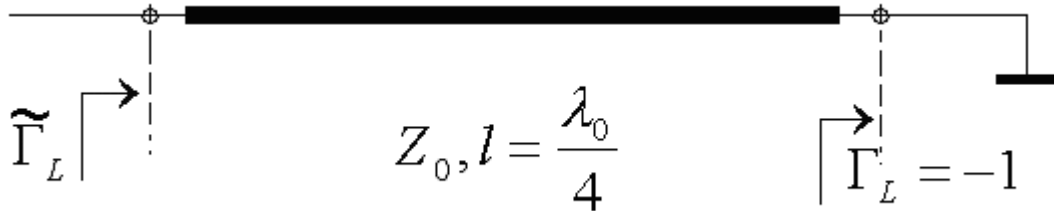


Die kurzgeschlossene Leitung als Resonator

Eine an Ende kurzgeschlossene Leitung der Länge $\lambda/4$ verhält sich wie ein Parallelschwingkreis. Durch Vergleich der Impedanzen können Resonanzwiderstand, Güte und Bandbreite des Resonators bestimmt werden.



Am Leitungseingang erscheint der transformierte Reflexionsfaktor

$$\tilde{\Gamma}_L = \Gamma_L \cdot e^{-2 \cdot g \cdot \frac{l_0}{4}} = -1 \cdot e^{-2 \cdot a \cdot \frac{l_0}{4}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \frac{2p}{l} \cdot \frac{l_0}{4}}.$$

Mit den Festlegungen

$\frac{l_0}{l} = \frac{f}{f_0}$, $\frac{f}{f_0} = 1 + \frac{\Delta f}{f_0}$, $a = \mathbf{a} \cdot \frac{l_0}{4}$ und $\frac{p}{2} \cdot \frac{\Delta f}{f_0} = x$ können wir schreiben

$\tilde{\Gamma}_L = -1 \cdot e^{-2 \cdot \mathbf{a} \cdot \frac{l_0}{4}} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot (\frac{p}{2} + x)} = e^{-2 \cdot a} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot x}$. Daraus folgt nun die Eingangsimpedanz der Leitung

$$\tilde{W} = \frac{1 + e^{-2(a+jx)}}{1 - e^{-2(a+jx)}} = \frac{e^{(a+jx)} + e^{-(a+jx)}}{e^{(a+jx)} - e^{-(a+jx)}}. \text{ Für den aus der}$$

Dämpfung abgeleiteten Wert $a \ll 1$ und auch x ist klein gegen 1. Das erlaubt folgende Näherung.

$$\tilde{W} = \frac{(1+a) \cdot e^{jx} + (1-a) \cdot e^{-jx}}{(1+a) \cdot e^{jx} - (1-a) \cdot e^{-jx}} = \frac{\cos(x) + ja \sin(x)}{j \sin(x) + a \cos(x)}$$

$$\tilde{w} = \frac{1 + ja \tan(x)}{j \tan(x) + a} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j \frac{\tan(x)}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j \frac{x}{a}} .$$

Jetzt können wir entnormieren und mit der Impedanz eines Parallelkreises vergleichen.

$$\tilde{W} = \frac{Z_0 \frac{1}{a}}{1 + j \frac{x}{a}} = \frac{Z_0 \frac{1}{a}}{1 + j \frac{\mathbf{p}}{2a} \cdot \frac{\Delta f}{f}}$$

muß gleich sein

$$\underline{W}_{Kr} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot v} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot \frac{2\Delta f}{f_0}} = \frac{R_p}{1 + j \cdot Q \cdot \frac{4x}{\mathbf{p}}} .$$

Daraus folgt

$$R_p = Z_0 \frac{1}{a} = \frac{4Z_0}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{l}_0} ,$$

$$Q = \frac{\mathbf{p}}{4a} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{l}_0} ,$$

und

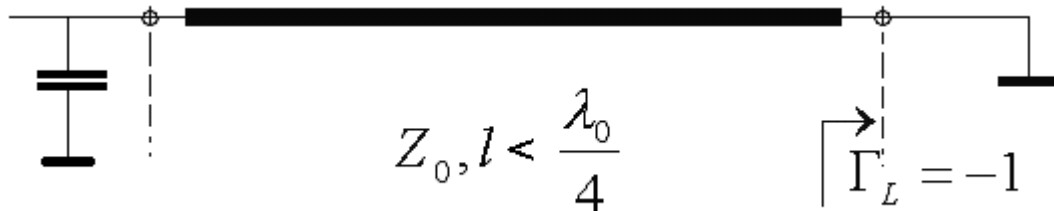
$$B = \mathbf{a} \cdot \frac{v}{\mathbf{p}}$$

Für die Induktivität und Kapazität die ersetzt werden gilt

$$C = \frac{Q}{\mathbf{w}_0 \cdot R_p} = \frac{\mathbf{p}}{4Z_0 \mathbf{w}_0} , L = \frac{1}{\mathbf{w}_0^2 \cdot C} = \frac{4Z_0}{\mathbf{p} \mathbf{w}_0} .$$

Der verkürzte 1/4-Resonator

Ein reiner $\lambda/4$ -Resonator ist häufig ungünstig lang und es fehlt die Möglichkeit des einfachen Abgleiches. Deshalb setzt man in der Praxis den verkürzten, kapazitiv belasteten Resonator ein



Am Eingang der verlustlos gedachten Leitung erscheint der transformierte Leitwert

$$\underline{Y}_{ein} = -j \frac{1}{Z \cdot \tan(\mathbf{b} \cdot l)} = -j \frac{1}{Z \cdot \tan\left(2\mathbf{p} \frac{l}{l}\right)} = -j \frac{1}{Z \cdot \tan(\mathbf{w} \cdot T)} .$$

Dieser Leitwert ist für $\omega_0 < \pi/(2T)$ induktiv und kann durch Zuschalten eines Kondensators der Größe

$$C_p = \frac{1}{Z \cdot \mathbf{w}_0 \tan(\mathbf{w}_0 \cdot T)}$$

kompensiert werden. Die kurzgeschlossene Leitung verhält sich dabei aber nicht wie eine echte Induktivität (das ist nur bei elektrisch sehr kurzen Leitungen der Fall) sondern wie ein Parallelkreis unterhalb seiner Resonanzfrequenz. Das führt dazu, daß die Ersatzkapazität des Systems größer als C_p ist.

Wenn wir den Eingangsleitwert \underline{Y}_{ein} in eine Taylerreihe entwickeln, können wir den Vergleich mit einem Parallelschwingkreis ziehen.

Mit $B_{ein} = \Im\{\underline{Y}_{ein}\} = -\frac{1}{Z \cdot \tan(\mathbf{w}_0 \cdot T)}$

folgt $B_{ein}(\mathbf{w}_0 + \Delta\mathbf{w}) = -\frac{1}{Z \cdot \tan(\mathbf{w}_0 \cdot T)} + \frac{T}{Z \cdot \sin^2(\mathbf{w}_0 \cdot T)} \cdot \Delta\mathbf{w} .$

Für den Parallelkreis gilt

$$B_{kr}(\mathbf{w}_0 + \Delta\mathbf{w}) = -\left(\frac{1}{\mathbf{w}_0 \cdot L} - \mathbf{w}_0 \cdot C\right) + \left(C + \frac{1}{\mathbf{w}_0^2 \cdot L}\right) \cdot \Delta\mathbf{w} .$$

Der Vergleich liefert

$$\frac{1}{\mathbf{w}_0 \cdot L} - \mathbf{w}_0 \cdot C = \frac{1}{Z \cdot \tan(\mathbf{w}_0 \cdot T)} \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_0 \cdot C + \frac{1}{\mathbf{w}_0 \cdot L} = \frac{\mathbf{w}_0 \cdot T}{Z \cdot \sin^2(\mathbf{w}_0 \cdot T)} .$$

Daraus bestimmen sich die Werte von C und L zu

$$C = \frac{T}{2Z \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot T)} - \frac{1}{2Z \cdot \omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot T)} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{L} = \frac{\omega_0^2 \cdot T}{2Z \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot T)} + \frac{\omega_0}{2Z \cdot \tan(\omega_0 \cdot T)}.$$

Die erforderliche Zusatzkapazität, um das System bei ω_0 zur Resonanz zu bringen beträgt

$$C_p = \frac{1}{Z \cdot \omega_0 \cdot \tan(\omega_0 \cdot T)}.$$

Für einen eventuell zu berücksichtigenden Verlustwiderstand gilt

$$R_p^{-1} = \Re \left\{ \frac{1}{Z \cdot \tanh(\mathbf{a} \cdot l + j\mathbf{b} \cdot l)} \right\} \quad \text{mit } \mathbf{a} \cdot l \ll 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{b} \cdot l = \omega_0 \cdot T$$

$$R_p = \frac{Z}{\mathbf{a} \cdot l} \cdot \sin^2(\omega_0 \cdot T).$$

Beispiel:

%Beispiel Resonator l= la/8 +Cp

l=0.15;%Länge

Z=100;%W-Widerstand

Rs=1;%Widerstandsbelag

alpha=0.5*Rs/Z;%Dämpfungsbelag

al=alpha*l;

c=3e8;

T=l/c;

f0=2.5e8;

w0=2*pi*f0; % w0*T = pi/4

w=(.5:0.001:1.5)*w0;

x=w*T;

LKW=w0^2*T/(2*Z*sin(w0*T)^2)+w0/(2*Z*tan(w0*T));

L=1/LKW

C=T/(2*Z*sin(w0*T)^2)-1/(2*Z*w0*tan(w0*T))

Rp=Z/al*sin(w0*T)^2 %V-Widerstand

Cp=1/(Z*tan(w0*T)*w0)

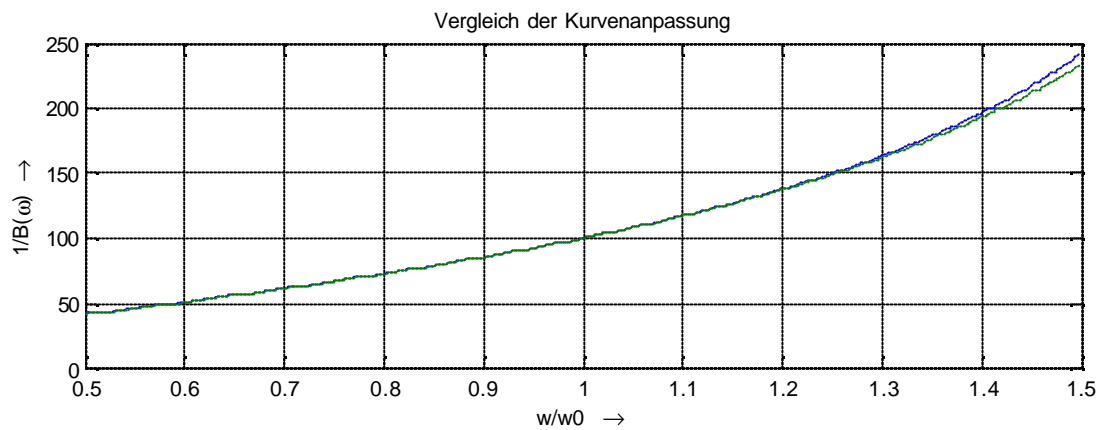
f00=1/sqrt(L*(C+Cp))/(2*pi) % Kontrolle f00=f0

Yk=1/Rp+j*w*C-j./w/L;

gal=al+j*w*T;%Gamma*Länge

Ylei=1./(Z*tanh(gal));

plot(w/w0,[-1./imag(Ylei) -1./imag(Yk)]),grid,pause



Mit den ermittelten Ersatzgrößen C und Rp kann nun die Bandbreite des Resonators berechnet werden.

%Bandbreitenberechnung

Q=w0*(Cp+C)*Rp;% Güte des Resonators

Bw=w0/Q;

wu=w0-Bw/2;

wo=w0+Bw/2;

pegel=-10*log10(2);

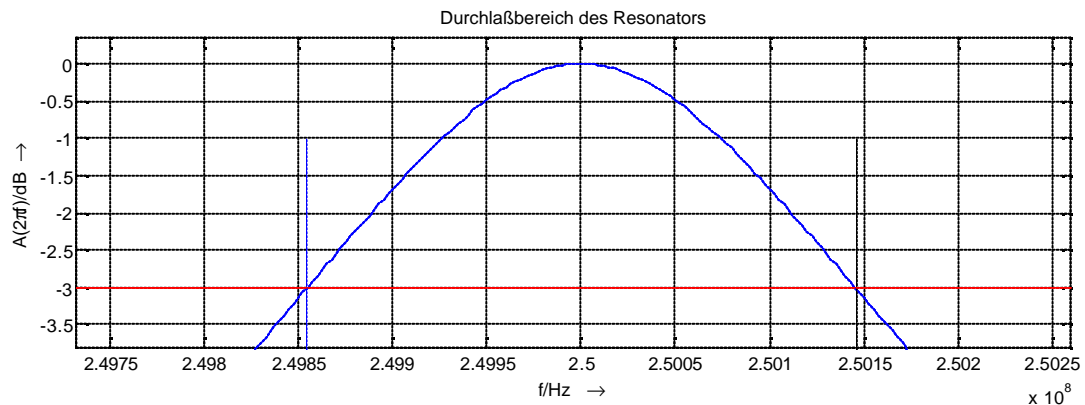
plot([wu wu]/2/pi,[-5 -1],[wo wo]/2/pi,[-5 -1],'k')

plot([wu-Bw wo+Bw]/2/pi,[pegel pegel],'r')

xlabel('f/Hz \rightarrow')

ylabel('A(2\pi f)/dB \rightarrow') % A(2 pi f) Übertragungsfaktor

title('Durchlaßbereich des Resonators')



Das Ergebnis zeigt die Genauigkeit der Approximation. Für größere Bandbreiten ist eine zusätzliche Dämpfung erforderlich.