

## Elektromagnetische Wellen

### Ausbreitung em. Wellen im freien Raum ( $\epsilon_0$ , $\mu_0$ , $c$ )

Die Ausbreitung em. Wellen wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Allerdings benötigt man dazu die differentielle Form, die den Zusammenhang von elektrischem und magnetischem Feld in jeden Raum- und Zeitpunkt beschreiben.

Integralform:

1. **MW Gl.** , Induktionsgesetz 
$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \right\}$$

2. **MW Gl.** , Durchflutungsgesetz 
$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} \right\}$$

und 
$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

Von ihrem Charakter her sind  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  Wirbelfelder und es gilt der Stokessche Satz

$$\oint_{\partial A} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot}(\vec{V}) \cdot d\vec{A}$$

Wenden wir ihn auf die **MW Gln** an und berücksichtigen die Materialbeziehungen so folgt

$$\iint_A \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iint_A \vec{H} \cdot d\vec{A} \right\} \rightarrow \text{rot}(\vec{E}) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\iint_A \text{rot}(\vec{H}) \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} \right\} \rightarrow \text{rot}(\vec{H}) = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.MWGl.  $\text{rot}(\vec{E}) = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  und 2.MWGl.  $\text{rot}(\vec{H}) = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Es handelt sich bei diesen Gleichungen um ein System partieller Dgln. 1. Ordnung. In kartesischen Koordinaten erhält man mit

$$\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_x + \vec{e}_y \cdot E_y + \vec{e}_z \cdot E_z \text{ u. } \vec{H} = \vec{e}_x \cdot H_x + \vec{e}_y \cdot H_y + \vec{e}_z \cdot H_z$$

und dem Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{V}) &= \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} \\ &= \vec{e}_x \cdot \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \cdot \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \cdot \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

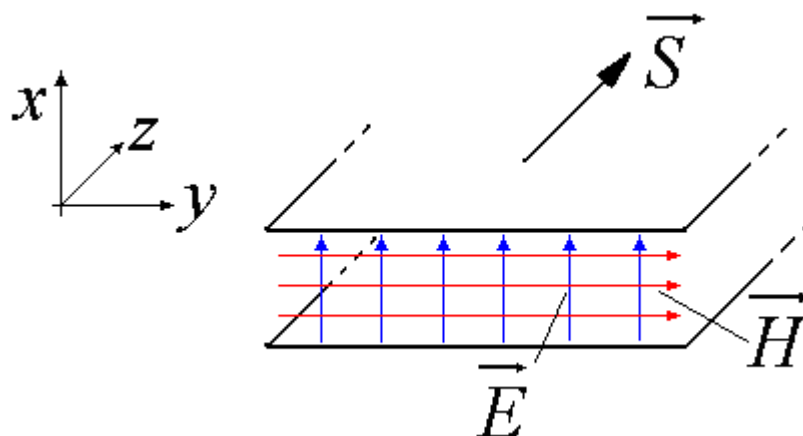
ein System von 6 skalaren Differentialgleichungen 1.Ordnung für die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, & \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, & \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, & \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned}$$

### Ebene Wellen:

Eine ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet besitzt nur in der xy-Ebene Komponenten von E und H die senkrecht auf der z-Richtung (em. Wellen sind transversale Wellen) und senkrecht zueinander sind.

$$\vec{E} = \vec{e}_x \cdot E_x \quad \text{und} \quad \vec{H} = \vec{e}_y \cdot H_y$$



Der Pointingsche Vektor  $\vec{S}$  besitzt nur eine Komponente in z-Richtung und zeigt, dass die Ausbreitung in dieser Richtung erfolgt.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{e}_x \cdot E_x) \times (\vec{e}_y \cdot H_y) = \vec{e}_z \cdot E_x \cdot H_y$$

Von den 6 Dgln. bleiben so nur zwei übrig

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mathbf{m}_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Durch Ableiten nach  $z$  und  $t$  und gegenseitigem Einsetzen gewinnt man daraus für  $H_y$  und für  $E_x$  eine partielle Dgl. 2.Ordnung, die als Wellengleichung oder Helmholtzgleichung bezeichnet wird.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \frac{1}{c^2}$$

Die beiden Grundlösungen dieser Dgl., die verallgemeinert  $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$

lautet, mit  $v = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{m}}} < c$ , sind  $A(z - v \cdot t)$  und  $A(z + v \cdot t)$ .  $A(z - v \cdot t)$

ist eine mit  $v$  nach rechts und  $A(z + v \cdot t)$  eine mit  $v$  nach links laufende Welle. Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition zweier solcher Wellen.

**allgemeine Lösung :**  $W(z, t) = A(z - v \cdot t) + B(z + v \cdot t)$

$E$  und  $H$  sind in der em. Welle verknüpft und existieren nicht unabhängig voneinander. Gilt für die elektrische Feldstärke  $E_x = E_0(z, t)$ , so gilt wegen der **MW Gln.**

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \mathbf{e}_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mp \mathbf{e}_0 \cdot v \cdot E_0'(z, t) \quad \text{und} \quad H_y = \pm \mathbf{e}_0 \cdot v \cdot E_0(z, t).$$

Das Vorzeichen resultiert aus der Laufrichtung der Welle und hat keine weitere Bedeutung. Wichtig ist, dass die Amplituden von  $E$  und  $H$  streng proportional zueinander sind. Es gilt immer

$$H = \mathbf{e} \cdot v \cdot E \quad \text{und somit} \quad \frac{E}{H} = \frac{1}{\mathbf{e} \cdot v} = \frac{\sqrt{\mathbf{e} \cdot \mathbf{m}}}{\mathbf{e}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}}$$

im freien Raum heißt dieser Wert Feldwellenwiderstand, da seine Dimension  $\Omega$  ist.

**Feldwellenwiderstand  $Z_F$  :**  $Z_F = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0}{\mathbf{e}_0}} = 120 \cdot \mathbf{p} \cdot \Omega \approx 377 \Omega$

Beispiel einer sich ausbreitenden Welle

$$E(z,t) = \text{rect}(z-vt) + \text{rect}(z+vt) \quad \text{und} \quad H(z,t) = (\text{rect}(z-vt) - \text{rect}(z+vt))/Z_0$$

