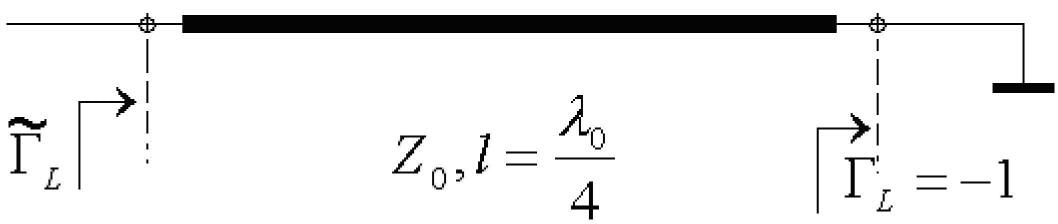
Die kurzgeschlossene Leitung als Resonator

Eine an Ende kurzgeschlossene Leitung der Länge λ/4 verhält sich wie ein Parallelschwingkreis. Durch Vergleich der Impedanzen können Resonanzwiderstand , Güte und Bandbreite des Resonators bestimmt werden.



Am Leitungseingang erscheint der transformierte Reflexionsfaktor

$$\tilde{\Gamma}_L = \Gamma_L \cdot e^{-2\cdot g \cdot \frac{l_0}{4}} = -1 \cdot e^{-2\cdot a \cdot \frac{l_0}{4}} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot \frac{2p}{l}\cdot\cdot \frac{l_0}{4}} \quad .$$

Mit den Festlegungen

$\frac{l_0}{l} = \frac{f}{f_0}, \quad \frac{f}{f_0} = 1 + \frac{\Delta f}{f_0}, a = a \cdot \frac{l_0}{4}$ und $\frac{p}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f_0} = x$ können wir schreiben

$\tilde{\Gamma}_L = -1 \cdot e^{-2\cdot a \cdot \frac{l_0}{4}} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot (\frac{p}{2} + x)} = e^{-2\cdot a} \cdot e^{-j\cdot 2\cdot x}$. Daraus folgt nun die Eingangsimpedanz der Leitung

$$\tilde{w} = \frac{1 + e^{-2(a+jx)}}{1 - e^{-2(a+jx)}} = \frac{e^{(a+jx)} + e^{-(a+jx)}}{e^{(a+jx)} - e^{-(a+jx)}}$$

. Für den aus der Dämpfung abgeleiteten Wert a gilt a << 1 und auch x ist klein gegen 1. Das erlaubt folgende Näherung .

$$\tilde{w} = \frac{(1+a)\cdot e^{jx} + (1-a)\cdot e^{-jx}}{(1+a)\cdot e^{jx} - (1-a)\cdot e^{-jx}} = \frac{\cos(x) + ja\sin(x)}{j\sin(x) + a\cos(x)}$$

$$\tilde{w} = \frac{1 + ja\tan(x)}{j\tan(x) + a} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j\frac{\tan(x)}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j\frac{x}{a}} \quad .$$

Jetzt können wir entnormieren und mit der Impedanz eines Parallelkreises vergleichen.

$$\underline{\tilde{W}} = \frac{Z_0 \frac{1}{a}}{1 + j\frac{x}{a}} = \frac{Z_0 \frac{1}{a}}{1 + j\frac{p}{2a} \cdot \frac{\Delta f}{f}}$$

muß gleich sein

$$\underline{W}_{Kr} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot v} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot \frac{2\Delta f}{f_0}} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot \frac{4x}{p}} \; .$$

Daraus folgt

$$R_p = Z_0 \frac{1}{a} = \frac{4Z_0}{a \cdot l_0} \, ,$$

$$Q = \frac{p}{4a} = \frac{p}{a \cdot l_0} \, ,$$

und

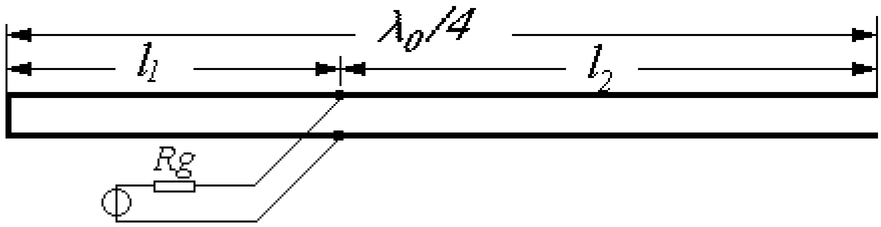
$$B = a \cdot \frac{v}{p}$$

Für die Induktivität und Kapazität die ersetzt werden gilt

$$C = \frac{Q}{w_0 \cdot R_p} = \frac{p}{4Z_0 w_0} \, , L = \frac{1}{w_0^2 \cdot C} = \frac{4Z_0}{p w_0} \; .$$

Der angezapfte λ/4 –Resonator

Wenn ein λ/4-Resonator mit einem Generator mit dem Innenwiderstand Rg erregt werden soll und eine bestimmte Bandbreite erreicht werden soll, ist das durch Anzapfung möglich. Auf diesem Weg können auch Generator und Last selektiv angepaßt werden.



Der Resonator hat unabhängig davon, wo er angezapft ist die Resonanzfrequenz $f_0 = 4c/l_0$ und die gleiche Eigengüte $Q_0 = p\ a^{-1}\ l_0^{-1}$.

Der Leitwertoperator an der Anzapfstelle ist durch die Eingangsadmittanzen der *kurzgeschlossenen l_1-Leitung* und der *leerlaufenden l_2-Leitung* gegeben.

$$\underline{y}_{in} = \frac{1}{Z_0}\left(\tanh(g \cdot l_2) + \frac{1}{\tanh(g \cdot l_1)}\right) \quad mit \quad g = a + j \cdot \frac{w}{c}\ .$$

Die Admittanz y_{in} ist eine Funktion der Frequenz und läßt sich um den Punkt ω_0 in eine Taylorreihe entwickeln, die nach dem linearem Glied abgebrochen wird. Um die Rechnung zu vereinfachen betrachten wir zunächst die verlustfreie Leitung und ergänzen den Realteil von y_{in} so, daß die Eigengüte erhalten bleibt.

$$\underline{y}_{in} = j\frac{1}{Z_0}\left(\tan\left(\frac{w}{c} \cdot l_2\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{w}{c} \cdot l_1\right)}\right).$$

Die Taylorreihe lautet nun mit

$$T = T_1 + T_2 = l_0/4/c \quad und \quad \cos(w_0 \cdot T_2) = \sin(w_0 \cdot T_1)$$

$$\underline{y}_{in} = j\frac{\Delta w}{Z_0}\left(\frac{T_2}{\cos^2(w_0 \cdot T_2)} + \frac{T_1}{\sin^2(w_0 \cdot T_1)}\right) = j\frac{T \cdot \Delta w}{Z_0 \sin^2(w_0 \cdot T_1)}.$$

Ergänzen wir die Verluste so, daß die Eigengüte des Resonators erhalten bleibt, so gilt

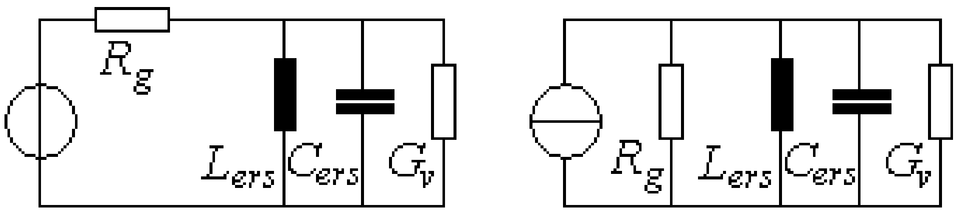
$$\underline{y}_{in} = G_v + j\frac{T\cdot\Delta w}{Z_0 \sin^2(w_0\cdot T_1)} = \frac{w_0\cdot T\cdot a\cdot l_0}{2Z_0\cdot p\cdot\sin^2(w_0\cdot T_1)}\left(1+j\frac{p}{a\cdot l_0}\frac{2\Delta w}{w_0}\right)$$

$$\underline{y}_{in} = G_v(1+jQ_0\cdot v) \quad mit \quad G_v = \frac{a\cdot l_0}{4Z_0\sin^2(w_0\cdot T_1)} \quad Q_0 = \frac{p}{a\cdot l_0}$$

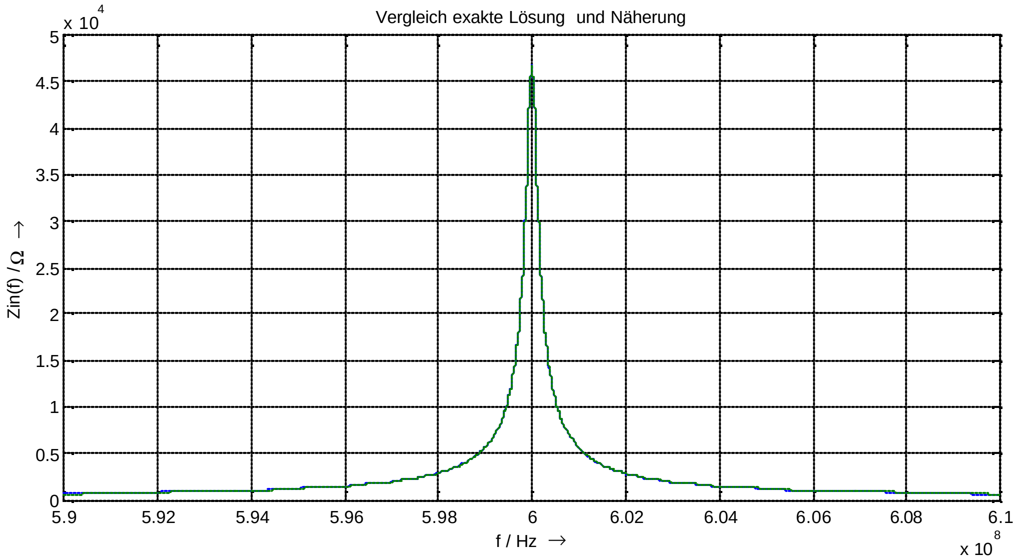
Damit kann ein Ersatzschaltbild für den Resonator als gedämpfter Parallelkreis mit

$$C_{ers} = \frac{p}{4Z_0 w_0 \sin^2(w_0 T_1)}, \quad L_{ers} = \frac{4Z_0\sin^2(w_0 T_1)}{p\cdot w_0} u. \quad G_v = \frac{a\cdot l_0}{4Z_0\sin^2(w_0 T_1)}$$ an

gegeben werden.



Beispiel: *f'$_0$ = 600 MHz, Z_0 = 100 W, l_1 = l/16, a =0,0025, v = c = 3e8 m/s*
Untersucht wird der exakte und der genäherte Verlauf von $\underline{Z}(jw)$ für den angezapften Resonator.



Soll eine bestimmte Bandbreite eingestellt werden, so muß die belastete Güte geeignete Werte annehmen. Für den Kennwiderstand (Kennleitwert) des angezapften Resonators gilt

$$Z_{0a} = \sqrt{\frac{L_{ers}}{C_{ers}}} = \frac{4Z_0\sin^2(w_0 T_1)}{p} = \frac{1}{Y_{0a}}.$$

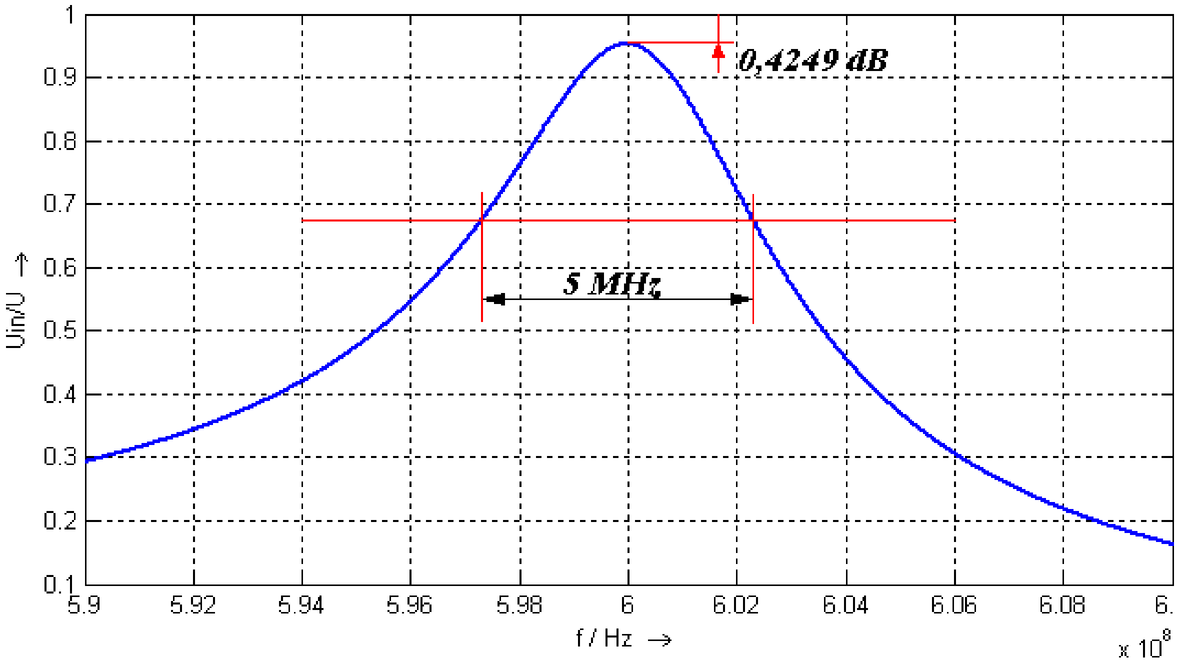
Aus der Bandbreitenforderung und dem Generatorinnenwiderstand folgt

$$\frac{1}{Q_B} = \frac{B}{f_0} = \left(G_v + \frac{1}{R_g}\right)\cdot Z_{0a}, \quad \frac{1}{Q_B} - \frac{a\cdot l_0}{p} = \frac{Z_{0a}}{R_g}, \quad Z_{0a} = \left(\frac{1}{Q_B} - \frac{a\cdot l_0}{p}\right)\cdot R_g$$

Daraus läßt sich die Anzapfstelle bestimmen.

$$l_1 = \frac{c}{w_0} \cdot \arcsin\left\{ \sqrt{\frac{R_g}{4Z_0} \cdot \left(\frac{p}{Q_B} - a \cdot l_0 \right)} \right\}$$

Beispiel: *f'*$_0$ *= 600 MHz, Z*$_0$ *= 100 W, Rg=100W,, B=5MHz, a =0,0025, v = c*

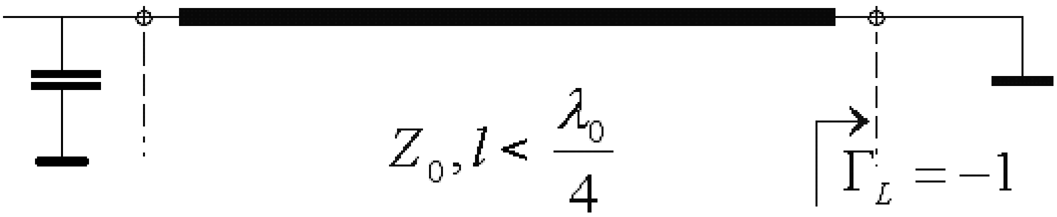


Die Resonatorverluste bewirken eine Einfügedämpfung von

$$A_e = 20dB \cdot \lg\left(1 + G_v \cdot R_g\right) = 0{,}4249dB$$

Der verkürzte l /4-Resonator

Ein reiner λ/4-Resonator ist häufig ungünstig lang und es fehlt die Möglichkeit des einfachen Abgleiches. Deshalb setzt man in der Praxis den vekürzten, kapazitiv belasteten Resonator ein



Am Eingang der verlustlos gedachten Leitung erscheint der transformierte Leitwert

$$\underline{Y}_{ein} = -j\frac{1}{Z\cdot\tan(b\cdot l)} = -j\frac{1}{Z\cdot\tan\left(2p\,\frac{l}{l}\right)} = -j\frac{1}{Z\cdot\tan(w\cdot T)}\ .$$

Dieser Leitwert ist für $\omega_0 < \pi/(2T)$ induktiv und kann durch Zuschalten eines Kondensators der Größe

$$C_p = \frac{1}{Z\cdot w_0 \tan(w_0\cdot T)}$$

kompensiert werden. Die kurzgeschlossene Leitung verhält sich dabei aber nicht wie eine echte Induktivität (das ist nur bei elektrisch sehr kurzen Leitungen der Fall) sondern wie ein Parallelkreis unterhalb seiner Resonanzfrequenz. Das führt dazu, daß die Ersatzkapazität des Systems größer als C_p ist.

Wenn wir den Eingangsleitwert $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{ein}}$ in eine Taylerreihe entwickeln, können wie den Vergleich mit einem Parallelschwingkreis ziehen.

Mit $$B_{ein} = \Im\{\underline{Y}_{ein}\} = -\frac{1}{Z\cdot\tan(w_0\cdot T)}$$

folgt $$B_{ein}(w_0+\Delta w) = -\frac{1}{Z\cdot\tan(w_0\cdot T)} + \frac{T}{Z\cdot\sin^2(w_0\cdot T)}\cdot\Delta w\ .$$

Für den Parallelkreis gilt

$$B_{kr}(w_0+\Delta w) = -\left(\frac{1}{w_0\cdot L} - w_0\cdot C\right) + \left(C + \frac{1}{w_0^2\cdot L}\right)\cdot\Delta w\ .$$

Der Vergleich liefert

$$\frac{1}{w_0\cdot L} - w_0\cdot C = \frac{1}{Z\cdot\tan(w_0\cdot T)} \quad \text{und} \quad w_0\cdot C + \frac{1}{w_0\cdot L} = \frac{w_0\cdot T}{Z\cdot\sin^2(w_0\cdot T)}.$$

Daraus bestimmen sich die Werte von C und L zu

$$C = \frac{T}{2Z\cdot\sin^2(w_0\cdot T)} - \frac{1}{2Z\cdot w_0\cdot\tan(w_0\cdot T)} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{w_0^2\cdot T}{2Z\cdot\sin^2(w_0\cdot T)} + \frac{w_0}{2Z\cdot\tan(w_0\cdot T)}.$$

Die erforderliche Zusatzkapazität, um das System bei ω_0 zur Resonanz zu bringen beträgt

$$C_p = \frac{1}{Z\cdot w_0\cdot\tan(w_0\cdot T)}.$$

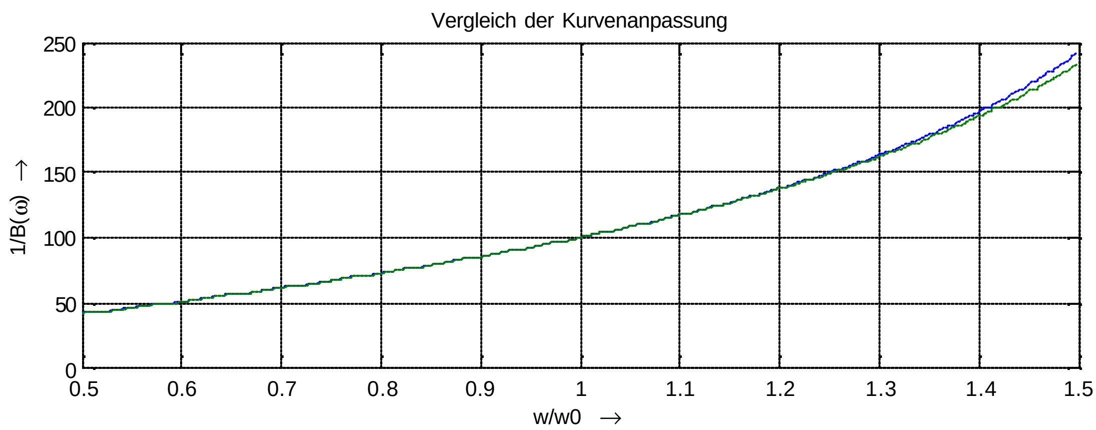
Für einen eventuell zu berücksichtigenden Verlustwiderstand gilt

$$R_p^{-1} = \Re\left\{\frac{1}{Z \cdot \tanh(a \cdot l + jb \cdot l)}\right\} \quad \text{mit } a \cdot l << 1 \quad \text{und} \quad b \cdot l = w_0 \cdot T$$

$$R_p = \frac{Z}{a \cdot l} \cdot \sin^2(w_0 \cdot T) \; .$$

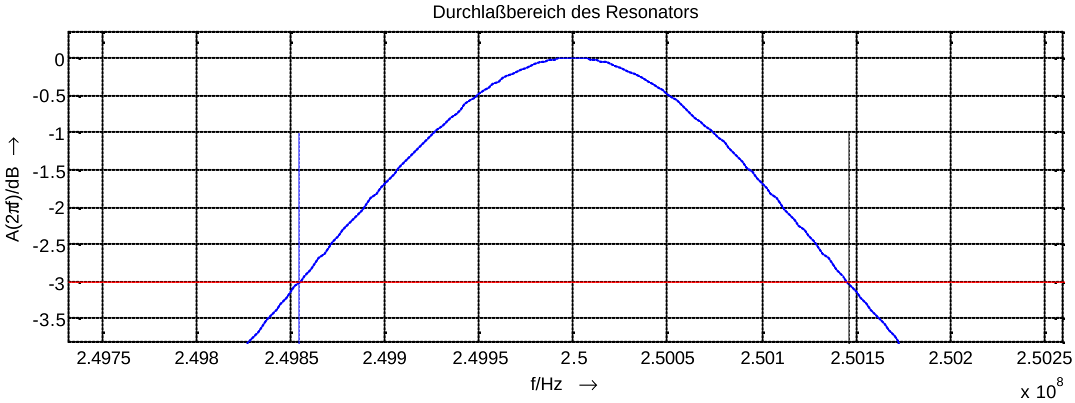
Beispiel:

```
%Beispiel Resonator l= la/8 +Cp
l=0.15;%Länge
Z=100;%W-Widerstand
Rs=1;%Widerstandsbelag
alpha=0.5*Rs/Z;%Dämpfungsbelag
al=alpha*l;
c=3e8;
T=l/c;
f0=2.5e8;
w0=2*pi*f0; % w0*T = pi/4
w=(.5:0.001:1.5)'*w0;
x=w*T;
LKW=w0^2*T/(2*Z*sin(w0*T)^2)+w0/(2*Z*tan(w0*T));
L=1/LKW
C=T/(2*Z*sin(w0*T)^2)-1/(2*Z*w0*tan(w0*T))
Rp=Z/al*sin(w0*T)^2 %V-Widerstand
Cp=1/(Z*tan(w0*T)*w0)
f00=1/sqrt(L*(C+Cp))/(2*pi) % Kontrolle f00=f0
Yk=1/Rp+j*w*C-j./w/L;
gal=al+j*w*T;%Gamma*Länge
Ylei=1./(Z*tanh(gal));
plot(w/w0,[ -1./imag(Ylei)  -1./imag(Yk) ]),grid,pause
```



Mit den ermittelten Ersatzgrößen C und Rp kann nun die Bandbreite des Resonators berechnet werden.

```
%Bandbreitenberechnung
Q=w0*(Cp+C)*Rp;% Güte des Resonators
Bw=w0/Q;
wu=w0-Bw/2;
wo=w0+Bw/2;
pegel=-10*log10(2);
plot([wu wu]/2/pi,[-5 -1],[wo wo]/2/pi,[-5 -1],'k')
plot([wu-Bw wo+Bw]/2/pi,[pegel pegel],'r')
xlabel('f/Hz   \rightarrow')
ylabel('A(2\pif)/dB  \rightarrow') % A( 2 pi f) Übertragungsfaktor
title('Durchlaßbereich des Resonators')
```



Das Ergebnis zeigt die Genauigkeit der Approximation. Für größere Bandbreiten ist eine zusätzliche Bedämpfung erforderlich.