

Streuparameter

Bei hohen Frequenzen ist es nicht mehr möglich Netzwerke mittels der Größen Strom und Spannung zu analysieren. Der Grund dafür:

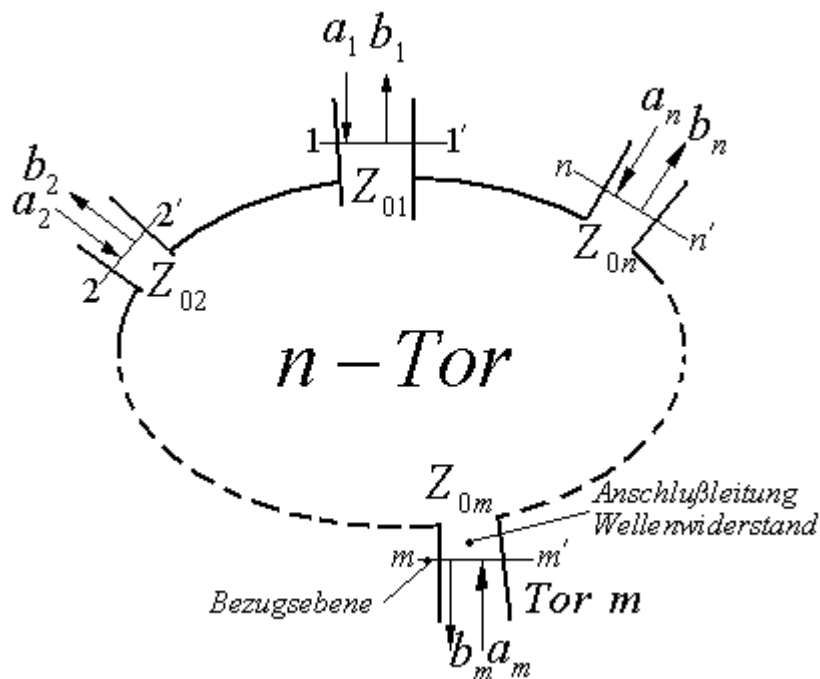
Strom und Spannung existieren in vielen Fällen gar nicht (z.B.: Antennen, Hohlleiter u. a. m.)

Eine Analyse mit dem Anspruch auf Allgemeinheit muß sich auf Leistungs-
wellen ***a*** und ***b*** stützen, die in allen Fällen existieren und auch immer getrennt
messbar sind.

Leistungswellen an einem n-Tor

Betrachten wir ein n-Tor, so ist die Situation dadurch gekennzeichnet, das dieses n-Tor in ein Netzwerk eingebunden ist und jedes Tor *m* über eine ***Leitung mit definiertem Wellenwiderstand Z_{0m}*** mit anderen Mehratoren verbunden ist. Über diese Leitungen laufen dabei ***Leistungswellen a und b*** in der Richtung auf das Tor *m* und davon weg. Dabei besteht zwischen den Leistungsgrößen *a* und *b* und den Wellenspannungen bzw. –strömen folgender Zusammenhang:

$$a = \frac{u_h}{\sqrt{Z_0}} = i_h \cdot \sqrt{Z_0} \quad , \quad b = \frac{u_r}{\sqrt{Z_0}} = i_r \cdot \sqrt{Z_0} \quad \text{und} \quad u = (a + b) \cdot \sqrt{Z_0}, i = (a - b) / \sqrt{Z_0}$$



Bei einem linearen n-Tor (das keine absoluten Wellenquellen enthält) bewirkt eine auf ein Tor zulaufende Welle a_i an allen anderen und dem eigenen Tor auslaufende Wellen. Laufen auf alle Tore Wellen zu, überlagern sich alle die dadurch verursachten Teilwellen zu den resultierenden auslaufenden Wellen.

Für Tor i gilt : $\frac{b_i}{a_i} = \underline{S}_{ii}$, Reflexionsfaktor am Tor i für Tor j $\neq i$ gilt :

$\frac{b_j}{a_i} = \underline{S}_{ji}$, Transmissionsfaktor vom Tor i zum Tor j.

Die Faktoren \underline{S}_{ji} beschreiben die Wellenübertragung zwischen den Toren und am eigenen Tor. Diese Zusammenhänge lassen sich in einem Gleichungssystem zusammenfassen.

$$\begin{aligned} b_1 &= \underline{S}_{11} \cdot a_1 + \underline{S}_{12} \cdot a_2 + \underline{S}_{13} \cdot a_3 + \dots \underline{S}_{1n} \cdot a_n \\ b_2 &= \underline{S}_{21} \cdot a_1 + \underline{S}_{22} \cdot a_2 + \underline{S}_{23} \cdot a_3 + \dots \underline{S}_{2n} \cdot a_n \\ &\vdots \\ b_n &= \underline{S}_{n1} \cdot a_1 + \underline{S}_{n2} \cdot a_2 + \underline{S}_{n3} \cdot a_3 + \dots \underline{S}_{nn} \cdot a_n \end{aligned}$$

Fassen wir die einlaufenden und auslaufenden Wellen zu Vektoren und die Streuparameter zu Streumatrix zusammen

$$a^T = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] , b^T = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_n] \text{ und}$$

$$\|\underline{S}\| = \begin{bmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \cdot & \underline{S}_{1n} \\ \underline{S}_{21} & \underline{S}_{22} & \cdot & \underline{S}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \underline{S}_{n1} & \underline{S}_{n2} & \cdot & \underline{S}_{nn} \end{bmatrix}$$

können wir kompakter schreiben

$$[b] = \|\underline{S}\| \cdot [a]$$

(S steht für *scattering parameter*).

Besonders interessant in der Anwendung sind verlustfreie n-Tore. Das sind Tore die keine Wirkleistung aufnehmen.

Für ein n-Tor gilt:

$$P = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - |b_k|^2 = \sum_{k=1}^n a_k \cdot a_k^* - b_k \cdot b_k^* .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit den Wellenvektoren sehr kompakt schreiben

$$\begin{aligned}
P &= [a]^T \cdot [a]^* - [b]^T \cdot [b]^* \\
&= [a]^T \cdot [a]^* - [\|S\| \cdot [a]]^T \cdot [\|S\| \cdot [a]]^* \\
&= [a]^T \cdot [a]^* - [a]^T \cdot \|S\|^T \cdot \|S\|^* \cdot [a]^* \\
&= [a]^T \cdot (\|E\| - \|S\|^T \cdot \|S\|^*) \cdot [a]^*
\end{aligned}$$

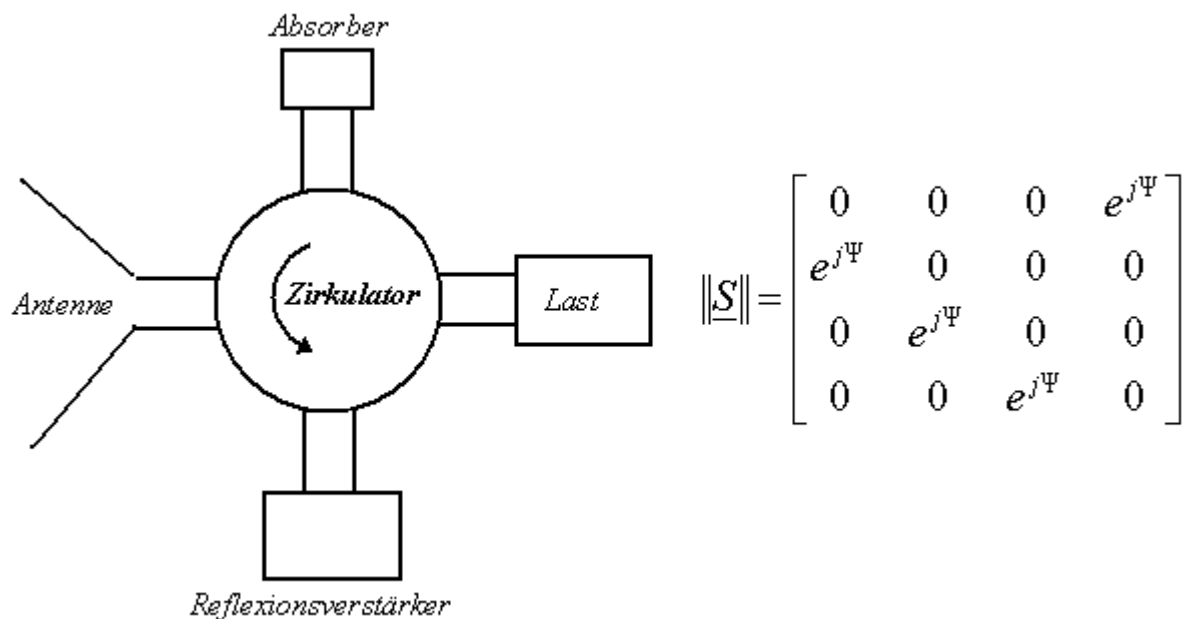
Damit P für alle möglichen Vektoren $[a]$ verschwindet, muß

$$\|E\| = \|S\|^T \cdot \|S\|^* \quad \text{gelten.}$$

Matrizen, die eine solche Eigenschaft besitzen, nennt man **unitär**.

Beispiel:

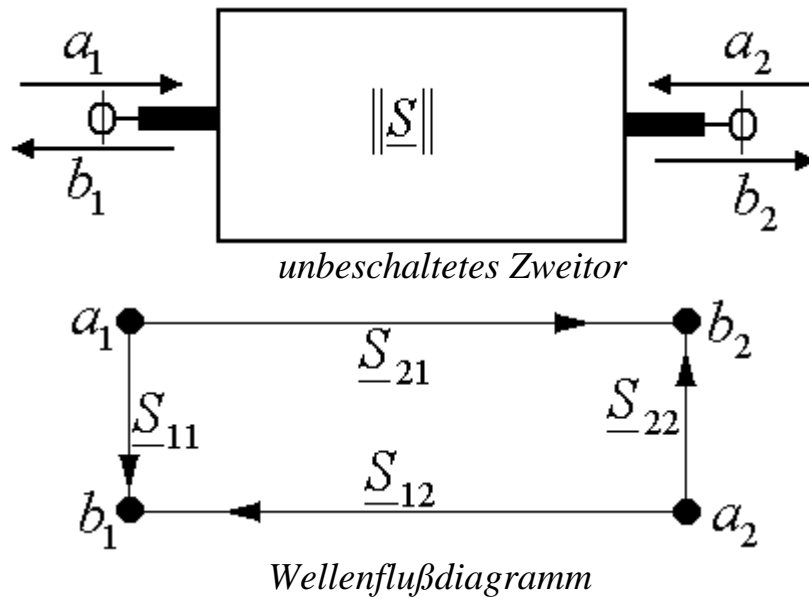
Ein verlustfreies 4-Tor ist ein (idealisierte) 4-Tor-Zirkulator. Ein Zirkulator überträgt eine in das Tor m eingespeiste Welle nur zum Nachbartor $m+1$ (modulo n).



Zweitore

Im allgemeinen Fall kann der Bezugswiderstand an den Toren frei (aber reell) gewählt werden. Im Standard zur Beschreibung von 2-Toren wird der Wert $Z_0 = 50 \text{ } \Omega$ festgelegt. Für die Wellen an einem 2-Tor gelten dann folgende Zusammenhänge:

$$[b] = \|S\| \cdot [a] \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} b_1 &= \underline{S}_{11} \cdot a_1 + \underline{S}_{12} \cdot a_2 \\ b_2 &= \underline{S}_{21} \cdot a_1 + \underline{S}_{22} \cdot a_2 \end{aligned}$$



Bedeutung der \underline{S}_{jk} :

$$\underline{S}_{11} = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Eingangsreflexionsfaktor bei Anpassung am Ausgang



$$\underline{S}_{21} = \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0}$$

Wellentransmissionsfaktor vorwärts bei Anpassung am Ausgang

$$\underline{S}_{22} = \left. \frac{b_2}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Ausgangsreflexionsfaktor bei Anpassung am Eingang



$$\underline{S}_{12} = \left. \frac{b_1}{a_2} \right|_{a_1=0}$$

Wellentransmissionsfaktor rückwärts bei Anpassung am Eingang

Wellenwiderstand Bezugsebene Anschlußleitung Wellenflußdiagramm