Elektromagnetische Wellen

Ausbreitung em. Wellen im freien Raum (ε_0, μ_0, c)

Die Ausbreitung em. Wellen wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Allerdings benötigt man dazu die differentielle Form, die den Zusammenhang von elektrischem und magnetischem Feld in jeden Raum- und Zeitpunkt beschreiben.
Integralform:

1. ***MW Gl.*** , Induktionsgesetz
$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint_A \vec{B} \cdot \vec{dA}\right\}$$

2. ***MW Gl.*** , Durchflutungsgesetz
$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot \vec{ds} = -\frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint_A \vec{D} \cdot \vec{dA}\right\}$$

und
$$\vec{D} = e_0 \cdot \vec{E}\,, \qquad \vec{B} = m_0 \cdot \vec{H}$$

Von ihrem Charakter her sind ***E*** und ***H*** Wirbelfelder und es gilt der Stokessche Satz

$$\oint_{\partial A} \vec{V} \cdot \vec{ds} = \iint_A rot(\vec{V}) \cdot \vec{dA}$$

Wenden wir ihn auf die ***MW Gln*** an und berücksichtigen die Materialbeziehungen so folgt

$$\iint_A rot(\vec{E}) \cdot \vec{dA} = -m_0 \frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint_A \vec{H} \cdot \vec{dA}\right\} \to rot(\vec{E}) = -m_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\iint_A rot(\vec{H}) \cdot \vec{dA} = e_0 \frac{\partial}{\partial t}\left\{\iint_A \vec{E} \cdot \vec{dA}\right\} \to rot(\vec{H}) = e_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

1.MWGl. $rot(\vec{E}) = -m_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ und 2.MWGl. $rot(\vec{H}) = e_0 \cdot \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Es handelt sich bei diesen Gleichungen um ein System partieller Dgln. 1. Ordnung. In kartesischen Koordinaten erhält man mit

$$\vec{E} = \vec{e_x} \cdot E_x + \vec{e_y} \cdot E_y + \vec{e_z} \cdot E_z \quad \text{u.} \quad \vec{H} = \vec{e_x} \cdot H_x + \vec{e_y} \cdot H_y + \vec{e_z} \cdot H_z$$

und dem Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes

$$rot(\vec{V}) = \begin{bmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{bmatrix}$$

$$= \vec{e_x} \cdot \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \vec{e_y} \cdot \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \vec{e_z} \cdot \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

ein System von 6 skalaren Differentialgleichungen 1.Ordnung für die Komponenten von ***E*** und ***H*.**

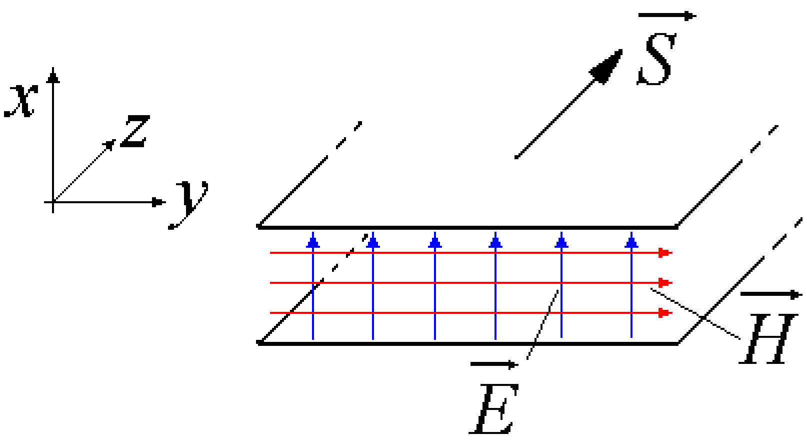
$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -m_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -m_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -m_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = e_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = e_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = e_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Ebene Wellen:

Eine ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet besitzt nur in der xy-Ebene Komponenten von E und H die senkrecht auf der z-Richtung (em. Wellen sind transversale Wellen) und senkrecht zueinander sind.

$$\vec{E} = \vec{e_x} \cdot E_x \quad \text{und} \quad \vec{H} = \vec{e_y} \cdot H_y$$



Der Pointingsche Vektor S besitzt nur eine Komponente in z-Richtung und zeigt, das die Ausbreitung in dieser Richtung erfolgt.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{e_x} \cdot E_x) \times (\vec{e_y} \cdot H_y) = \vec{e_z} \cdot E_x \cdot H_y$$

Von den 6 Dgln. bleiben so nur zwei übrig

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -m_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \text{und} \qquad -\frac{\partial H_y}{\partial z} = e_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}.$$

Durch Ableiten nach *z* und *t* und gegenseitigem Einsetzen gewinnt man daraus für H_y und für E_x eine partielle Dgl. 2.Ordnung, die als Wellengleichung oder Helmholtzgleichung bezeichnet wird.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad \text{mit} \quad m_0 \cdot e_0 = \frac{1}{c^2}$$

Die beiden Grundlösungen dieser Dgl., die verallgemeinert $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$

lautet, mit $v = \frac{1}{\sqrt{e \cdot m}} < c$, sind $A(z - v \cdot t)$ und $A(z + v \cdot t)$. $A(z - v \cdot t)$ ist eine mit v nach rechts und $A(z + v \cdot t)$ eine mit v nach links laufende Welle. Die allgemeine Lösung erhält man durch Superposition zweier solcher Wellen.

allgemeine Lösung : $$W(z,t) = A(z - v \cdot t) + B(z + v \cdot t)$$

E und H sind in der em. Welle verknüpft und existieren nicht unabhängig voneinander. Gilt für die elektrische Feldstärke $E_x = E_0(z,t)$, so gilt wegen der ***MW Gln***.

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = e_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \mp e_0 \cdot v \cdot E_0'(z,t) \qquad \text{und} \qquad H_y = \pm e_0 \cdot v \cdot E_0(z,t).$$

Das Vorzeichen resultiert aus der Laufrichtung der Welle und hat keine weitere Bedeutung. Wichtig ist, das die Amplituden von E und H streng proportional zueinander sind. Es gilt immer

$$H = e \cdot v \cdot E \quad \text{und somit} \quad \frac{E}{H} = \frac{1}{e \cdot v} = \frac{\sqrt{e \cdot m}}{e} = \sqrt{\frac{m}{e}}$$

im freien Raum heißt dieser Wert Feldwellenwiderstand, da seine Dimension Ω ist.

Feldwellenwiderstand Z_0 : $$Z_0 = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}} = 120 \cdot p \cdot \Omega \approx 377\,\Omega$$

Beispiel einer sich ausbreitenden Welle

$E(z,t) = rect(z\text{-}vt)+rect(z+vt)$ und $H(z,t)=(rect(z\text{-}vt)-rect(z+vt))/Z_0$