

Stationäre Wellen auf Leitungen bei harmonischer Erregung

Ausgangspunkt sind die Leitungsgleichungen für eine verlustbehaftete Leitung.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\left(L' \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + R' \cdot i \right) \quad \text{und} \quad -\frac{\partial i}{\partial z} = C' \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + G' \cdot u$$

Für die gesuchten stationären harmonischen Wellen machen wir einen Ansatz in Form komplexer Zeiger.

hinlaufende Welle: $w_h(z, t) = \underline{W}_h \cdot e^{j(\omega t - g \cdot z)}$

rücklaufende Welle: $w_r(z, t) = \underline{W}_r \cdot e^{j(\omega t + g \cdot z)}$

Damit nehmen die zeitlichen Ableitungen irgendeiner Größe w die Form $j\omega \cdot w$ an und das System der beiden partiellen Dgln. vereinfacht sich zu gewöhnlichen Dgln.

$$\frac{du}{dz} = -(j\omega \cdot L' + R') \cdot i \quad \text{und} \quad \frac{di}{dz} = -(j\omega \cdot C' + G') \cdot u$$

Alle Wellengrößen zeigen die gleiche Zeitabhängigkeit $e^{j\omega t}$. Die können wir also wie üblich weglassen und nur noch mit ruhenden Zeigern operieren.

$$U' = -(j\omega \cdot L' + R') \cdot I \quad \text{und} \quad I' = -(j\omega \cdot C' + G') \cdot U$$

Daraus läßt sich durch Ableiten und Einsetzen eine Dgl. 2. Ordnung für gewinnen.

$$U'' - g^2 U = 0 \quad \text{mit} \quad g^2 = (R' + j\omega \cdot L') \cdot (G' + j\omega \cdot C')$$

Die beiden Grundlösungen unserer Dgl. sind die Exponentialfunktionen

$$U_{h0} = e^{-g \cdot z} \quad \text{und} \quad U_{r0} = e^{+g \cdot z}.$$

Aus diesen beiden Grundwellen lassen sich alle denkbaren Lösungen durch Überlagerung aufbauen.

Die Größe γ ist eine komplexe Konstante und wird **Ausbreitungskonstante** genannt.

$$g = a + j \cdot b$$

Ausbreitungskonstante γ : $= \sqrt{(R'G' - \omega^2 L'C') + j\omega(L'G' + C'R')}$

Dämpfungskonstante α : $[\alpha] = \text{N} / \text{m}$ (Neper pro Meter)

Phasenkonstante β : $[\beta] = \text{rad} / \text{m}$

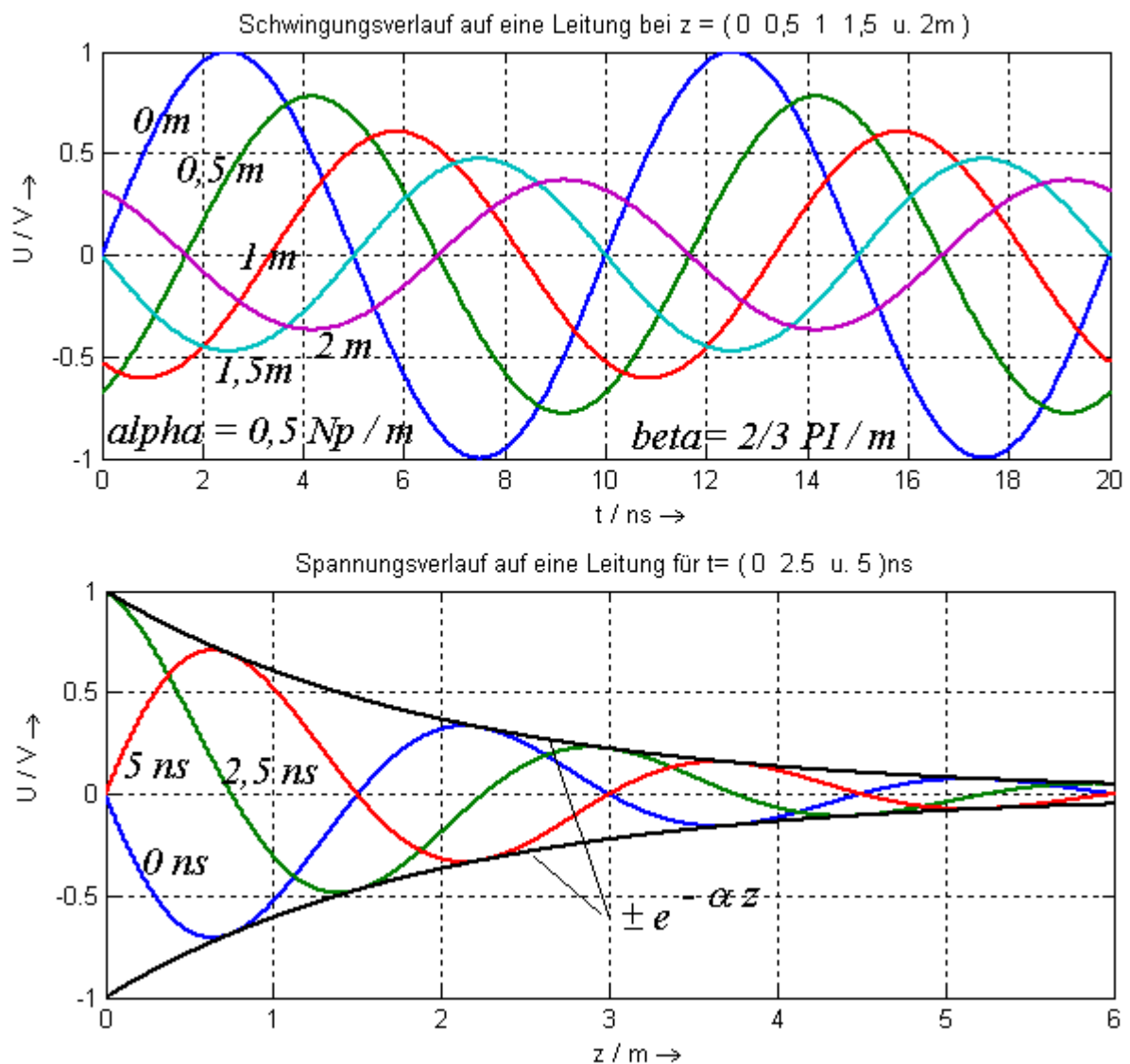
Damit kann z.B. die Spannung eine hinlaufende Welle in der Form

$$u_h(z, t) = U_0 e^{-a \cdot z} \cdot e^{j(\omega \cdot t - b \cdot z)}$$

An jedem festen Ort z schwingt die Welle in Form einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude $U_0 e^{-a \cdot z}$ und der Nullphase $-b \cdot z$.

Wir sehen, daß die Amplituden der Welle mit zunehmenden z exponentiell mit dem Exponenten $a \cdot z$ abnehmen und die Schwingung an der Stelle z der Schwingung am Bezugspunkt 0 um $b \cdot z$ nacheilt.

Beispiel: Ausbreitung einer 100 MHz-Schwingung auf einer Leitung ($v = c$)



Wenn die Lösung für die Spannung bekannt ist kann der Strom über $-U'=(R'+j\omega L')I$ bestimmt werden (und umgekehrt). Die allgemeine Lösung für $U(z)$ lautet

$$U(z) = U_h e^{-g \cdot z} + U_r e^{+g \cdot z}.$$

Damit ergibt sich für den Strom zu

$$I(z) = \frac{g}{(R' + j\omega \cdot L')} (U_h e^{-g \cdot z} - U_r e^{+g \cdot z})$$

$$I(z) = I_h e^{-g \cdot z} + I_r e^{+g \cdot z}.$$

Wir sehen, daß die Zeiger der Stromkomponente und der Spannungskomponente der hinlaufenden und der rücklaufenden Welle zueinander proportional sind. Die Proportionalitätskonstante hat die Dimension eines Widerstandes und wird **Wellenwiderstand** Z_0 der Leitung genannt.

$$Z_0 = \frac{(R' + j\omega \cdot L')}{g} = \sqrt{\frac{R' + j\omega \cdot L'}{G' + j\omega \cdot C'}}$$

$$U_h = Z_0 \cdot I_h \quad \text{und} \quad U_r = -Z_0 \cdot I_r$$

Beispiel: ideale (dämpfungsfree) Plattenleitung

Leitungskonstanten Plattenleitung: $L' = \mu_0 \cdot \frac{d}{b}$, $C' = \epsilon_0 \cdot \frac{b}{d}$, $R' = 0$, $G' = 0$

Ausbreitungskonstante :

$$g = a + j \cdot b = \sqrt{(-\omega^2 L' C')}$$

$$a = 0 \quad \text{und} \quad b = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} = \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0} = \frac{\omega}{c}$$

Die Leitung ist dämpfungsfree ($\alpha = 0$) und die Phasenkonstante $\beta = \omega / c$. Dieses Ergebnis gilt allgemein für verlustfreie Leitungen mit Luftisolation. Wird zur Isolation ein Dielektrikum mit $\epsilon_r > 1$ eingesetzt so ändert sich die Phasenkonstante in

$$b = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c \cdot \sqrt{\epsilon_r}}.$$

Der Wellenwiderstand Z_0 der Plattenleitung :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega \cdot L'}{G' + j\omega \cdot C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}_0 \cdot d^2}{\mathbf{e}_0 \cdot b^2}} = Z_F \cdot \frac{d}{b}$$

Beispiel: $d=1\text{ mm}$, $b=7,54\text{ mm} \rightarrow Z_0 = 50\text{ }\Omega$

Das Ergebnis $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ gilt ganz allgemein für dämpfungsarme Leitungen bei genügend hoher Frequenz, man bezeichnet deshalb diesen Wert auch als den

Hochfrequenzwellenwiderstand $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$.

Die dämpfungsarme Leitung

Gilt für eine Leitung $R' \ll \omega \cdot L'$ und $G' \ll \omega \cdot C'$ so spricht man von einer dämpfungsarmen Leitung. Diese Forderung ist im Bereich hoher Frequenzen (oberhalb von 1MHz) praktisch bei allen Leitungen gegeben. Sie erlaubt es für Z_0 und \mathbf{g} einfache Näherungsausdrücke anzugeben. Für den Wellenwiderstand gilt

Hochfrequenzwellenwiderstand $Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$ und für die **Ausbreitungskonstante** \mathbf{g} erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{a} + j \cdot \mathbf{b} = \sqrt{(R'G' - \omega^2 L'C') + j\omega(L'G' + C'R')} \\ &\approx \sqrt{-\omega^2 L'C' + j\omega(L'G' + C'R')} \\ &= j\omega \cdot \sqrt{L'C'} \cdot \sqrt{1 - j\left(\frac{G'}{\omega C'} + \frac{R'}{\omega L'}\right)} \\ &\approx j\omega \cdot \sqrt{L'C'} \cdot \left(1 - \frac{j}{2} \left(\frac{G'}{\omega C'} + \frac{R'}{\omega L'}\right)\right) \\ &= j\omega \cdot \sqrt{L'C'} + \frac{1}{2} \left(G' \cdot Z_0 + \frac{R'}{Z_0}\right) \\ \mathbf{a} &= \frac{1}{2} \left(\frac{R'}{Z_0} + G' \cdot Z_0\right) \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \omega \cdot \sqrt{L'C'} \end{aligned}$$

Die Phasenkonstante

Das Ergebnis zeigt, daß die Phasenkonstante **b** den selben Wert aufweist wie bei der idealen Leitung.

$$\mathbf{b} = \mathbf{w} \cdot \sqrt{L'C'} = \mathbf{w} \cdot \sqrt{\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{e}} = \frac{\mathbf{w}}{v} = \frac{\mathbf{w} \cdot \sqrt{\mathbf{e}_r}}{c} = \frac{2\mathbf{p}f}{v} = \frac{2\mathbf{p}}{\mathbf{l}_{Leitung}}$$

$$\mathbf{l}_{Leitung} = v \cdot T = \frac{v}{f}$$

mit der **Leitungswellenlänge**

Beispiel: $f = 100 \text{ MHz}$

Luftisolation: $\epsilon_r = 1 \rightarrow \mathbf{l}_{Leitung} = c / f = 3m$

festes DE : $\epsilon_r = 2,25 \rightarrow \mathbf{l}_{Leitung} = v / f = 2m$

Der Ausdruck für die Phasenkonstante zeigt, daß L' und C' bei TEM-Wellen voneinander abhängen.

$$\sqrt{L'C'} = \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{\mathbf{e}_r}}{c} \rightarrow L' = \frac{\mathbf{e}_r}{c^2 \cdot C'} \quad \text{und} \quad C' = \frac{\mathbf{e}_r}{c^2 \cdot L'} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{c^2} = \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{e}_0$$

Die Dämpfungskonstante

Für die Verluste (Leistungsdämpfung) ist der Widerstandsbelag R' und der Ableitungsbelag G' verantwortlich, wobei praktisch meist nur R' eine Rolle spielt. Von Bedeutung ist weiter, daß das logarithmische Dämpfungsmaß Neper (Np), das für Spannungsverhältnisse gilt, veraltet ist. Heute benutzt man ausschließlich das dB-Maß. Damit folgt aus

$$\mathbf{a} / \text{Np} = \ln(e^{\mathbf{a} \cdot 1m}) \rightarrow \mathbf{a} / \text{dB} = 20 \cdot \lg(e^{\mathbf{a} \cdot 1m}) = 20 \cdot \lg(e) \cdot \mathbf{a} / \text{Np}$$

$20 \cdot \lg(e) = 8,68589$ und damit erhalten wir

$$\mathbf{a} / \text{dB} \cdot m^{-1} = 4,342945 \cdot \left(\frac{R'}{Z_0} + G' \cdot Z_0 \right)$$

Beispiel: Dämpfung eines Koaxialkabel mit $r_i = 1mm$ $r_a = 3,49mm$ aus Kupfer, luftisoliert, bei 100 MHz . ($\mathbf{k}_{Cu} = 58,8 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot m^{-1}$, $\mathbf{d}_{Cu} \approx 6,61mm$)

$$Z_0 = 60\Omega \cdot \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right) = 75\Omega, \quad R' = \frac{1}{\mathbf{k}_{Cu} \cdot 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}_{Cu}} \cdot \left(\frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_a}\right) = 526,8m\Omega / m$$

$\rightarrow \alpha = 30,5 \text{ dB/km}$