Hochfrequenztechnik

1.1. Einführung in die Theorie der e.m.-Wellen

Ausgangspunkt unserer Betrachtung ist das vollständige System der Maxwell'schen Gleichungen (zunächst zur Vereinfachung in integraler Form)

Gauß'scher Satz

$$\oint_{(\partial V)} \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_{(V)} \varrho \cdot dV = Q$$

$$\oint_{(\partial V)} \boxed{\mu} \cdot \vec{H} \cdot d\vec{A} = 0$$

es gibt keine magn. Ladungen (Monopole)

Faraday'sches Induktionsgesetz

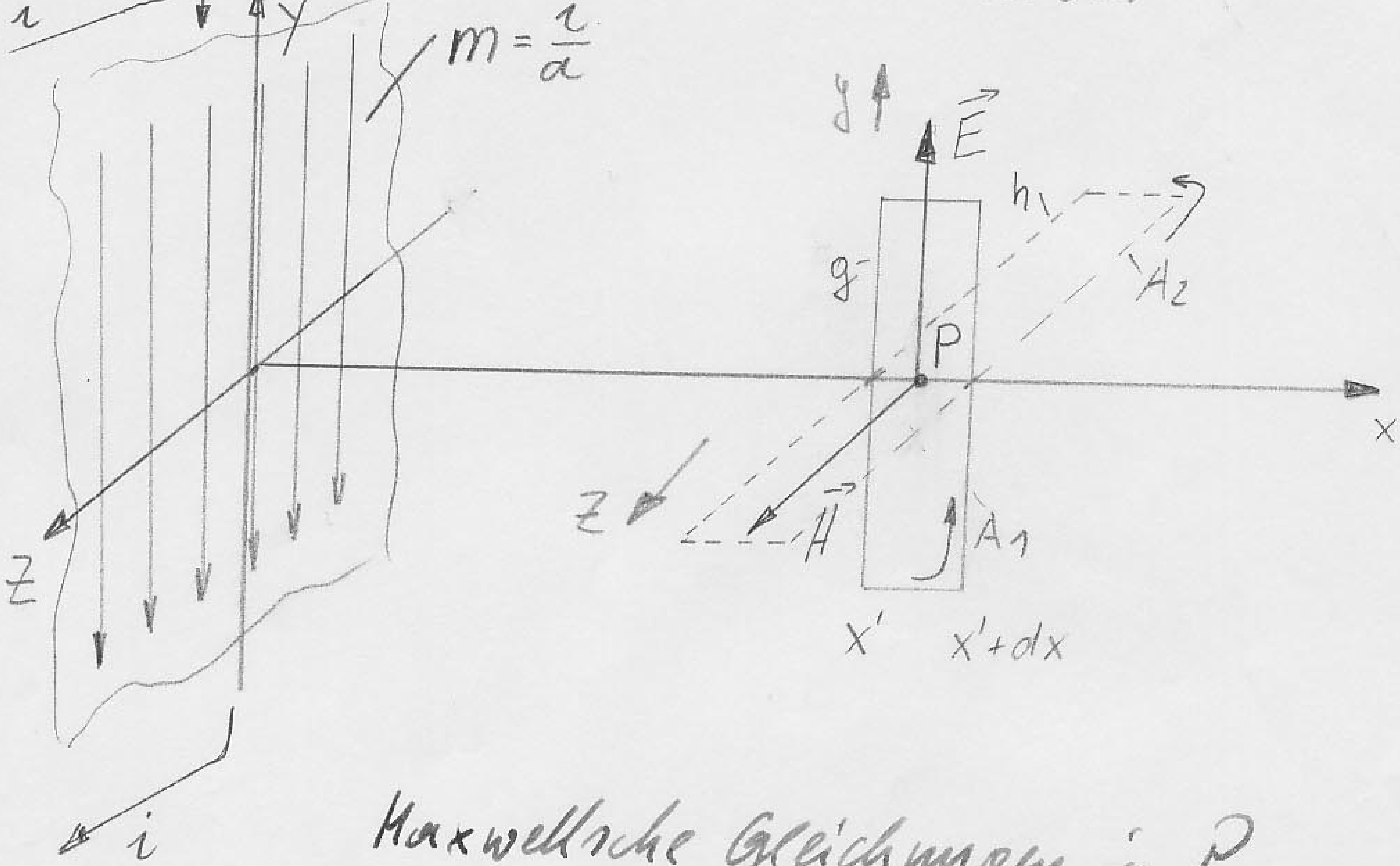
$$-\oint_{(\partial A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{(A)} \mu \vec{H} \cdot d\vec{A} + I_M \qquad (1)$$

Amperescher Durchflutungssatz (erweitert)

$$\oint_{(\partial A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{\partial}{\partial t} \oint_{(A)} \varepsilon \vec{E} \cdot dA + I_e \qquad (2)$$

Einfache Eigenschaften einer e.m.-Welle (TEM)

Eine mit einem Flächenstrom belegte metallische Wand strahlt eine ebene e.m. Welle ab, wenn sich der Strom mit der Zeit ändert.



Maxwellsche Gleichungen in P

(1) für A_1: $-\left[E_y(x'+dx)\,g - E_y(x')\,g\right] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} H_z \cdot g \cdot dx$

$E_y(x') + \frac{\partial E_y}{\partial x} dx$

(3) $$\boxed{-\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_z(x,t)}{\partial t}}$$

(2) für A_2: $\left[-H_z(x'+dx)\,h + H_z(x')\,h\right] = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_y \cdot h \cdot dx$

$-(H_z(x') + \frac{\partial H_z}{\partial x} \cdot dx)$

(4) $$\boxed{-\frac{\partial H_z(x,t)}{\partial x} = \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}}$$

Das System partieller DGLn (3),(4) beschreibt eine ebene e.m.-Welle in x-Richtung. Das läßt sich am einfachsten zeigen, wenn aus (3) und (4) durch partielles Differentiieren und Einsetzen

$$(5) \quad \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

und

$$(6) \quad \frac{\partial^2 H_z(x,t)}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 H_z(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

gebildet werden. Beide Gleichungen sind vom Typ der Helmholtz- oder Wellengleichung

$$(7) \quad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \,,$$

die Wellenausbreitung mit der Geschwindigkeit v in allen denkbaren Bereichen der Physik beschreibt.

- (6) und (7) besagt nicht, daß es eine elektrische und eine magnetische Welle gibt. Diese Gleichungen beschreiben nur die jeweilige Feldkomponente in der e.m.-Welle

- Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der e.m.-Welle ist $c = \left(\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}\right)^{-1} = 3 \cdot 10^8 \, m/s$

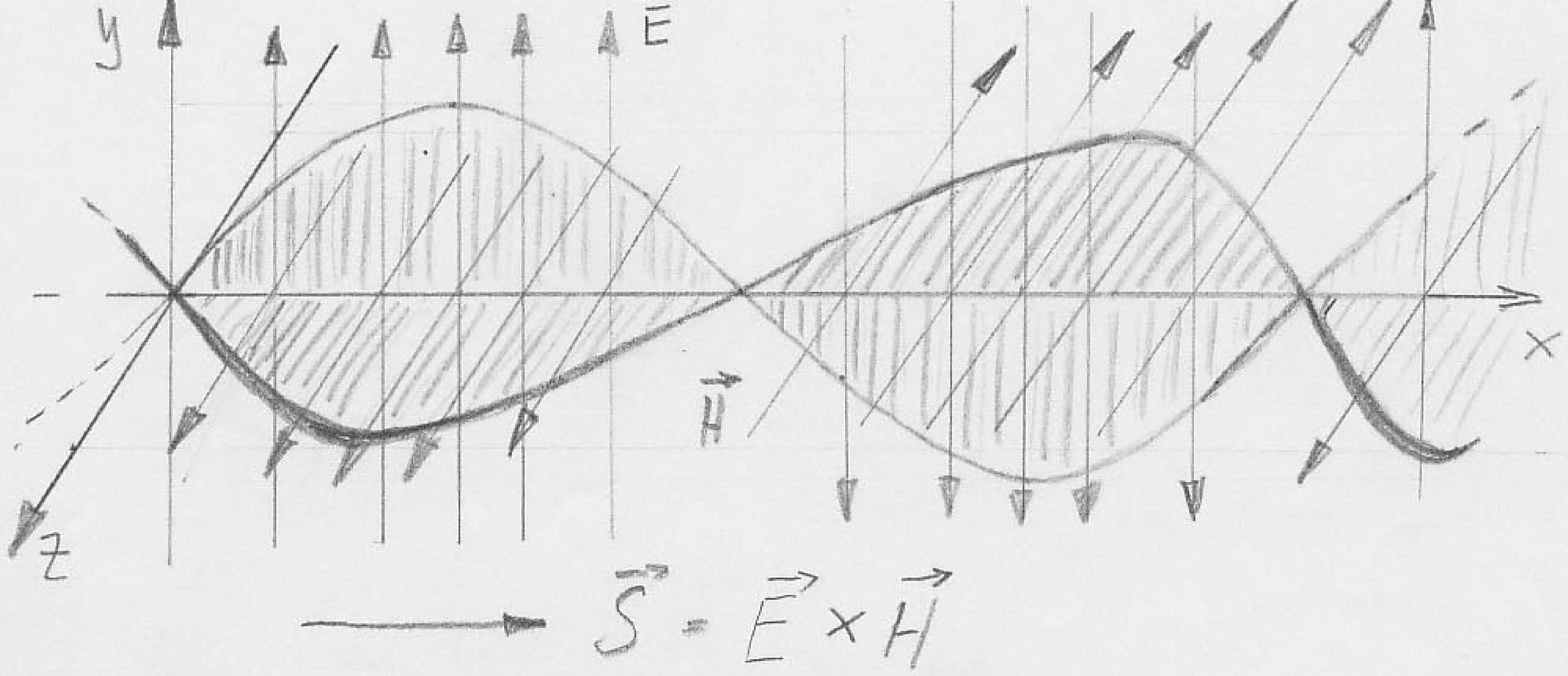
- $\vec{E}_y$ und $\vec{H}_z$ stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (TEM-Typ). Ihr Verhältnis beträgt im freien Raum immer

$$\frac{E}{H} = \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \underline{120\pi\,\Omega = 377\,\Omega}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \quad , \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{As}{Vm}$$

- $\vec{S}_x = \vec{E}_y \times \vec{H}_z$ (Poyntingscher Vektor) weist in Ausbreitungsrichtung der Welle.

$\oint\limits_{(A)} \vec{S} \cdot d\vec{A}$ gibt die durch A hindurchgehende Leistung der em-Welle an.



Lösung der Wellengleichung (7)

Wie durch Einsetzen zu zeigen, ist jede Funktion A der Form

$$A(x \pm vt), \; A\left(t \pm \frac{x}{v}\right)$$

Lösung der Wellengleichung und beschreibt eine sich mit v in x-Richtung ausbreitende Welle.

Angewandt auf (6) und (5) heißt das, daß

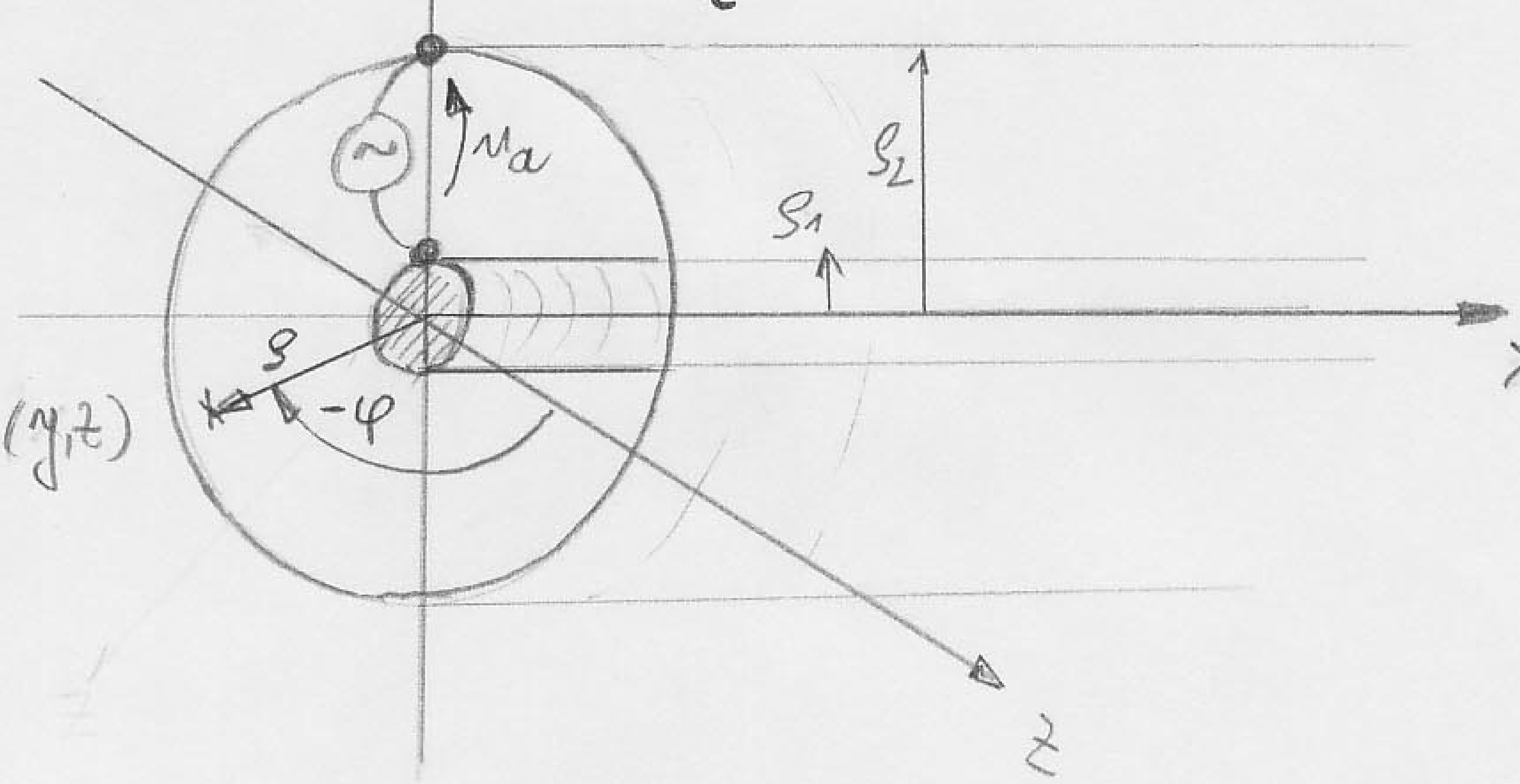
$$\vec{A}(x,y,z,t) = \vec{e}_z \cdot H_z(x-ct, y, z) \quad \text{und}$$

$$\vec{E}(x,y,z,t) = \vec{e}_y \, E_y(x-ct, y, z); \; (E_y = \eta \cdot H_z)$$

e.m. Wellen sind, die sich mit c in x-Richtung ausbreiten. Ihre willkürliche Abhängigkeit von y und z erlaubt die Anpassung an verschiedene technische Aufgaben

1.2 Elektromagnetische Wellen auf Leitungen

Ein Beispiel: Koaxialkabel, ε_0, μ_0
$l \to \infty$



$$u_a(t) = \hat{U}_a \cos\omega t\,;$$

Anpassung der Wellenfunktion an die Erregung $U_a(t)$ bei $x = 0$:

$$\vec{E}(x=0, \rho, t) = \frac{\hat{U}_a}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \cos\omega t\, \vec{e}_\rho$$

damit gilt

$$\vec{E}(x, \rho, \varphi, t) = \frac{\hat{U}_a}{\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) \cdot \vec{e}_\rho$$

$$= \vec{e}_\rho \cdot \hat{\vec{E}}(\rho, \varphi) \cos\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

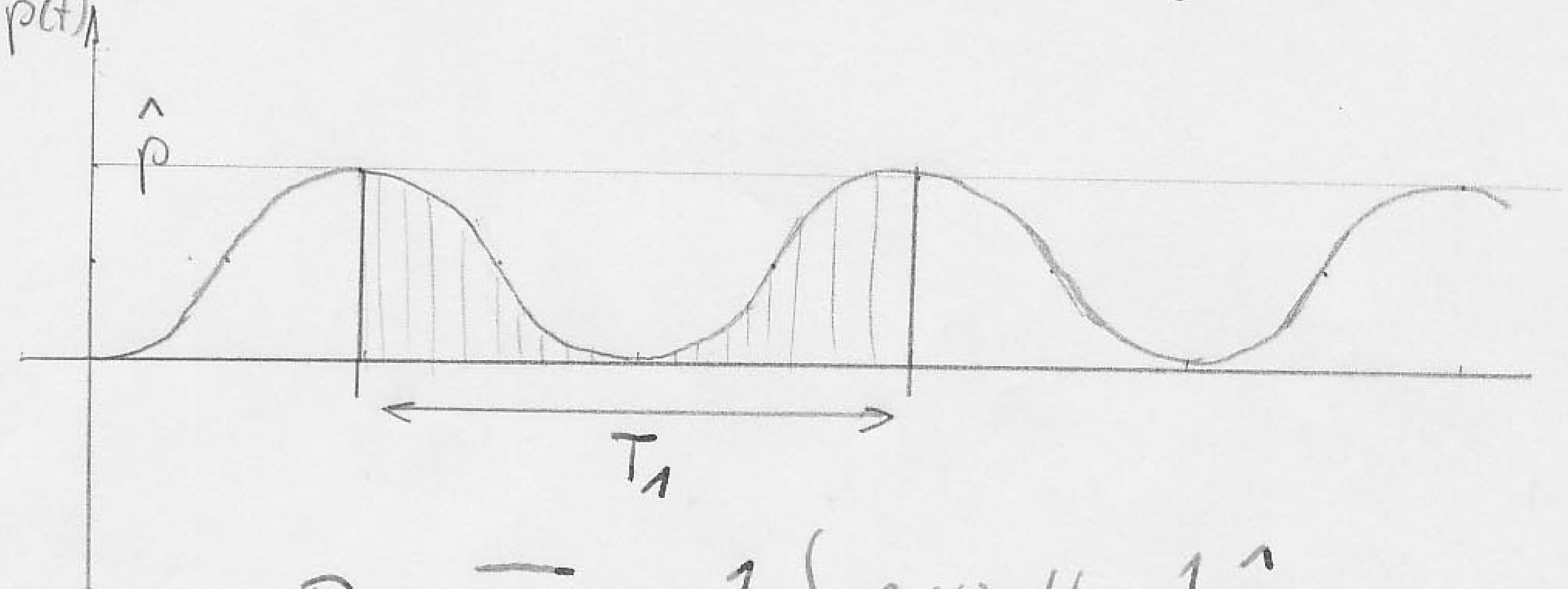
und aus (3) ergibt sich

$$\vec{H}(x,\varsigma,\varphi,t) = \vec{e}_\varphi \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \hat{E}(\varsigma,\varphi)\cdot\cos\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

auch für unsere Leitung gilt: $\hat{E} = \eta \cdot \hat{H}$

Die von der e.m.-Welle durch den Querschnitt transportierte elektrische Leistung ergibt sich aus dem Poynting'schen Vektor

$$p(t) = \int_{(A)} \vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{A} = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{\hat{U}_a^2}{\ln\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1}}\cos^2\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)$$



$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} p(t)\,dt = \frac{1}{2}\hat{p}$$

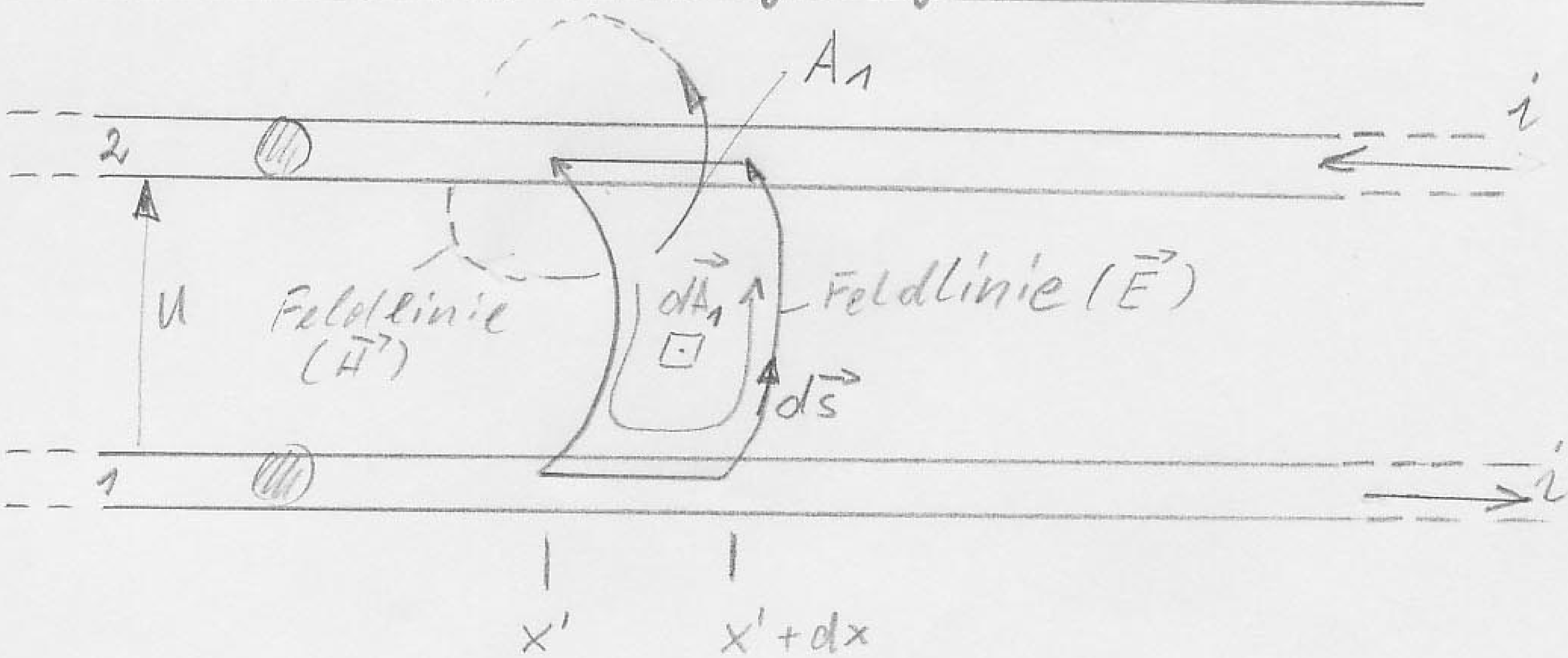
$$= \pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\cdot\frac{\hat{U}_a^2}{\ln\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1}} \left[= \frac{\hat{U}_a^2}{2Z} \quad ; Z = \overbrace{\frac{1}{2\pi}\eta}^{60\Omega}\cdot\ln\frac{\varsigma_2}{\varsigma_1} \right]$$

Z = Wellenwiderstand der Leitung

Unsere Betrachtung verdeutlicht vor allem, daß die e.m.-Welle und damit der Energietransport nicht in den Leitern, sondern im e.m.-Feld zwischen den Leitern erfolgt. Die Leiter dienen nur der Führung der Welle.

Für viele Fragen ist es bequemer, mit den Leitungsgrößen $i(x,t)$ und $u(x,t)$ zu arbeiten.

Die Leitungsgleichungen für u und i



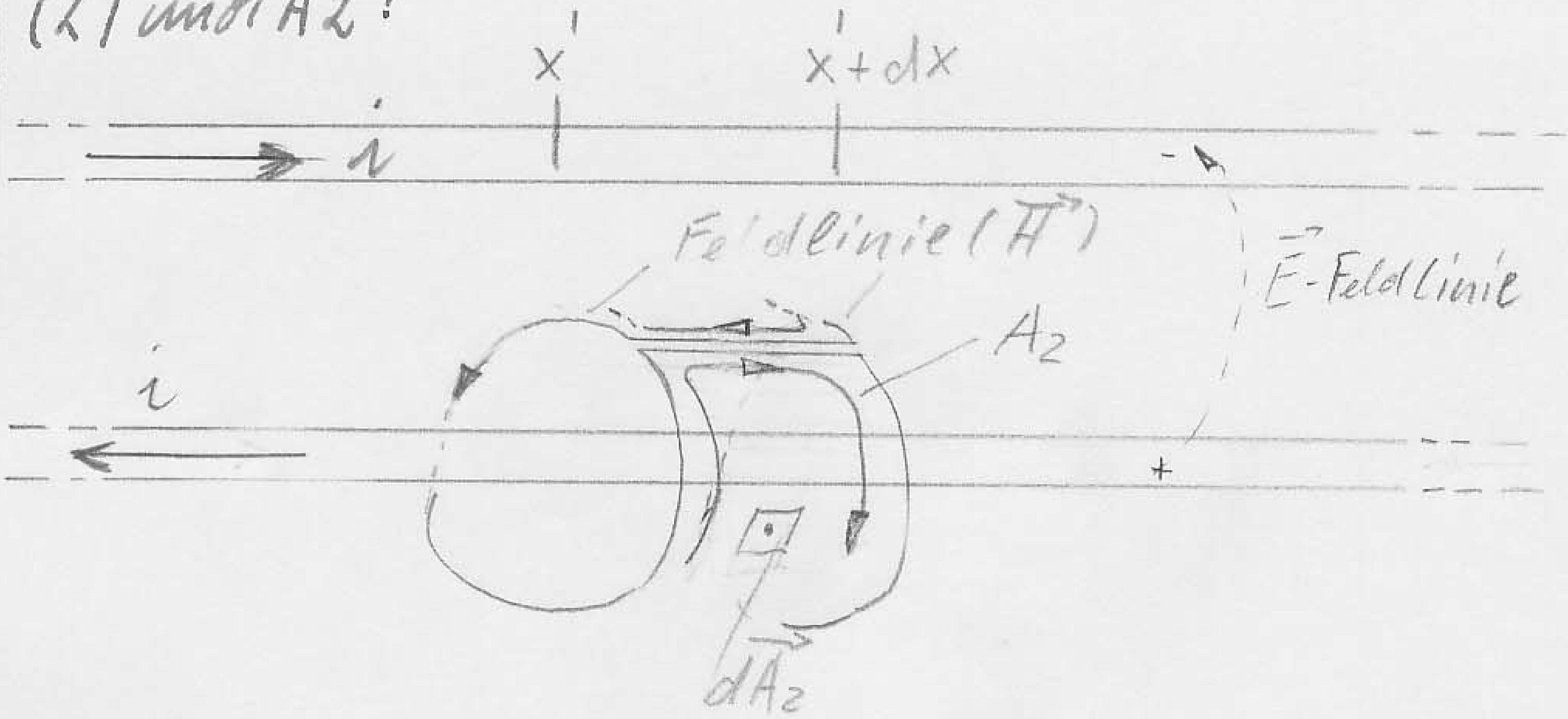
(1) und A_1: $$-u(x,t)+u(x'+dx) = -\frac{\partial}{\partial t}\Psi_m(dx)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\cdot dx = -L'\cdot\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}\cdot dx$$

mit L' - auf die Längeneinheit bezogene Induktivität der Leitung

(8) $$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) = -L'\frac{\partial}{\partial t}i(x,t)}$$

(2) und A2:

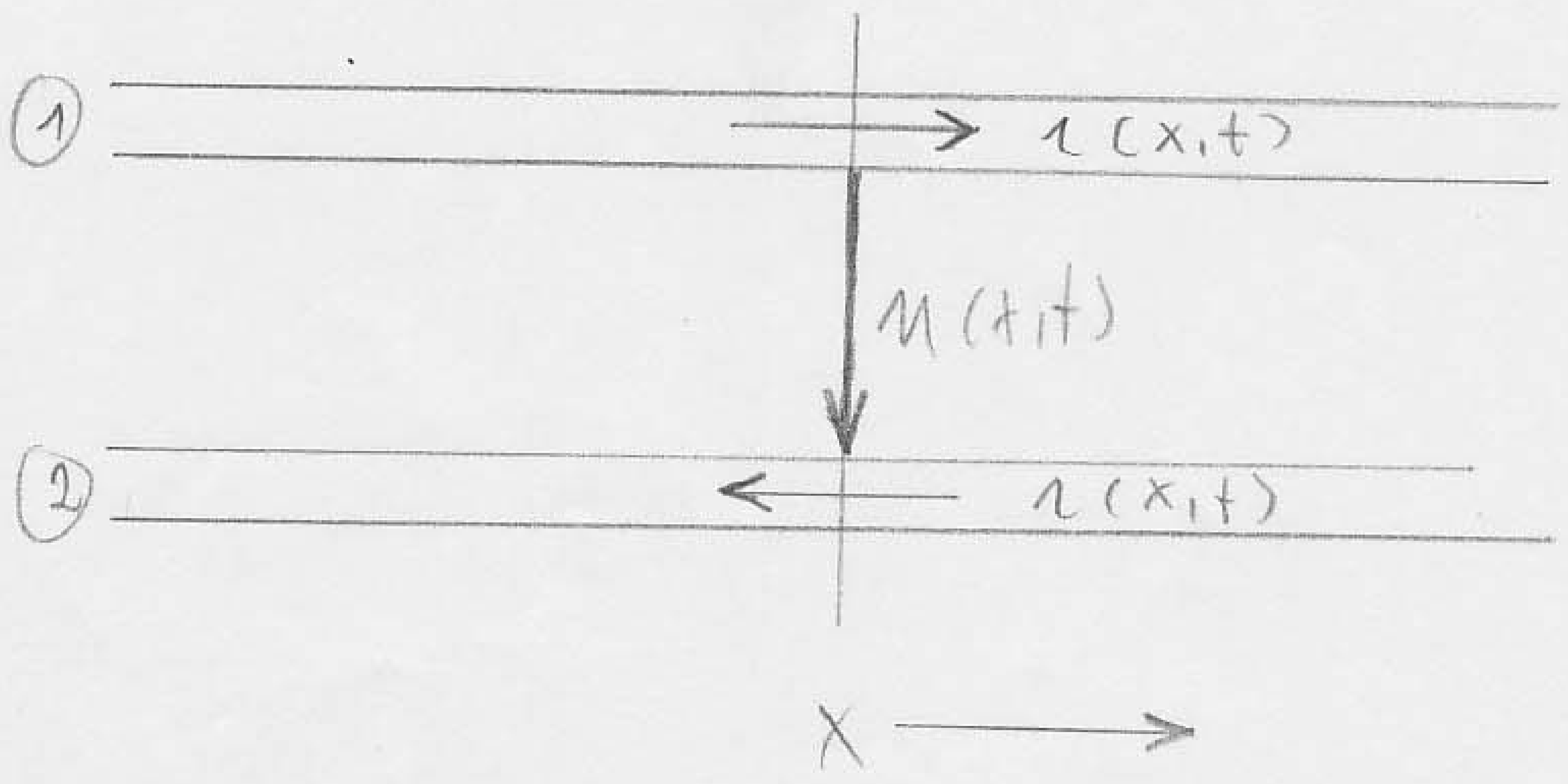


(2) und A2: $-i(x') + i(x'+dx) = -\frac{\partial}{\partial t} \Psi_e(dx)$

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} \cdot dx = -C' \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot dx$$

mit C' - auf die Längeneinheit bezogene Kapazität der Leitung

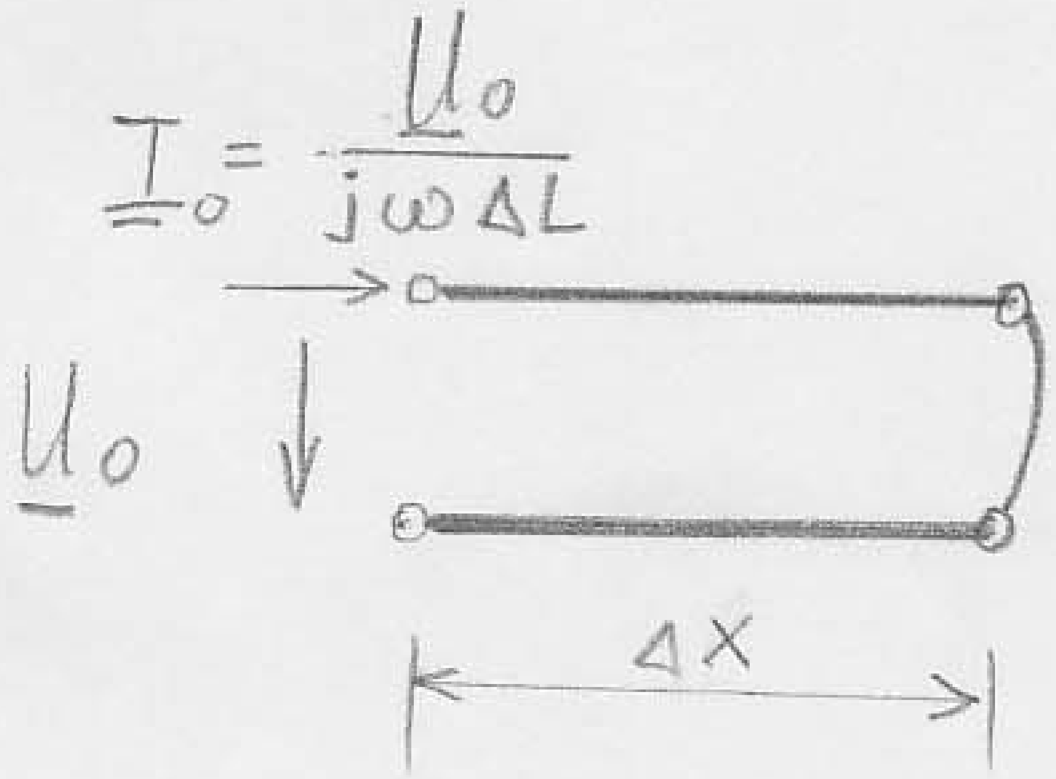
$$(3) \qquad \boxed{\frac{\partial}{\partial x} i(x,t) = -C' \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)}$$

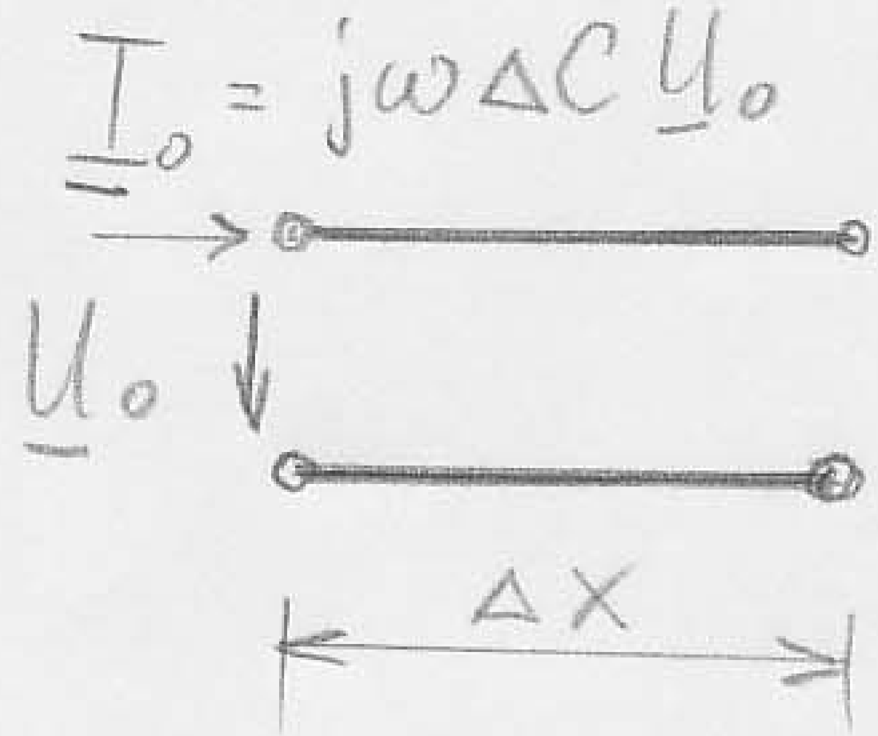


Messung der Leitungsparameter:

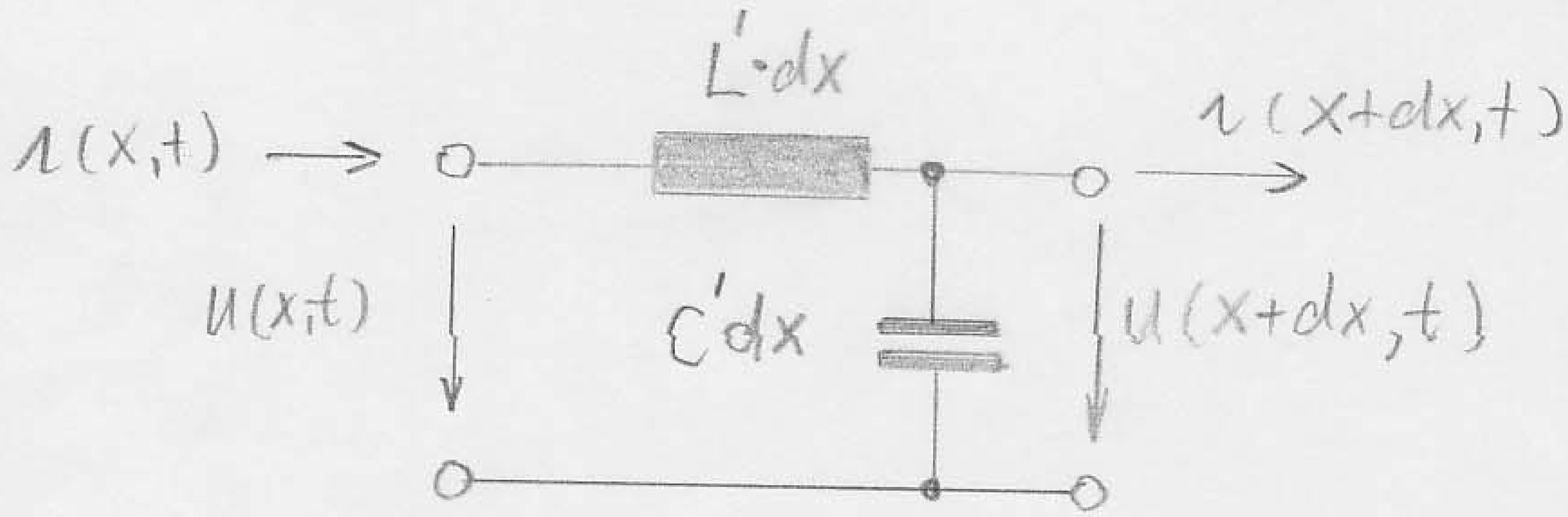
homogene Leitungen: $L' = \frac{\Delta L}{\Delta x}$, $L' \neq f(\Delta x)$

$\Delta x \ll \lambda$ $\qquad C' = \frac{\Delta C}{\Delta x}$, $C' \neq g(\Delta x)$





Interpretation der Leitungsgleichung durch einen Ersatzvierpol für ein Stück dx der Leitung



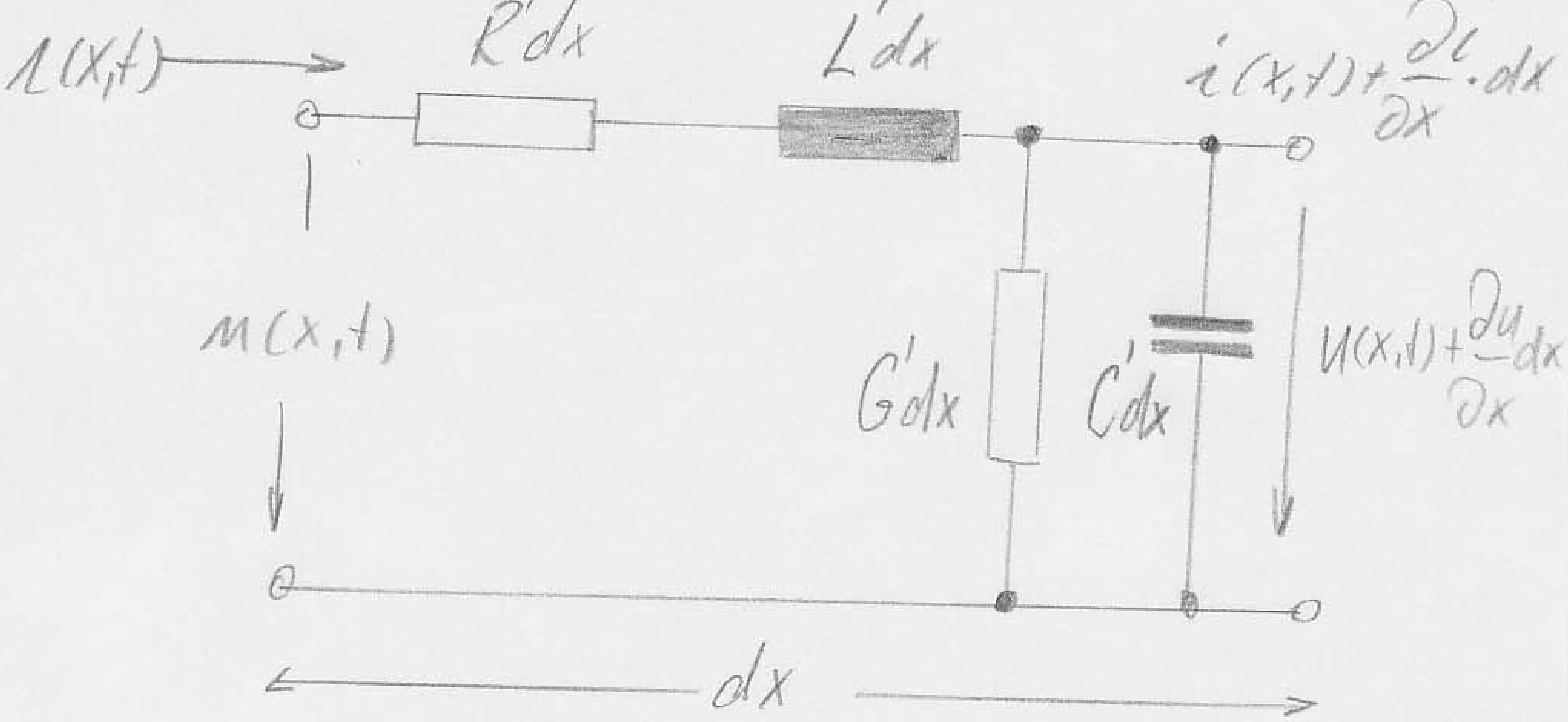
$$u(x,t) - u(x+dx,t) = L' \cdot dx \frac{\partial}{\partial t} i(x,t)$$

$$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -L' \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i(x,t) - i(x+dx,t) = C' dx \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

In der Ersatzstruktur lassen sich aber leicht Leitungsverluste (Längswiderstand dR und Ableitung dG) berücksichtigen)



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\left(R' + L'\frac{\partial}{\partial t}\right) i$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\left(G' + C'\frac{\partial}{\partial t}\right) u$$

R', L', G', C' heißen primäre Leitungsparameter

<u>Die Leitung im eingeschwungenen Zustand</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow j\omega \;, \qquad u \Rightarrow \underline{U}(x,t) = \underline{U}(x)\, e^{j\omega t}$$

$$i \Rightarrow \underline{I}(x,t) = \underline{I}(x)\, e^{j\omega t}$$

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = -(R' + j\omega L')\underline{I} \;, \quad \frac{d\underline{I}}{dx} = -(G' + j\omega C')\underline{U}$$

bzw. (Wellengleichung)

$$\underline{U}'' - \gamma^2 \underline{U} = 0 \quad \text{und} \quad \underline{I}'' - \gamma^2 \underline{I} = 0$$

mit $\gamma^2 = (R' + j\omega L')(G' + j\omega C')$

(γ = Ausbreitungskonstante der Leitungswelle)

Lösungen: $\underline{U} = \underline{U}_1 e^{-\gamma x}$ und $\underline{U} = \underline{U}_2 e^{\gamma x}$

$$\underbrace{\underline{I} = \underline{I}_1 e^{-\gamma x}}_{\text{Welle in x-Richtung}} \qquad \underbrace{\underline{I} = \underline{I}_2 e^{\gamma x}}_{\text{Welle in -x-Richtung}}$$

allgemein $\underline{U} = \underline{U}_1 e^{-\gamma x} + \underline{U}_2 e^{\gamma x}$

daraus folgt $\underline{I}$

$$\underline{I} = -\frac{1}{(R' + j\omega L')} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx}$$

$$= \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} \left(\underline{U}_1 e^{-\gamma x} - \underline{U}_2 e^{\gamma x} \right)$$

setzt man $\underline{Z} = \dfrac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \sqrt{\dfrac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$

gilt $\underline{I} = \dfrac{1}{\underline{Z}} \left(\underline{U}_1 e^{-\gamma x} - \underline{U}_2 e^{\gamma x} \right)$

Die Größe $\underline{Z}$ heißt Wellenwiderstand der Leitung

$\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ werden durch die Bedingungen am Anfang $(x=0)$ und am Ende $(x=l)$ der Leitung festgelegt.

Wellenausbreitung auf einer Leitung

1. γ, $\underline{Z}$ sollen untersucht werden

Annahme $l \to \infty$, $Re\{\gamma\} = \alpha > 0$

Es interessiert in diesem Fall nur die hinlaufende Welle $\underline{U}(x) = \underline{U}_h(x)$

$$\underline{U}(0) = \underline{U}_a \; ; \; \underline{U}_h(x) = \underline{U}_a \, e^{-\gamma x}$$

$$\underline{I}_h(x) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} \cdot e^{-\gamma x}$$

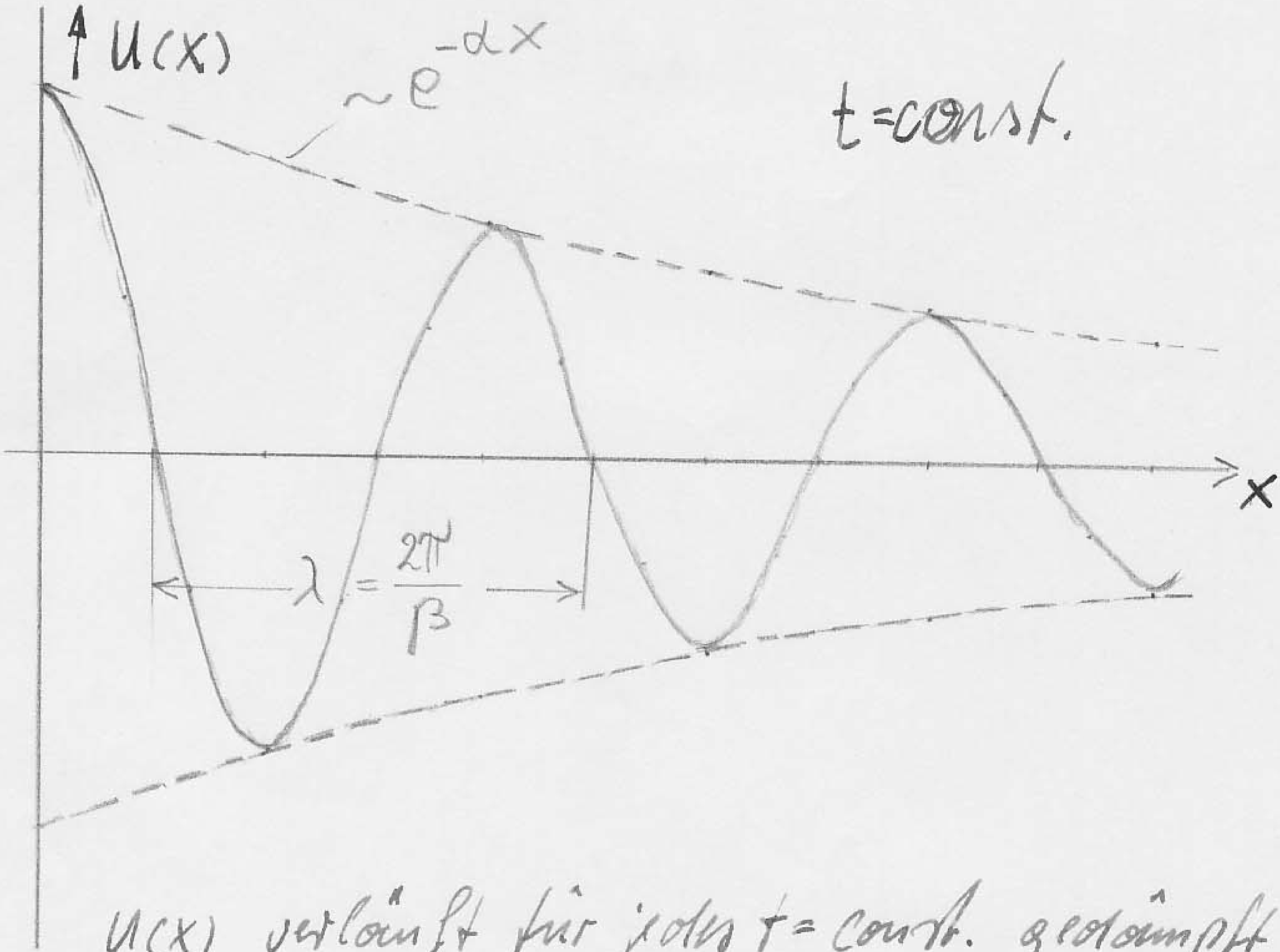
beide Teilkomponenten der Welle pflanzen sich entsprechend der Ausbreitungskonstanten γ je in x-Richtung fort.

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\underline{U}_h = \underline{U}_a \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} = \underline{U}_{a0} \cdot e^{-\alpha x} e^{-j(\omega t - \beta x)}$$

α = Dämpfungskonstante

β = Phasenkonstante



U(x) verläuft für jedes t = const. gedämpft und oszillierend in x-Richtung. Die Phasenkonstante β bestimmt, wie sich die Schwingungsknoten (-bäuche) nach rechts verschieben. Die Geschwindigkeit, mit der das geschieht, heißt Phasengeschwindigkeit v_{ph}.

$$\left.\begin{aligned} t=t_1 \quad (\omega t_1 - \beta x_1) &= \frac{\pi}{2} \\ t=t_2 \quad (\omega t_2 - \beta x_2) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} v_{ph} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$V_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$$

Fragt man bei $t = const$ nach dem Abstand zweier gleicher Phasen (z.B. $\varphi = 0$), so erhält man die <u>Wellenlänge λ</u> auf der Leitung.

$$\omega t - \beta x_1 = 0 \quad ; \quad \omega t - \beta x_2 = 0 + 2\pi$$

$$\lambda = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{oder}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Die Dämpfung eines Leitungsstückes ergibt sich zu

$$al = \ln \frac{|U(0)|}{|U(l)|} = \alpha \cdot l \cdot 1\,N_{eper}$$

(N steht für Neper und zeigt an, daß die Dämpfung mit dem logarithmus naturalis ermittelt wurde)

Anmerkung:

Da $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ auch angibt, wieviele Male die Wellenlänge λ in dem betreffenden Medium (ε, μ) auf die Längeneinheit geht, bezeichnet man sie auch mit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ als Stoffwellenzahl.}$$

Wellenwiderstand:

Bei der unbegrenzt langen Leitung tritt nur eine Welle (in x-Richtung) auf. Bildet man für diese Welle den Quotienten von

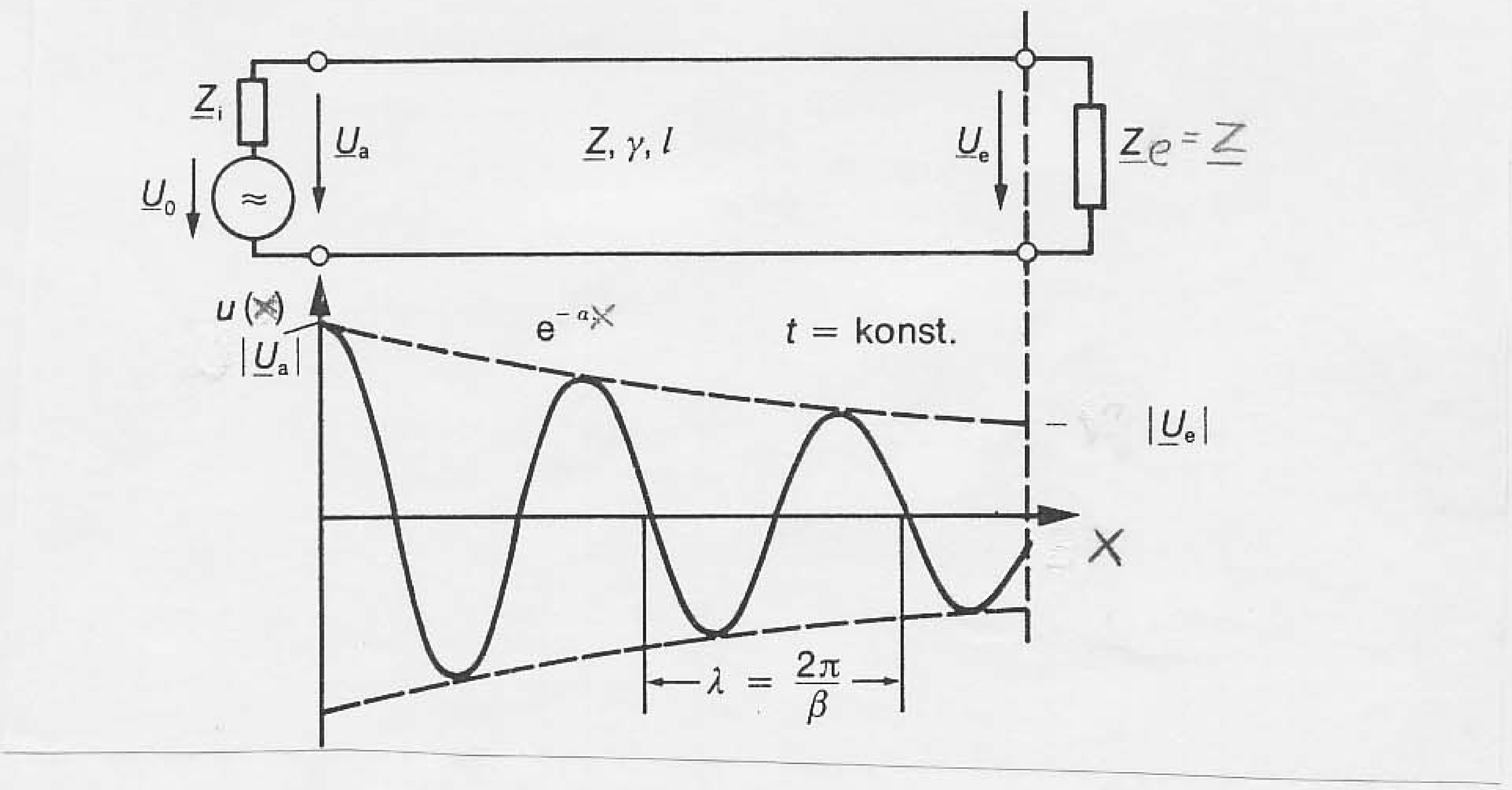
$$\frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = \frac{\underline{U}_a\, e^{-\gamma x}}{\frac{\underline{U}_a}{\underline{Z}} \cdot e^{-\gamma x}} = \underline{Z} \; ,$$

erhält man den von x unabhängigen Wert $\underline{Z}$, der typisch ist für Wellen auf dieser Leitung und deshalb auch Wellenwiderstand heißt.

Gleiche Bedingungen kann man auch für jede endliche Leitung erreichen, wenn man sie am Ende mit einem Lastwiderstand beschaltet, der gleich dem Wellenwiderstand ist. In diesem Fall

$$\underline{Z}_e = \underline{Z} \quad !$$

spricht man von <u>Anpassung</u>, genauer von Wellenanpassung. Es treten am Ende keine Reflexionen auf. Die Leistung, die von der Welle transportiert wird, geht widerspruchsfrei in $\underline{Z}_e$ über (Absorbtion)



In den meisten praktischen Fällen ist $\underline{Z}$ reell. Dann stimmt die Wellenanpassung mit der Leistungsanpassung überein.

Allgemeiner Abschluß:

Im allgemeinen Fall setzen sich Strom und Spannung auf einer Leitung aus der hin- und der rücklaufenden Welle zusammen. Am Leitungsende gilt $(x=\ell)$

$$\underline{U}_e = \underline{I}_e \cdot \underline{Z}_e ,$$

womit sich $\underline{U}_1$ zu (s. S. 13)

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{\gamma\ell}$$ und

$\underline{U}_2$ zu

$$\underline{U}_2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{-\gamma\ell}$$ und damit

$$\underline{U}(x) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{-\gamma(x-\ell)} + \left(1-\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{+\gamma(x-\ell)}\right)$$

und

$$\underline{I}(x) = \frac{1}{2\underline{Z}}\left(\left(1+\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{-\gamma(x-\ell)} - \left(1-\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_e}\right)\underline{U}_e e^{+\gamma(x-\ell)}\right)$$

bestimmt.

Das Verhältnis der Spannungsphasoren von rück- und hinlaufender Welle

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{\underline{Z}_e - \underline{Z}}{\underline{Z}_e + \underline{Z}}$$ nennt

man den Reflexionsfaktor (am Leitungsende).

An einer beliebigen Stelle x gilt

$$\frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h}(x) = \underline{r} \cdot e^{-2\gamma(l-x)} = \underline{r}(x).$$

Das kann man auch als Transformationsbeziehung für den Reflexionsfaktor auffassen.

Anpassung: $\underline{Z}_e = \underline{Z} \Rightarrow \underline{r} = 0$

Leerlauf: $|\underline{Z}_e| \to \infty \Rightarrow \underline{r} = 1$

Kurzschluß: $|\underline{Z}_e| \to 0 \Rightarrow \underline{r} = -1$

Für die Ströme von hin- und rücklaufender Welle gilt:

$$\frac{-\underline{I}_r}{\underline{I}_h} = \underline{r}$$, da der Strom der rücklaufenden Welle in die $-x$-Richtung weist.