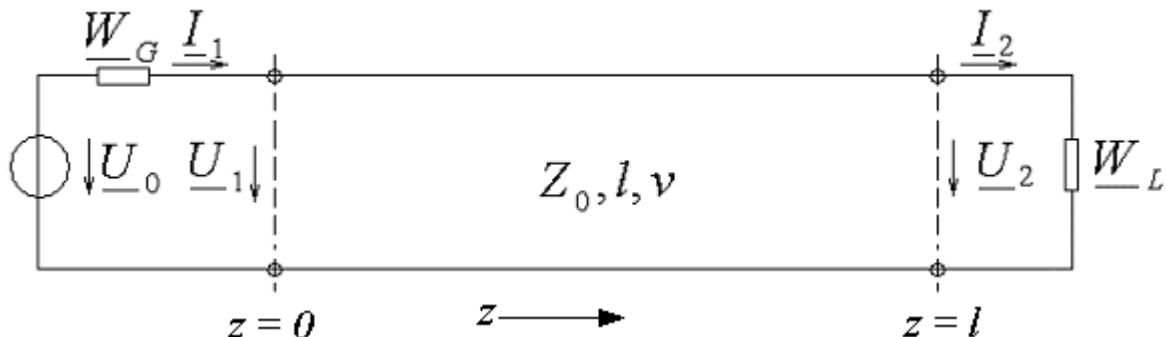


Leitungen endlicher Länge

Alle Leitungen im praktischen Gebrauch haben endliche Länge.

Am Anfang ($z = 0$) ist ein Generator angeschlossen und am Ende ein Verbraucher.



Der allgemeine Ansatz liefert an der Stelle z :

$$U(z) = U_h e^{-g \cdot z} + U_r e^{+g \cdot z} \quad \text{und} \quad I(z) \cdot Z_0 = U_h e^{-g \cdot z} - U_r e^{+g \cdot z}.$$

Speziell bei $z = 0$ gilt : $U_1 = U_h + U_r$ und $I_1 \cdot Z_0 = U_h - U_r$.

Daraus folgt : $2U_h = U_1 + I_1 \cdot Z_0$ und $2U_r = U_1 - I_1 \cdot Z_0$.

In den allgemeinen Ansatz eingesetzt erhält man

$$U(z) = 0,5 \cdot (U_1 + I_1 \cdot Z_0) \cdot e^{-g \cdot z} + 0,5 \cdot (U_1 - I_1 \cdot Z_0) \cdot e^{+g \cdot z} \quad \text{und} \\ I(z) \cdot Z_0 = 0,5 \cdot (U_1 + I_1 \cdot Z_0) \cdot e^{-g \cdot z} - 0,5 \cdot (U_1 - I_1 \cdot Z_0) \cdot e^{+g \cdot z}.$$

Unter Beachtung von $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ kann man umformen

$$U(z) = U_1 \cdot \cosh(g \cdot z) - I_1 \cdot Z_0 \cdot \sinh(g \cdot z) \quad \text{und} \\ I(z) = -U_1 \cdot Z_0^{-1} \cdot \sinh(g \cdot z) + I_1 \cdot \cosh(g \cdot z).$$

Das sind die Gleichungen eines Vierpols (Zweitor) in inverser Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_z \\ I_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(g \cdot z) & -Z_0 \cdot \sinh(g \cdot z) \\ -Z_0^{-1} \cdot \sinh(g \cdot z) & \cosh(g \cdot z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix}$$

Setzen wir $z = l$ und stellen diese Gleichungen um, so erhalten wir die Vierpolbeschreibung einer Leitung in Kettenform.

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\mathbf{g} \cdot l) & Z_0 \cdot \sinh(\mathbf{g} \cdot l) \\ Z_0^{-1} \cdot \sinh(\mathbf{g} \cdot l) & \cosh(\mathbf{g} \cdot l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

Die **A-Matrix einer gedämpften Leitung** der Länge l lautet also

$$(A_{Tl}) = \begin{pmatrix} \cosh(\mathbf{g} \cdot l) & Z_0 \cdot \sinh(\mathbf{g} \cdot l) \\ Z_0^{-1} \cdot \sinh(\mathbf{g} \cdot l) & \cosh(\mathbf{g} \cdot l) \end{pmatrix}.$$

Kann die **Dämpfung vernachlässigt** werden, vereinfacht sich das Ergebnis zu

$$(A_{Tl}) = \begin{pmatrix} \cos(\mathbf{b} \cdot l) & jZ_0 \cdot \sin(\mathbf{b} \cdot l) \\ jZ_0^{-1} \cdot \sin(\mathbf{b} \cdot l) & \cos(\mathbf{b} \cdot l) \end{pmatrix}.$$

Diese beiden Ergebnisse sind sehr wichtig, da sie es erlauben, Leitungen als VP-Elemente in die Schaltungsrechnung einzubeziehen.

Der Reflexionsfaktor Γ

Betrachten wir eine nach rechts laufende Welle auf einer endlich langen Leitung, so transportiert diese Welle die Leistung $P_h = U_h I_h = U_h^2 Z_0^{-1} = I_h^2 Z_0$.

Ist die Leitung am Ende mit dem Widerstand $W_L = Z_0$ abgeschlossen, so passen die Strom- und Spannungswerte der Welle genau zu diesem Widerstand und dieser kann die Leistung der Welle aufnehmen. Wir sprechen von der **am Ende abgeschlossenen Leitung**. Weicht W_L von Z_0 ab, so wird ein Teil der ankommenden Welle umgelenkt (**reflektiert**) und läuft als rücklaufende Welle in Richtung Generator. Wir wollen diesen Vorgang genauer untersuchen und betrachten eine ungedämpfte Leitung. Wir benutzen den allgemeinen Ansatz:

$$U(z) = U_h e^{j\mathbf{b} \cdot (l-z)} + U_r e^{-j\mathbf{b} \cdot (l-z)} \quad \text{und} \quad I(z) \cdot Z_0 = U_h e^{j\mathbf{b} \cdot (l-z)} - U_r e^{-j\mathbf{b} \cdot (l-z)}$$

Damit sind U_h und U_r genau die Spannungswerte der hin- und der rücklaufenden Welle am Leitungsende und somit gilt

$$z = l : \quad U_2 = U_h + U_r \quad \text{und} \quad I_2 \cdot Z_0 = U_2 \cdot Z_0 \cdot \underline{W}_L^{-1} = U_h - U_r.$$

daraus folgt $2U_h = U_2 \cdot (1 + Z_0 \cdot \underline{W}_L^{-1})$ und $2U_r = U_2 \cdot (1 - Z_0 \cdot \underline{W}_L^{-1})$. Damit können wir nun den **Reflexionsfaktor** am Leitungsende als Spannungsverhältnis oder negatives Stromverhältnis der hin- und der rücklaufenden Welle definieren.

$$\Gamma_L = \frac{U_r}{U_h} = -\frac{I_r}{I_h} = \frac{1 - Z_0 \cdot \underline{W}_L^{-1}}{1 + Z_0 \cdot \underline{W}_L^{-1}} = \frac{\underline{W}_L - Z_0}{\underline{W}_L + Z_0}.$$

Der Reflexionsfaktor ist eine Funktion der komplexen Abschlußimpedanz $\underline{W}_L = R_L + jX_L$. Wir wollen zunächst einige Spezialfälle untersuchen.

$\underline{W}_L = R_L$: $R_L = Z_0$ $\Gamma_L = 0$ keine Reflexion, Anpassung
 $R_L > Z_0$ $0 < \Gamma_L \leq 1$ Überanpassung
 $R_L < Z_0$ $-1 \leq \Gamma_L < 0$ Unteranpassung
 $R_L = \infty$ $\Gamma_L = 1$ Totalreflexion durch Leerlauf
 $R_L = 0$ $\Gamma_L = -1$ Totalreflexion durch Kurzschluß

$$\underline{W}_L = j X_L : -\infty \leq X_L \leq \infty \quad \Gamma_L = \frac{jX - Z_0}{jX + Z_0} = e^{j(p - 2a \tan(X \cdot Z_0^{-1}))}$$

$|\Gamma_L| = 1$ Totalreflexion bei reiner Blindlast

$\underline{W}_L = R_L + j X_L$ allgemeiner Fall $|\Gamma_L| \leq 1$

Der Reflexionsfaktor ist eine komplexe Zahl mit einem Betrag ≤ 1 . Er liegt also in der komplexen Ebene im Einheitskreis oder auf dessen Rand.

