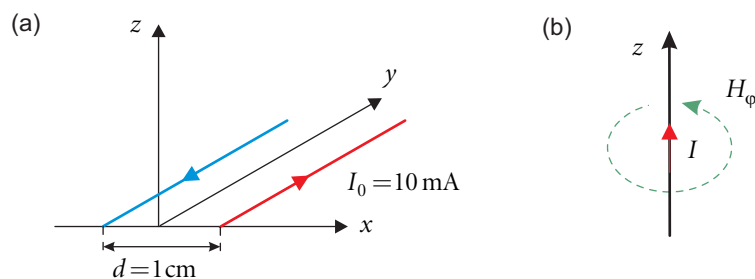


## B Aufgabenlösungen zu Kapitel 2

### B.1 Lösung der Übungsaufgabe 2.1

Bild B.1a zeigt die parallel verlaufenden Hin- und Rückleiter, die jeweils von einem (Gleich-) Strom von  $I_0 = 10 \text{ mA}$  durchflossen werden und im Abstand  $d = 1 \text{ cm}$  voneinander entfernt verlaufen.



**Bild B.1** (a) Parallele Leiter in y-Richtung; (b) Einzelleiter in z-Richtung

#### Vorüberlegungen zum magnetisches Feld eines einzelnen Linienleiters

Zunächst wollen wir das magnetische Feld eines *einzelnen Linienleiters* berechnen. Als Orientierung des Leiters wählen wir – abweichend von der Aufgabenstellung (!) – die z-Richtung, damit wir das Zylinderkoordinatensystem vorteilhaft verwenden können.

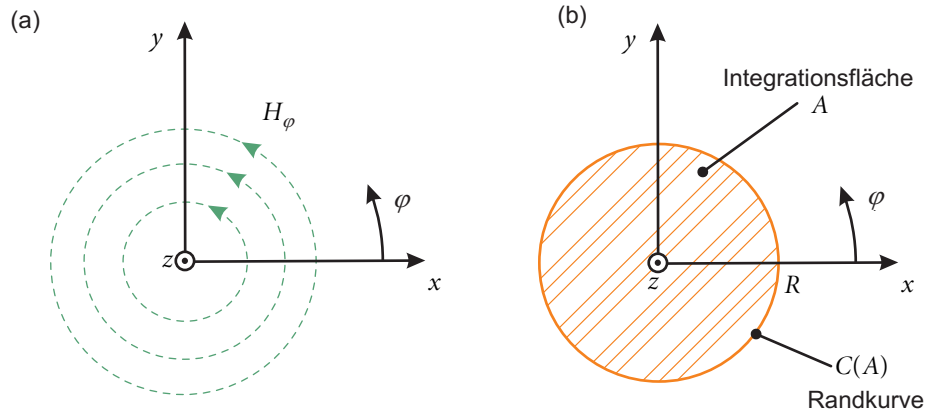
Die Berechnung führen wir mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes in Gleichung (B.1) durch, wobei aufgrund des Gleichstromes zeitabhängige Terme verschwinden ( $\partial/\partial t \rightarrow 0$ ).

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{j} + \underbrace{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}_{\rightarrow 0} \right) \cdot d\vec{A} \quad (\text{B.1})$$

Unsere anschauliche Erwartungshaltung aus Abschnitt 2.1.2.2 (Rechte-Hand-Regel) für das magnetische Feld ist in Bild B.1b und B.2a eingezeichnet: Wir erwarten ein in  $\varphi$ -Richtung umlaufendes magnetisches Feld, welches auf Kreisen um die z-Achse einen konstanten Wert aufweist. Andere Feld-Komponenten werden aufgrund der Symmetrie nicht erwartet. Als Fläche für die Integration wählen wir daher einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf der z-Achse (Bild B.2b).

Auf der linken Seite in Gleichung (B.1) werten wir ein Linienintegral über den Rand  $C(A)$  der Kreisfläche  $A$  in  $\varphi$ -Richtung (für  $\varphi$  von Null bis  $2\pi$ ) aus. Zunächst fällt auf, dass das

magnetische Feld in Richtung des Wegelementes in Zylinderkoordinaten  $ds_\varphi = R d\varphi$  zeigt (siehe Anhang A). Bei parallelem Verlauf der Vektoren wird aus dem Skalarprodukt das Produkt der Beträge der Vektoren.



**Bild B.2** Zur Berechnung des magnetischen Feldes eines in z-Richtung orientierten Linienleiters

Da das magnetische Feld  $H$  längs des Integrationsweges konstant ist, kann  $H$  aus dem Integral herausgezogen werden und wir erhalten

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} H_\varphi ds_\varphi = \int_0^{2\pi} H_\varphi R d\varphi = 2\pi R H_\varphi . \quad (\text{B.2})$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (B.1) wird die Stromdichte  $J$  über die Fläche  $A$  integriert. Anschaulich ist sofort klar, dass dies den Strom  $I$  durch den Innenleiter ergibt.

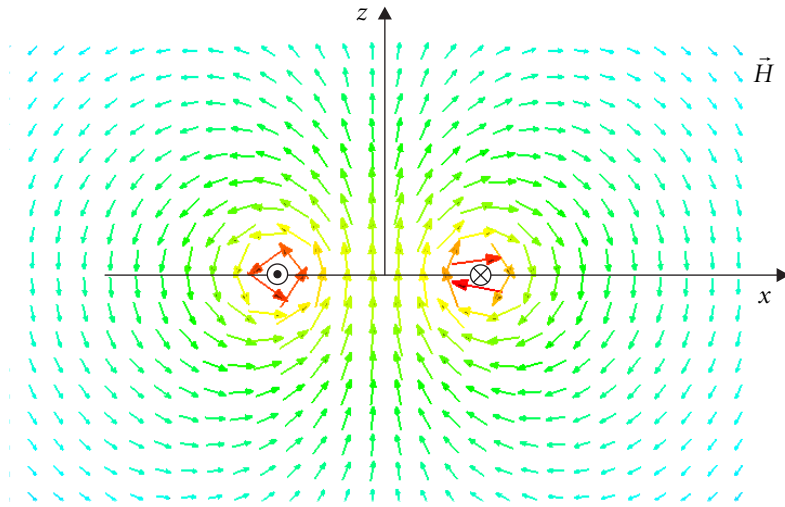
$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I \quad (\text{B.3})$$

Führen wir Gleichung (B.2) und (B.3) zusammen, so erhalten wir für das magnetische Feld zwischen den Leitern:

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{2\pi R}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \vec{e}_\varphi} . \quad (\text{B.4})$$

### a) Magnetisches Feld zweier Linienleiter in einer Querschnittsebene

Bei der vorgegebenen Aufgabe handelt es sich nun um *zwei* Linienleiter, die jeweils um  $+d/2$  bzw.  $-d/2$  verschoben sind. Das Magnetfeld in einer Querschnittsebene erhalten wir graphisch durch Superposition (anschaulich in Bild B.3 dargestellt). Wir müssen beachten, dass die Leiter hier in  $y$ -Richtung orientiert sind.



**Bild B.3** Verteilung des magnetischen Feldes in einer Querschnittsebene (xz-Ebene)

### b) Magnetisches Feld zweier Linienleiter auf der $x$ -Achse

Auf der  $x$ -Achse können wir das magnetische Feld  $H_1(x)$  des linken (blauen) Leiters mit Gleichung (B.4) berechnen. Wir müssen dazu die Stromflussrichtung und die Verschiebung um  $d/2$  in negativer Koordinatenrichtung berücksichtigen. Längs der  $x$ -Achse besitzt das Feld nur eine  $z$ -Komponente.

$$\vec{H}_1(x) = \frac{I}{2\pi(x+d/2)} \vec{e}_z \quad (\text{B.5})$$

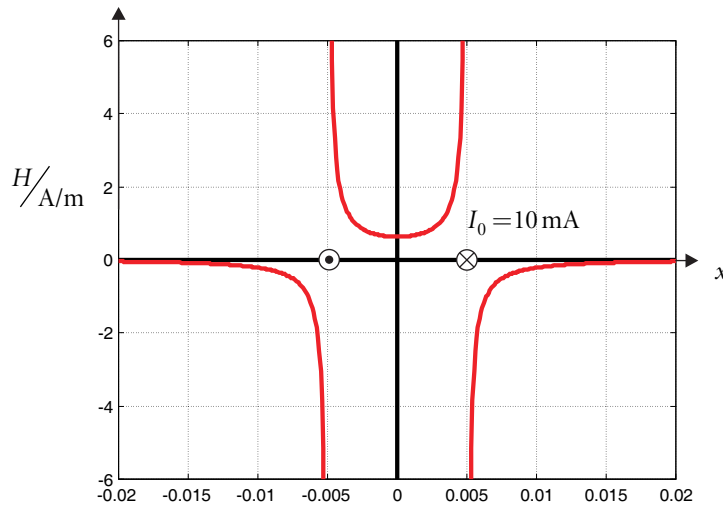
Das magnetische Feld  $H_2(x)$  des rechten (roten) Leiters lautet auf der  $x$ -Achse unter Berücksichtigung der Stromflussrichtung dann

$$\vec{H}_2(x) = \frac{-I}{2\pi(x-d/2)} \vec{e}_z. \quad (\text{B.6})$$

Das Gesamtfeld auf der  $x$ -Achse gewinnt man durch Superposition der beiden Feldanteile:

$$\begin{aligned} \vec{H}(x) &= \vec{H}_1(x) + \vec{H}_2(x) = \left[ \frac{I}{2\pi(x+d/2)} - \frac{-I}{2\pi(x-d/2)} \right] \vec{e}_z \\ &= \frac{I}{2\pi} \left[ \frac{x-d/2-(x+d/2)}{x^2-(d/2)^2} \right] \vec{e}_z = -\frac{I}{2\pi} \left[ \frac{d}{x^2-d^2/4} \right] \vec{e}_z \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

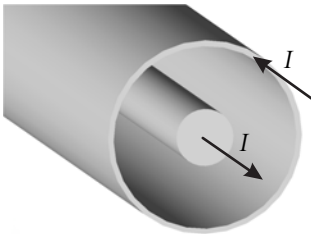
Der Verlauf der  $z$ -Komponente ist in Bild B.4 dargestellt.



**Bild B.4** Verlauf der z-Komponente des magnetischen Feldes auf der x-Achse

## B.2 Lösung der Übungsaufgabe 2.2

Für eine luftgefüllte Leitung gilt  $\epsilon_r = 1$  und  $\mu_r = 1$ . Im Innen- und Außenleiter fließt der gleiche Gleichstrom  $I$ , jedoch in entgegengesetzter Richtung. Wir nehmen an, dass der Strom im Innenleiter in positive z-Richtung fließe und den Wert  $I = 1$  A besitze (Bild B.5).



**Bild B.5** Koaxiale Leitung

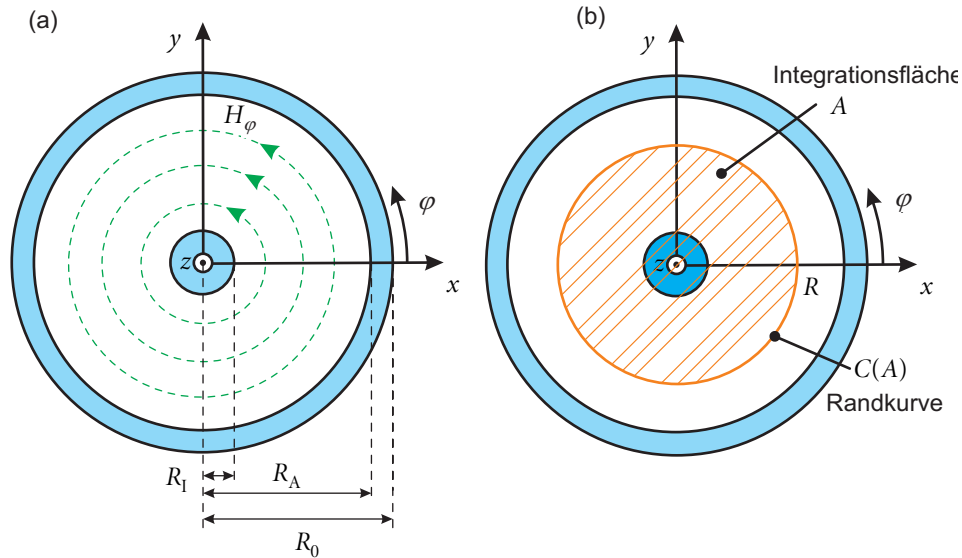
### a) Berechnung des magnetischen Feldes mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes

Das Durchflutungsgesetz lautet:

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A}. \quad (\text{B.8})$$

Zur Berechnung orientieren wir uns an der Geometrie in Bild B.6. Unsere anschauliche Erwartungshaltung für das magnetische Feld ist in Bild B.6a eingezeichnet: Wir erwarten ein in  $\varphi$ -Richtung umlaufendes magnetisches Feld, welches auf Kreisen um die z-Achse einen konstanten Wert aufweist. Andere Komponenten können aufgrund der Symmetrie nicht auftau-

chen. Als Fläche für die Integration wählen wir daher einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf der z-Achse.



**Bild B.6** Zur Berechnung des magnetischen Feldes einer in z-Richtung orientierten Koaxialleitung

Wir wollen bei der Berechnung vier Bereiche unterscheiden:

1. Im Inneren des Innenleiters ( $R \leq R_1$ )
2. Im Luftraum zwischen Innen- und Außenleiter ( $R_1 \leq R \leq R_A$ )
3. Im Inneren des Außenleiters ( $R_A \leq R \leq R_0$ )
4. Jenseits des Außenleiters ( $R \geq R_0$ )

Für die weitere Berechnung wird noch die Stromdichte  $J_I$  im Innenleiter und die Stromdichte  $J_A$  im Außenleiter benötigt. Die Stromdichten ergeben sich einfach als Quotient der Stromstärke und der Fläche, auf der sich der Strom gleichmäßig verteilt.

$$J_I = \frac{I}{\pi R_1^2} \quad (\text{B.9})$$

$$J_A = \frac{I}{\pi (R_0^2 - R_A^2)} \quad (\text{B.10})$$

### a1) Berechnung des Feldes im Innenleiter ( $R \leq R_1$ )

Das Durchflutungsgesetz lautet für den Gleichstromfall ( $\partial/\partial t = 0$ )

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Es fließt nur ein Teil des Stromes des Innenleiters durch die kreisförmige Integrationsfläche  $A$ . Mit  $d\vec{s} = \vec{e}_z$  und  $\vec{j} = J_1 \vec{e}_z = \text{const.}$  folgt

$$H_\varphi 2\pi R = \pi R^2 J_1 \quad . \quad (\text{B.12})$$

Das magnetische Feld lautet also:

$$\boxed{H_\varphi = \frac{J_1 R}{2} = \frac{IR}{2\pi R_1^2}} \quad \text{für } R \leq R_1. \quad (\text{B.13})$$

### a2) Luftraum zwischen Innen- und Außenleiter ( $R_1 \leq R \leq R_A$ )

Es fließt nun der Gesamtstrom  $I$  des Innenleiters durch die kreisförmige Integrationsfläche  $A$ . Aus dem Durchflutungsgesetz folgt:

$$H_\varphi 2\pi R = I \quad . \quad (\text{B.14})$$

Das magnetische Feld lautet also:

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{2\pi R} = \frac{J_1 R_1^2}{2R}} \quad \text{für } R_1 \leq R \leq R_A. \quad (\text{B.15})$$

### a3) Im Inneren des Außenleiters ( $R_A \leq R \leq R_0$ )

Der Strom durch die kreisförmige Integrationsfläche  $A$  setzt sich aus dem Gesamtstrom  $I$  des Innenleiters und einem Anteil des Rückstromes im Außenleiter zusammen. Aus dem Durchflutungsgesetz folgt:

$$\begin{aligned} H_\varphi 2\pi R &= I - \int_0^{2\pi} \int_{R_A}^{R_0} \vec{j}_A \cdot d\vec{A}_z \quad \text{mit} \quad d\vec{A}_z = R d\varphi dR \vec{e}_z \\ &= I - J_A 2\pi \int_{R_A}^{R_0} R dR = I - J_A 2\pi \left[ \frac{1}{2} R^2 \right]_{R_A}^{R_0} \\ &= I - J_A 2\pi \left[ \frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{2} R_A^2 \right] = I - \frac{I}{\pi R_0^2 - \pi R_A^2} [\pi R^2 - \pi R_A^2] \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Hieraus erhalten wir für das magnetische Feld

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{2\pi R} \left( 1 - \frac{R^2 - R_A^2}{R_0^2 - R_A^2} \right) = \frac{I}{2\pi R} \left( \frac{R_0^2 - R^2}{R_0^2 - R_A^2} \right)} \quad \text{für } R_A \leq R \leq R_0. \quad (\text{B.17})$$

**a4) Jenseits des Außenleiters ( $R \geq R_0$ )**

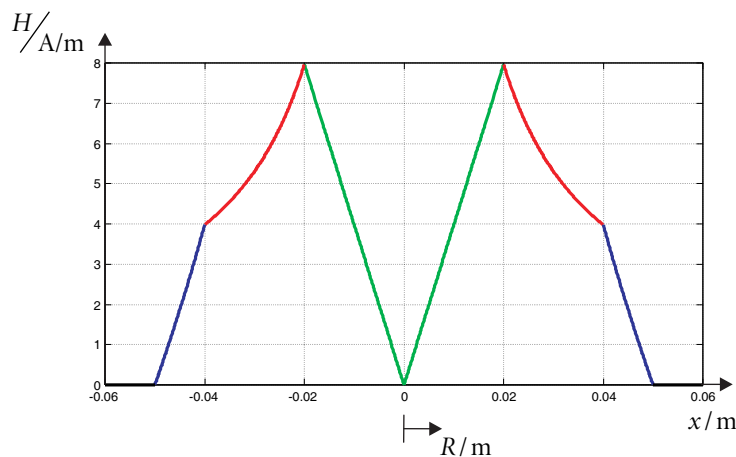
Der Strom durch die kreisförmige Integrationsfläche  $A$  setzt sich nun zusammen aus dem Gesamtstrom im Hin- und Rückleiter, ist also insgesamt Null. Das Durchflutungsgesetz liefert somit:

$$H_\varphi 2\pi R = 0 \quad , \quad (\text{B.18})$$

woraus sich ergibt

$$\boxed{H_\varphi = 0} \quad \text{für } R \geq R_0 \quad . \quad (\text{B.19})$$

Fügt man die Lösungen für die vier Bereiche zusammen, so ergibt sich in Abhängigkeit der radialen Variable  $R$  der in Bild B.7 gezeigte Verlauf für die  $\varphi$ -Komponente des magnetischen Feldes.



**Bild B.7** Magnetische Feldstärke  $H_\varphi$  als Funktion des Abstandes  $R$  von der  $z$ -Achse

**b) Berechnung der Induktivität eines Leitungsstückes der Länge  $\ell$** 

Die Induktivität  $L$  können wir nach unseren Überlegungen aus Abschnitt 2.1.2.3 mit Hilfe der magnetischen Feldenergie ermitteln.

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv = \frac{1}{2} L I^2 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{B.20})$$

Das Integral ist über den gesamten felderfüllten Raumbereich zu erstrecken. In Aufgabenteil a) haben wir vier Raumbereiche unterschieden, wobei der letzte Raumbereich (außerhalb der Koaxialleitung) feldfrei ist.

**b1) Auswertung des Integrals im Bereich des Innenleiters**

In Zylinderkoordinaten erhalten wir bei Integration über den felderfüllten Raum:

$$W_{m,l} = \int_0^{R_i} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{IR}{2\pi R_i^2} \right)^2 \underbrace{dz d\varphi R dR}_{dv} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{(2\pi)^2 R_i^4} \underbrace{\int_0^\ell dz}_{\ell} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{R_i} R^2 R dR}_0 = \frac{1}{4} R_i^4 \Big|_0^{R_i} = \frac{1}{4} R_i^4 \quad (\text{B.21})$$

Die magnetische Feldenergie wird somit:

$$W_{m,l} = \frac{1}{2} \mu_0 \ell \frac{I^2}{8\pi} = \frac{1}{2} L_I I^2 \quad (\text{B.22})$$

Hiermit ergibt sich Innere Induktivität des Innenleiters

$$\boxed{L_I = \frac{\mu_0}{8\pi} \ell} \quad (\text{Induktivitätsbeitrag Innenleiter}). \quad (\text{B.23})$$

### b2) Auswertung des Integrals im Luftraum zwischen Innen- und Außenleiter

In Zylinderkoordinaten erhalten wir bei Integration über den felderfüllten Raum:

$$W_m = \int_{R_i}^{R_a} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi R} \right)^2 \underbrace{dz d\varphi R dR}_{dv} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2}{(2\pi)^2} \underbrace{\int_0^\ell dz}_{\ell} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R^2} R dR}_{\ln R \Big|_{R_i}^{R_a} = \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)} \quad (\text{B.24})$$

Die magnetische Feldenergie wird somit:

$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \ell \frac{I^2}{2\pi} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) = \frac{1}{2} L_{\text{luff}} I^2 \quad (\text{B.25})$$

Hiermit ergibt sich der Induktivitätsbeitrag des Luftraumes zwischen Innen- und Außenleiter zu

$$\boxed{L_{\text{luff}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)} \quad (\text{Induktivitätsbeitrag Luftraum}). \quad (\text{B.26})$$

### b3) Auswertung des Integrals im Inneren des Außenleiters

In Zylinderkoordinaten erhalten wir bei Integration über den felderfüllten Raum:

$$W_{m,A} = \int_{R_A}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\ell \frac{1}{2} \mu_0 \left( \frac{I}{2\pi R} \left( \frac{R_0^2 - R^2}{R_0^2 - R_A^2} \right) \right)^2 \underbrace{dz d\varphi R dR}_{dv} \quad (\text{B.27})$$

Das Integral ist nun etwas aufwändiger auszuwerten.



$$W_{m,A} = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I^2 2\pi\ell}{(2\pi)^2 (R_0^2 - R_A^2)^2} \int_{R_A}^{R_0} \left[ \frac{R_0^4}{R^2} - 2R_0^2 R + R^3 \right] R dR \quad (\text{B.28})$$

$$R_0^4 \ln R \Big|_{R_A}^{R_0} - 2R_0^2 \frac{1}{2} R^2 \Big|_{R_A}^{R_0} + \frac{1}{4} R^4 \Big|_{R_A}^{R_0}$$

Hiermit ergibt sich – nach kurzer Zwischenrechnung – der Induktivitätsbeitrag des Außenleiterbereiches

$$L_A = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[ \frac{R_0^4}{(R_0^2 - R_A^2)^2} \ln \left( \frac{R_0}{R_A} \right) + \frac{R_A^2 - 3R_0^2}{4(R_0^2 - R_A^2)} \right] \quad (\text{Induktivitätsbeitrag Außenleiter}). \quad (\text{B.29.})$$

### Gesamtinduktivität

Die Gesamtinduktivität  $L_{\text{ges}}$  ergibt sich aus der Summe der Einzelanteile:

$$L_{\text{ges}} = L_I + L_{\text{Luft}} + L_A = L_{\text{Luft}} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[ \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right) + \frac{R_0^4}{(R_0^2 - R_A^2)^2} \ln \left( \frac{R_0}{R_A} \right) + \frac{R_A^2 - 3R_0^2}{4(R_0^2 - R_A^2)} \right]. \quad (\text{B.30})$$

### c) Berechnung der Induktivität im Hochfrequenzfall

Im Hochfrequenzfall fließt aufgrund des Skin效ektes der Strom auf der Außenseite des Innenleiters und auf der Innenseite des Außenleiters. Innen- und Außenleiter sind nahezu feldfrei, die Induktivitätsbeiträge von Innen- und Außenleiter verschwinden. Im Hochfrequenzfall gilt daher für die Induktivität:

$$L_{\text{HF}} = L_{\text{Luft}} < L_{\text{ges}}. \quad (\text{B.31})$$

## B.3 Lösung der Übungsaufgabe 2.3

### a) Amplitude des Vektors der elektrische Feldstärke

Für den Feldwellenwiderstand im Medium gilt

$$Z_F = \frac{E_0}{H_0}. \quad (\text{B.32})$$

Die Amplitude des Vektors der elektrischen Feldstärke berechnen wir daher zu

$$E_0 = Z_F H_0 = 1200 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \quad (\text{B.33})$$

**b) Berechnung der dielektrischen Dielektrizitätszahl**

Für den Feldwellenwiderstand im dielektrischen Medium gilt

$$Z_F = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{\epsilon_r}} . \quad (\text{B.34})$$

Daraus berechnen wir für die relative Dielektrizitätszahl

$$\epsilon_r = \left( \frac{Z_{F0}}{Z_F} \right)^2 = \left( \frac{377 \Omega}{300 \Omega} \right)^2 = 1,5792 . \quad (\text{B.35})$$

**c) Berechnung der Wellenzahl**

Für die Wellenzahl gilt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (\text{B.36})$$

Mit der Lichtgeschwindigkeit

$$c = \lambda f = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (\text{B.37})$$

erhalten wir

$$k = \frac{2\pi}{c_0} f \sqrt{\epsilon_r} = 1,316 \frac{1}{\text{m}} . \quad (\text{B.38})$$

**d) Berechnung der Ausbreitungsgeschwindigkeit**

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit erfolgt direkt

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2,387 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (\text{B.39})$$

**B.4 Lösung der Übungsaufgabe 2.4****a) Berechnung des Feldes im Innern der Spule**

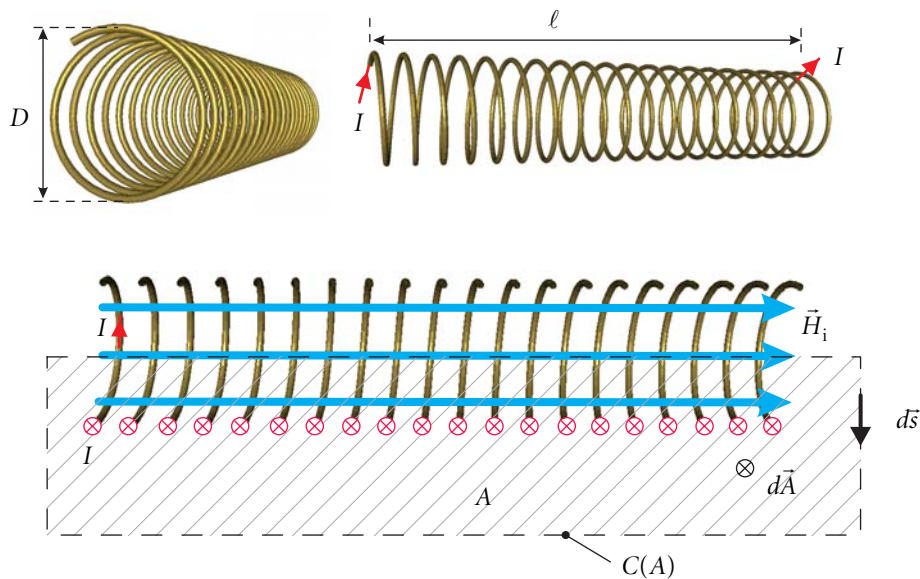
Das Durchflutungsgesetz für den zeitunabhängigen Fall lautet

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{A} . \quad (\text{B.40})$$

Es soll von folgender Vereinfachung ausgegangen werden:

- Das Feld  $H_i$  innerhalb der Spule sei konstant.
- Das Feld  $H_a$  außerhalb der Spule verschwinde ( $H_a = 0$ ).

Legt man die Hand um den gewickelten, stromdurchflossenen Leiter, so gelangt man zu der Vorstellung, dass das magnetische Feld  $H_i$  innerhalb der Spule in axialer Richtung verläuft (Bild B.8).



**Bild B.8** Verlauf des magnetischen Feldes in einer langgestreckter Zylinderspule

Wenn wir mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes das magnetische Feld berechnen wollen, müssen wir einen Integrationsweg  $C(A)$  finden, auf dem das magnetische Feld konstant – und möglichst in Wegrichtung orientiert – ist. Wir wählen den in Bild B.8 eingezeichneten Weg  $C(A)$ . Mit dem Weg ist sogleich auch die schraffierte Fläche  $A$  festgelegt. Umlaufsinn des Integrationsweges  $C(A)$  und Flächennormale  $d\vec{A}$  sind über die Rechte-Hand-Regel miteinander verknüpft.

Unter der Annahme eines konstanten Feldes liefert die linke Seite des Durchflutungsgesetzes daher:

$$\oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_i \ell . \quad (\text{B.41})$$

Die schraffierte Fläche  $A$  wird  $n$ -mal vom Strom durchflossen (einmal je Windung). Die rechte Seite des Durchflutungsgesetzes wird somit:

$$\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = n \cdot I . \quad (\text{B.42})$$

Für das magnetische Feld im Innern der Spule erhalten wir:

$$\boxed{H_i = \frac{nI}{\ell}}. \quad (\text{B.43})$$

### b) Berechnung der magnetischen Feldenergie

Bei Kenntnis des magnetischen Feldes können wir die magnetische Feldenergie bestimmen.

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{B.44})$$

Das Integral ist über den gesamten felderfüllten Raumbereich – also das Innere der Spule – zu erstrecken. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} W_m &= \iiint_V \frac{1}{2} \mu_0 H_i^2 \, dv = \frac{1}{2} \mu_0 H_i^2 \underbrace{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}_{\text{Querschnittsfläche } A_Q} \ell \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n^2 I^2}{\ell^2} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \ell = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n^2 I^2}{\ell} \underbrace{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}_{\text{Querschnittsfläche } A_Q}. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

### c) Berechnung der Induktivität

Die Induktivität  $L$  können wir nach unseren Überlegungen aus Abschnitt 2.1.2.3 mit Hilfe der magnetischen Feldenergie ermitteln.

$$W_m = \iiint_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dv = \frac{1}{2} LI^2 \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{B.46})$$

Mit dem Ergebnis aus Aufgabenpunkt b)

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{n^2 I^2}{\ell} \underbrace{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}_{\text{Querschnittsfläche } A_Q} \quad (\text{B.47})$$

berechnen wir die Induktivität zu:

$$L = \mu_0 \frac{n^2}{\ell} \underbrace{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}_{\text{Querschnittsfläche } A_Q} = \mu_0 \frac{n^2 A_Q}{\ell}. \quad (\text{B.48})$$

## B.5 Lösung der Übungsaufgabe 2.5

### a) Berechnung der magnetischen Feldstärke

Gegeben ist der Vektor der elektrischen Feldstärke

$$\vec{E}(x) = E_0 e^{-jkx} \vec{e}_z. \quad (\text{B.49})$$

Über die zweite Maxwellsche Gleichung

$$\text{rot } \vec{E} = -j\omega \vec{B} = -j\omega \mu \vec{H} \quad \text{mit} \quad \mu = \mu_0 \mu_r \quad (\text{B.50})$$

soll die magnetische Feldstärke berechnet werden.

Die Rotation (siehe Anhang A) können wir in kartesischen Koordinaten folgendermaßen schreiben:

$$\text{rot } \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z. \quad (\text{B.51})$$

Die elektrische Feldstärke besitzt nur eine z-Komponente und ist nur von der Variablen x abhängig. Der Ausdruck vereinfacht sich daher zu:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_y = jk E_0 e^{-jkx} \vec{e}_y = -j\omega \mu \vec{H}. \quad (\text{B.52})$$

Das magnetische Feld lautet damit

$$\vec{H} = -\frac{k}{\omega \mu} E_0 e^{-jkx} \vec{e}_y. \quad (\text{B.53})$$

Wir können nun das Ergebnis unter Verwendung von Gleichung (2.83) und Gleichung (2.88) umschreiben, da gilt

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad \text{und} \quad Z_F = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}}. \quad (\text{B.54})$$

Wir erhalten:

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mu} \sqrt{\epsilon \mu} E_0 e^{-jkx} \vec{e}_y = -\underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}}_{1/Z_F} E_0 e^{-jkx} \vec{e}_y = -\underbrace{\frac{E_0}{Z_F}}_{H_0} e^{-jkx} \vec{e}_y. \quad (\text{B.55})$$

Dies entspricht dem Ergebnis in Gleichung (2.86).

### b) Berechnung der durch die Fläche $A = 1 \text{ m}^2$ gehenden Leistung

Die Strahlungsleistungsdichte ergibt sich durch den Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{2} E_0 H_0 \vec{e}_x = \frac{1}{2Z_F} E_0^2 \vec{e}_x. \quad (\text{B.56})$$

Die durch eine Fläche von  $A = 1 \text{ m}^2$  laufende Wirkleistung erhalten wir durch Integration des Poynting-Vektors über diese Fläche.

$$P_W = S \cdot A = \frac{1}{2Z_F} E_0^2 A \quad (\text{B.57})$$

-

[http://www.fh-dortmund.de/gustrau\\_hochfrequenztechnik](http://www.fh-dortmund.de/gustrau_hochfrequenztechnik)

(Stand: 12.02.2011)