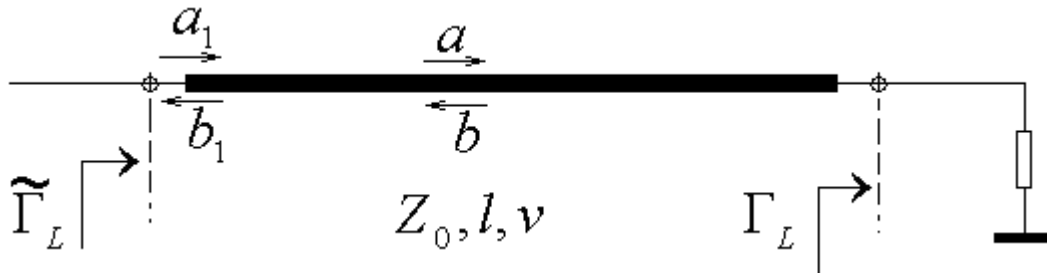


## Stehende Wellen

Ist eine Leitung nicht reflexionsfrei abgeschlossen, kommt es zu Interferenzen zwischen der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle, die besonders deutlich werden, wenn die Leitung sinusförmig angeregt wird.

**Annahme :** 
$$a(z, t) = \hat{a} \cdot \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t - \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v})$$

Der zugehörige komplexe Zeiger ist 
$$\underline{A}(z) = \hat{a} \cdot e^{-j \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v}}$$



$$\tilde{\Gamma}_L = \frac{b_1}{a_1} = \Gamma_L \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \mathbf{b} \cdot l} = |\Gamma_L| \cdot e^{j\Psi}, \Psi = -2\mathbf{b} \cdot l + \mathbf{j}_{ref}$$

Am Ende der Leitung wird durch Reflexion eine rücklaufende Welle  $b(z,t)$  erzeugt

mit 
$$\underline{B}(l) = \underline{A}(l) \cdot \Gamma_L = \hat{a} \cdot e^{-j \frac{\mathbf{w}_0 \cdot l}{v}} \cdot \Gamma_L$$

Der Zeiger der zugehörige rücklaufende Welle lautet dann

$$\underline{B}(z) = \hat{a} \cdot e^{-j \frac{\mathbf{w}_0 \cdot l}{v}} \cdot \Gamma_L \cdot e^{-j \frac{\mathbf{w}_0 \cdot (l-z)}{v}} = \hat{a} \cdot \tilde{\Gamma} \cdot e^{j \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v}}$$

und die Welle selbst 
$$b(z, t) = \hat{a} \cdot |\Gamma_L| \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t + \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v} + \Psi)$$

Damit können wir nun für die normierte Spannung  $u(z,t)=a(z,t)+b(z,t)$  schreiben, wobei es sinnvoll ist, die hinlaufende Welle aufzuteilen, so dass eine Teilwelle mit der gleichen Amplitude wie die rücklaufende Welle entsteht.

$$u(z, t) = \hat{a} \cdot (1 - |\Gamma_L|) \cdot \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t - \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v}) + \hat{a} \cdot |\Gamma_L| \cdot \left( \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t - \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v}) + \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t + \frac{\mathbf{w}_0 \cdot z}{v} + \Psi) \right)$$

Der zweite Summand besteht aus gleichstarken hinlaufenden und rücklaufenden Teilwellen, die total interferieren. An Orten, wo die Argumente sich um ungeradzahlige Vielfache von  $\pi$  unterscheiden findet Auslöschung statt

$$(2n-1) \cdot \mathbf{p} = 2 \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \Psi$$

An Orten, wo die Argumente sich um geradzahlige Vielfache von  $\pi$  unterscheiden verdoppelt sich die Amplitude.

$$2n \cdot \mathbf{p} = 2 \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \Psi$$

Es findet scheinbar keine Wellenausbreitung mehr statt, deshalb spricht man von einer **stehenden Welle**. Um das zu zeigen nutzen wir den Zusammenhang für Cosinusschwingungen

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cdot \cos(x) \cdot \cos(y)$$

Aus  $x-y = \mathbf{w}_0 \cdot t - \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v}, x+y = \mathbf{w}_0 \cdot t + \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \Psi$  folgt

$$x = \mathbf{w}_0 \cdot t + \frac{\Psi}{2} \quad \text{und} \quad y = + \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \frac{\Psi}{2}$$

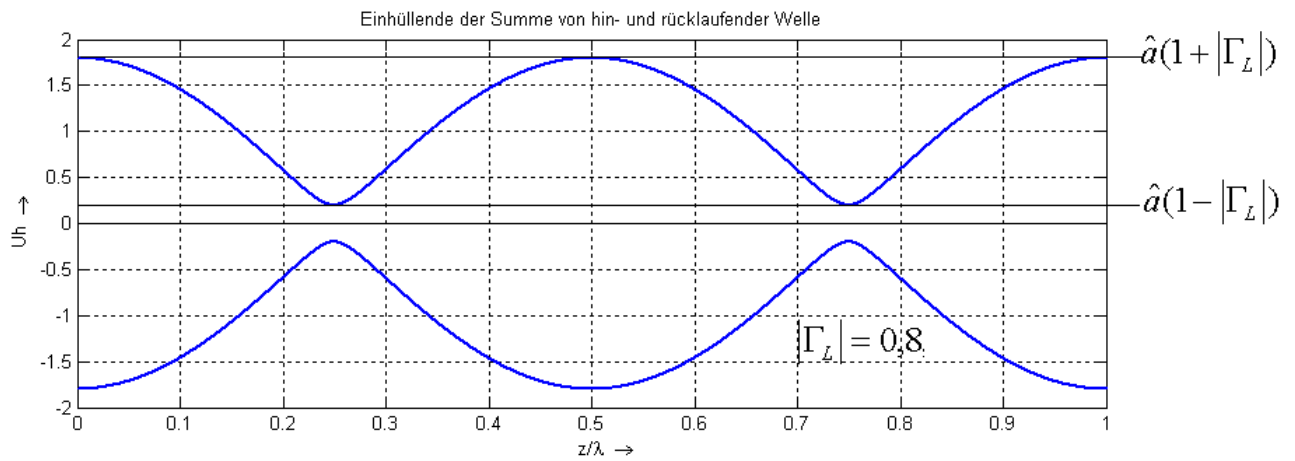
Damit können wir schreiben

$$u(z, t) = \hat{a} \cdot (1 - |\Gamma_L|) \cdot \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t - \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v}) \leftarrow \text{Wanderwelle} +$$

$$2\hat{a} \cdot |\Gamma_L| \cdot \cos(\frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \frac{\Psi}{2}) \cdot \cos(\mathbf{w}_0 \cdot t + \frac{\Psi}{2}) \leftarrow \text{stehende Welle}$$

Die Amplitudenanteile hängen von  $|\Gamma_L|$  ab. Ist der Reflexionsfaktor null gibt es gar keine stehende Welle ist sein Betrag 1 gibt es nur eine stehende Welle. Im allgemeinen überlagern sich beide Teilwellen und zeigen ein Amplitudenprofil mit **Knoten** und **Bäuchen**. Die Hüllkurve genügt der Gleichung

$$u_H(z) = \hat{a} \cdot \sqrt{1 + |\Gamma_L|^2 + 2 \cdot |\Gamma_L| \cos(2 \frac{\mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{z}}{v} + \Psi)}$$



### Stehwellenverhältnis

Das Verhältnis der maximalen zur minimalen Amplitude auf der Leitung wird **Stehwellenverhältnis** genannt.

$$S = \frac{|u|_{\max}}{|u|_{\min}} = \frac{\hat{a} \cdot (1 + |\Gamma_L|)}{\hat{a} \cdot (1 - |\Gamma_L|)} = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|}.$$

Es lässt sich mit einer Messleitung (Leitung mit geschlitztem Außenleiter) erfassen. Der **Kehrwert des Stehwelleverhältnisses** ist der **Anpassfaktor  $m$** .

$$m = \frac{1 - |\Gamma_L|}{1 + |\Gamma_L|}.$$