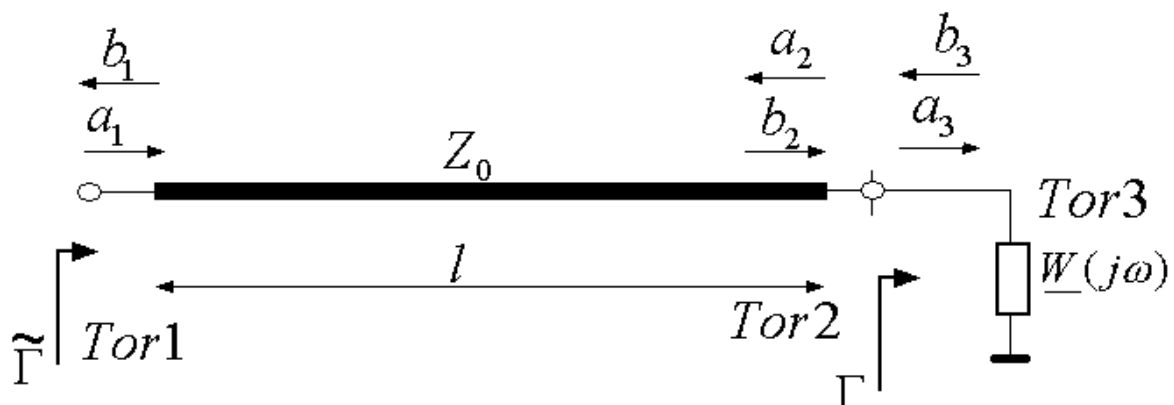
$$w = \frac{1}{y} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}, \quad W = Z_0 \cdot \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

Eine Lastimpedanz ist ein Eintor, das durch den Reflexionsfaktor beschrieben werden kann.



## Impedanztransformation auf einer Leitung

Schließt man eine Leitung (Zweiter, 1 u. 2) mit einem Eintor 3 ab entsteht eine Reflexion (rücklaufende Welle). Der Reflexionsfaktor ist  $\Gamma$ . Die rücklaufende Welle  $b_3$  wird als  $a_2$  in das Tor 2 eingespeist und erreicht Tor 1 als austretende Welle  $b_1$ . Am Eingang der Leitung ergibt sich also ebenfalls ein von null verschiedenes Verhältnis von eingespeister zu reflektierter Welle, also ein Reflexionsfaktor  $\tilde{\Gamma}$ . Die Schnittebenen bei  $z = 0$  und  $z = 1$ , bei denen der Reflexionsfaktor gemessen wird nennt man Bezugsebenen oder Referenzebenen.



Für die einzelnen Wellen an den Bezugsebenen gilt:



$$b_2 = a_1 \cdot e^{-j\omega T}, a_3 = b_2, b_3 = \Gamma \cdot a_3, a_2 = b_3, b_1 = a_2 \cdot e^{-j\omega T}$$

verfolgt man die Kette rückwärts ergibt sich

$$b_1 = a_1 \cdot \Gamma \cdot e^{-j\omega \cdot 2T}, \quad \text{d.h.} \quad b_1 = a_1 \cdot \tilde{\Gamma} \quad \text{und} \quad \tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot e^{-j\omega \cdot 2T}$$

Am Eingangstor der Leitung erscheint ein transformierter Reflexionsfaktor, der mit einer transformierten Wellenimpedanz verbunden ist. Ist die Leitung nicht dämpfungsfrei, muß  $\beta$  durch  $\gamma$  ersetzt werden und es kommt bei der Reflexionsfaktortransformation die Dämpfung hinzu.

$$\left( \tilde{\Gamma} = \Gamma \cdot e^{-j\omega \cdot 2T} \cdot e^{-2\alpha \cdot l} \right)$$

## Eingangsimpedanz einer Leitung

Die Eingangsimpedanz einer Leitung, die mit der Impedanz  $W$  abgeschlossen ist kann aus  $\tilde{\Gamma}$  abgeleitet werden.

$$\tilde{W} = Z_0 \cdot \frac{1 + \tilde{\Gamma}}{1 - \tilde{\Gamma}} = Z_0 \cdot \frac{1 + \frac{w-1}{w+1} \cdot e^{-j2\beta \cdot l}}{1 - \frac{w-1}{w+1} \cdot e^{-j2\beta \cdot l}} = Z_0 \cdot \frac{w+1 + (w-1) \cdot e^{-j2\beta \cdot l}}{w+1 - (w-1) \cdot e^{-j2\beta \cdot l}}$$

$$\tilde{W} = Z_0 \cdot \frac{(w+1) \cdot e^{j\beta \cdot l} + (w-1) \cdot e^{-j\beta \cdot l}}{(w+1) \cdot e^{j\beta \cdot l} - (w-1) \cdot e^{-j\beta \cdot l}} = Z_0 \cdot \frac{w + j \cdot \tan(\beta \cdot l)}{1 + j \cdot w \cdot \tan(\beta \cdot l)}$$

Ist die Dämpfung zu berücksichtigen, ist  $j \tan(\beta l)$  durch  $\tanh(\gamma l)$  zu ersetzen.

$$\tilde{W} = Z_0 \cdot \frac{w + \tanh(\mathbf{g} \cdot l)}{1 + w \cdot \tanh(\mathbf{g} \cdot l)}$$