

10. Ausgleichsvorgänge, Schaltvorgänge	169
10.1. Einleitung	169
10.1.1. Problemstellung	169
10.1.2. Extrakt: Praktische Lösung von linearen DGLn im Zeitbereich	170
10.1.3. Extrakt: Praktische Lösung von linearen DGLn mit Hilfe der Laplace-Transformation	171
10.1.4. Laplace-transformierte Widerstände	173
10.2. Schalten von Gleichspannungsquellen	173
10.2.1. Entladen eines Kondensators	173
10.2.2. Aufladen eines Kondensators	175
10.2.3. Einschalten einer Induktivität	177
10.2.4. Ausschalten einer Induktivität	179
10.2.5. Einschalten eines Netzwerkes mit mehreren R und einem Energiespeicher (L oder C)	182
10.2.6. Einschalten von R, L, C (Reihenschwingkreis)	204
10.3. Schalten von Wechselspannungsquellen	209
10.3.1. Prinzip	209
10.3.2. Schema	210
10.3.3. Beispiel: Einschalten R, L	211
10.3.4. Beispiel: Einschalten R, C	214
10.3.5. Optimales Einschalten	215
10.3.6. Aufgabe zu Abschnitt 10.3	215
10.4. Mehrere Quellen im Kreis	216
10.5. Netzwerke mit mehreren L und C	219

10. Ausgleichsvorgänge, Schaltvorgänge

10.1. Einleitung

10.1.1. Problemstellung

In den Kapiteln 2 und 3 (1. Semester) wurden Gleichstromkreise ohne Energiespeicher (kein L, kein C) nur mit ohmschen Widerständen R berechnet. Im Kap. 2 wurden einfache Gleichstromkreise und im Kap. 3 vermaschte Gleichstromkreise behandelt.

Im Kap. 6 (2. Semester) erfolgte mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung die Analyse von vermaschten Wechselstromnetzen mit Widerständen R, Induktivitäten L und Kapazitäten C. Dabei wurde nur der eingeschwungene Zustand berechnet, der den Übergang beim Einschalten nicht berücksichtigt.

In diesem Abschnitt soll das Einschalten von Quellen behandelt werden:

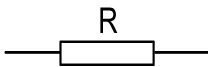

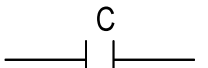
1. Gleichspannungsquellen
2. Wechselspannungsquellen

Die schon zur Behandlung von Gleich- und Wechselstromnetzen bekannten Verfahren und Gesetze:

- Maschenumlauf
- Knotenpunktregel
- komplexes Ohmsches Gesetz
- Netzwerksberechnungsmethoden

sollen auf Einschaltvorgänge erweitert werden.

Die folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang zwischen Strom i und Spannung u an den drei Elementen Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C. Die Gleichungen für den Zeitbereich und für die komplexe Wechselstromrechnung sind schon bekannt. Die Laplace-Transformation lässt sich durch den Übergang von $j\omega$ nach p erklären. In der folgenden Tabelle sind durch Ersetzen von $j\omega$ durch p die Laplace-Transformierten Widerstände schon eingetragen. Der Beweis dieser Maßnahme erfolgt in Kap. 10.1.4.

Element	Zeitbereich	komplex	Laplace
	$u = i \cdot R$	$\underline{Z}(j\omega) = R$	$Z(p) = R$
	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L$	$Z(p) = pL$
	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$	$Z(p) = \frac{1}{pC}$

Die Netzwerkanalyse mit Hilfe schon bekannter Regeln ergibt mit den Zusammenhängen an L und C die zeitliche Ableitung von physikalischen Größen in den Gleichungen, diese werden bekanntlich Differentialgleichungen (DGLn) genannt. **Die Netzwerkanalyse ergibt lineare DGLn mit konstanten Koeffizienten.**

Aus der Mathematik sind für die Lösung von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten zwei Standardmethoden bekannt:

- Lösung im Zeitbereich
- Laplace Transformation

Zusätzlich sollen in diesem Abschnitt noch Methoden erläutert werden, mit der der Praktiker mit weniger Aufwand eine Lösung erhält:

- Bei nur einem Energiespeicher (L, C) im Kreis kann ein vereinfachtes Verfahren angegeben werden, siehe Abschnitt 10.2.5.5.
- Bei Wechselstromnetzen wurde ein Gleichungssystem in $j\omega$ mit Zahlenwerten gelöst, hier muss ein Gleichungssystem in p allgemein gelöst werden.

In der Mathematik wird das Lösen von DGLn gezeigt. Hier ist auch das Aufstellen der DGL gefordert. Es werden auch Tips zur vereinfachten Lösung gegeben.

Die Lösung einer inhomogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten ergab sich aus der Addition von homogener und spezieller Lösung. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die homogene Lösung den Übergangsvorgang nach dem Schalten beschreibt und für $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Bei Schalten von Gleichspannungsquellen ist die spezielle Lösung, die Lösung für $t \rightarrow \infty$ oder für Gleichstrom (C offen, L kurzschließen), siehe Kap. 10.2. Bei Schalten von Wechselspannungsquellen ist die spezielle Lösung der Zeitverlauf, der sich mit Hilfe der komplexen Rechnung ermitteln lässt, Beweis Kap. 10.3.

$$\begin{array}{lcl} y(t) & = & y_{\text{hom}}(t) & + & y_{\text{spe}} \\ \text{Lösung des Schaltvorgangs} & = & \text{Ausgleichsvorgang} & + & \text{Lösung für } t \rightarrow \infty \end{array}$$

Da die Lösung von linearen DGLn mit konstanten Koeffizienten in diesem Kapitel häufig benötigt wird, erfolgt in den nächsten zwei Abschnitten die Wiederholung der wichtigsten Regeln der Methode im Zeitbereich und der Laplace Transformation.

10.1.2. Extrakt: Praktische Lösung von linearen DGLn im Zeitbereich

Die Lösung der homogenen DGL

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \quad (10.1)$$

erfolgt durch Überführen der obigen DGL in Polynom in λ :

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (10.2)$$

Die Nullstellen des oberen Polynoms ergeben n-Lösungen:

$$\lambda_{01}, \lambda_{02}, \dots, \lambda_n$$

Für eine einfach reelle Nullstelle λ_{0i} erfolgt der Teilansatz:

$$y_{\text{hom},i} = c_i * e^{\lambda_{0i} t} \quad (10.3)$$

Für eine doppelt reelle Nullstelle $\lambda_{0i} = \lambda_{0i+1}$ erfolgt der Teilansatz:

$$y_{\text{hom},i,i+1} = c_i * e^{\lambda_{0i} t} + c_{i+1} * t * e^{\lambda_{0i} t} \quad (10.4)$$

Für eine konjugiert komplexe Nullstelle $\lambda_{0i,i+1} = -1/T_i \pm j\omega_i$ erfolgt der Ansatz:

$$y_{\text{hom},i,i+1} = e^{-t/T_i} \left[c_i * \cos(\omega_i t) + c_{i+1} * \sin(\omega_i t) \right]$$

Zur gesamten homogenen Lösung müssen alle Teilansätze addiert werden.

Danach müsste dann die spezielle Lösung bestimmt werden. Der Mathematiker bestimmt diese mit Hilfe eines Ansatzes der in die gesamte DGL eingesetzt wird. Die Bestimmung der speziellen Lösung in der Elektrotechnik ist etwas einfacher, wie in Abschnitt 10.2 für das Schalten von Gleichspannungsquellen und in Abschnitt 10.3 für das Schalten von Wechselspannungsquellen gezeigt wird.

Die homogene Lösung und die spezielle Lösung werden addiert:

$$y(t) = y_{\text{hom}} + y_{\text{sp}}$$

Zum Schluss werden die n frei wahlbaren Konstanten c_i der homogenen Lösung mit Hilfe der n Anfangsbedingungen bestimmt.

Lösung 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{T} y = 0 \quad \lambda + \frac{1}{T} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{T}$$

$T \frac{dy}{dt} + y = 0$	=>	$y_{\text{hom}} = c_1 * e^{-t/T}$	(10.5)
$T \frac{dy}{dt} + y = A$	=>	$y = (y_0 - A) * e^{-t/T} + A$	

10.1.3. Extrakt: Praktische Lösung von linearen DGLn mit Hilfe der Laplace-Transformation

A] Transformation von einzuschaltenden Quellen

A1] Transformation einer einzuschaltenden Gleichspannungsquelle

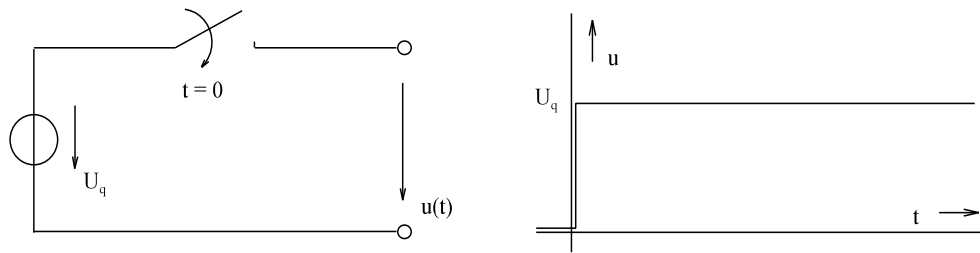


Bild EG1013A

$u(t)$ $\circ \text{-----} \bullet$ $U(p)$ $u(t) = U_q * s(t)$ $\circ \text{-----} \bullet$ $U(p) = \frac{U_q}{p}$

A2] Transformation einer Wechselspannungsquelle (Kosinus-Funktion)

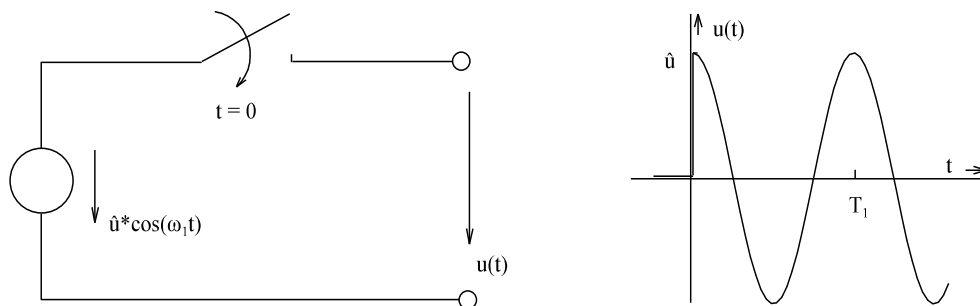


Bild EG1013B

$\omega_1 = 2\pi/T_1$ $u(t) = \hat{u} * \cos(\omega_1 t) * s(t)$ $\circ \text{-----} \bullet$ $U(p) = \hat{u} * \frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$

A3] Transformation einer Wechselspannungsquelle (Sinus-Funktion)

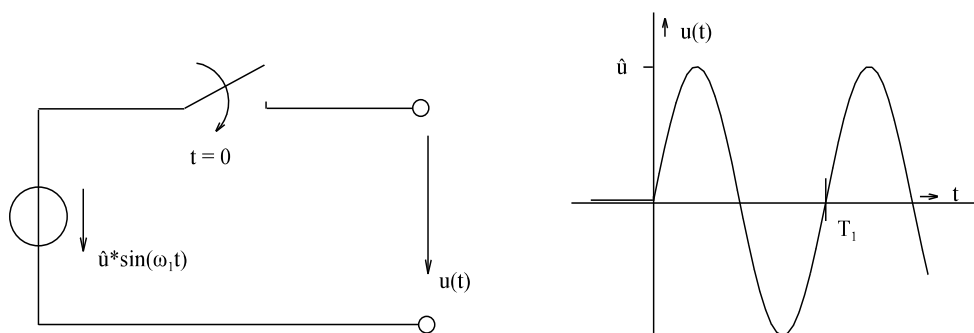


Bild EG1013B

$\omega_1 = 2\pi/T_1$ $u(t) = \hat{u} * \sin(\omega_1 t) * s(t)$ $\circ \text{-----} \bullet$ $U(p) = \hat{u} * \frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$

B) Transformation von y und dessen Ableitung

$y(t)$	<input type="radio"/> ----- <input checked="" type="radio"/>	$Y(p)$
$\frac{dy}{dt}$	<input type="radio"/> ----- <input checked="" type="radio"/>	$p*Y(p) - y_0$
$\frac{d^2y}{dt^2}$	<input type="radio"/> ----- <input checked="" type="radio"/>	$p^2 * Y(p) - p*y_0 - y_0'$
$\frac{d^3y}{dt^3}$	<input type="radio"/> ----- <input checked="" type="radio"/>	$p^3 * Y(p) - p^2 * y_0 - p*y_0' + y_0''$
$\frac{d^4y}{dt^4}$	<input type="radio"/> ----- <input checked="" type="radio"/>	$p^4 * Y(p) - p^3 * y_0 - p^2 * y_0' - p*y_0'' + y_0'''$

C) Transformation der gesamten DGL**D) Nach Y(p) auflösen und Partialbruchzerlegung durchführen****E) Rücktransformation mit Tabelle**

$y(t)$	$Y(p)$
$1 = s(t)$	$\frac{1}{p}$
$t = t*s(t) = r(t)$	$\frac{1}{p^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_1^2}$
$\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{p^2 + \omega_1^2}$
$1 - e^{-t/T}$	$\frac{1}{p*(1+Tp)}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$
$t*e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$e^{-at}*\cos(\omega_1 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at}*\sin(\omega_1 t)$	$\frac{\omega_1}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$\cos(\omega_1 t + \varphi)$	$\frac{p*\cos(\varphi) - \omega_1*\sin(\varphi)}{p^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at}*\cos(\omega_1 t + \varphi)$	$\frac{(p+a)*\cos(\varphi) - \omega_1*\sin(\varphi)}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$
$e^{-at} \left[\cos(\omega_1 t) + \frac{b-a}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right]$	$\frac{p+b}{(p+a)^2 + \omega_1^2}$

10.1.4. Laplace-transformierte Widerstände

A] Ohmscher Widerstand R

$$u = R \cdot i \quad \circ \text{-----} \bullet$$

$$U(p) = R \cdot I(p)$$

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = R$$

$$\boxed{Z(p) = R}$$

B] Induktivität L

$$u = L \cdot \frac{di}{dt} \quad \circ \text{-----} \bullet$$

$$U(p) = L \cdot p \cdot I(p) - L \cdot i_0$$

Mit $i(t=0) = i_0 = 0$ ergibt sich

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = p \cdot L$$

$$\boxed{Z(p) = p \cdot L}$$

C] Kapazität C

$$i = C \cdot \frac{du}{dt} \quad \circ \text{-----} \bullet$$

$$I(p) = C \cdot p \cdot U(p) - C \cdot u_0$$

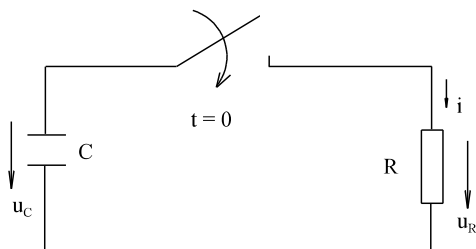
Mit $u(t=0) = u_0 = 0$ ergibt sich

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = \frac{1}{pC}$$

$$\boxed{Z(p) = \frac{1}{pC}}$$

10.2. Schalten von Gleichspannungsquellen

10.2.1. Entladen eines Kondensators



gegeben: Anordnung nach Bild EG1021A

$$u_C(t=0) = u_{C0} = 20V$$

$$C = 0.1 \mu F$$

$$R = 20 k\Omega$$

gesucht:

$$u_C(t), u_R(t), i(t)$$

Bild EG1021

Lösung: Entscheidung: DGL für $u_C(t)$ aufstellen. Der Strom wird ersetzt durch:

$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

Das Minus-Zeichen der oberen Gleichung ist notwendig, weil u_C und i in verschiedenen Richtungen zeigen.

$$u_C = u_R = R \cdot i = -R \cdot C \frac{du_C}{dt}$$

$$T = R \cdot C$$

$$u_C + T \frac{du_C}{dt} = 0$$

Die obere DGL muss gelöst werden. Es sollen im Rahmen dieses Kapitels verschiedene Lösungsmethoden angewandt werden. Die Trennung der Variablen ergibt:

$$u_C = -T \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{T}$$

$$\ln(u_C) - \ln(c_1) = -\frac{t}{T}$$

$$\ln\left(\frac{u_C}{c_1}\right) = -\frac{t}{T}$$

$$\frac{u_C}{c_1} = e^{-t/T}$$

$$u_C = c_1 * e^{-t/T} \quad (\text{Lösung der DGL})$$

Anfangsbedingung auswerten:

$$u_C(t=0) = u_{C0} = c_1$$

$$u_C = u_{C0} * e^{-t/T}$$

$$i = -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{-1}{T} * u_{C0} * e^{-t/T} = \frac{C}{R * C} * u_{C0} * e^{-t/T}$$

$$i = \frac{u_{C0}}{R} * e^{-t/T}$$

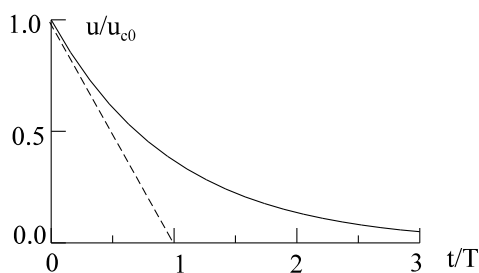


Bild EG1021B

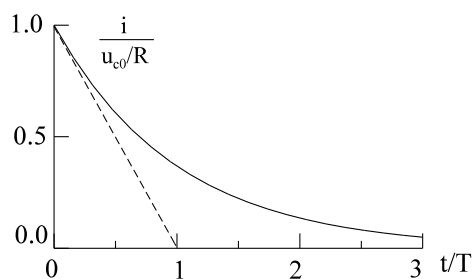


Bild EG1021C

Der allgemeine Zeitverlauf der Größen u_C und i beim Entladen eines Kondensators ist in den Bildern EG1021B und EG1021C dargestellt. Er kann mit Hilfe der Tangente konstruiert werden.

Zusammenfassung: Entladung Kondensator	
$T = R * C$	- Zeitkonstante
$u_C(t) = u_C(t=0) * e^{-t/T}$	
$i(t) = \frac{u_C(t=0)}{R} * e^{-t/T}$	

Kommentar zum Ergebnis:

Der Praktiker berechnet die Entladung eines Kondensators nicht mit Hilfe der Lösung einer DGL, sondern benutzt obere Formeln. Die DGL der Entladung eines Kondensators war eine homogene. Es ergibt sich auch nur eine homogene Lösung, die für $t \rightarrow \infty$ verschwindet. Es kann auch keine spezielle Lösung vorhanden sein, weil der Kondensator für $t \rightarrow \infty$ entladen ist. Aus den Zeitverläufen ist zu erkennen: Es gibt für jede Größe einen Anfangswert für $t = 0$ und einen Endwert für $t \rightarrow \infty$. Der Übergang erfolgt mit einer e-Funktion. Die Tangente der e-Funktion kann mit Hilfe der Zeitkonstanten bei $t = 0$ konstruiert werden.

Zahlenwertmäßige Berechnung des oberen Beispiels:

Mit den Formeln der Zusammenstellung ergibt sich:

$$T = R * C = 20 * 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}} * 0.1 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 2 \text{ ms}$$

$$u_{C0} = 20 \text{ V}$$

$$\frac{u_{C0}}{R} = \frac{20 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega} = 1 \text{ mA}$$

$$u_C(t) = 20 \text{ V} * e^{-t/2\text{ms}}$$

$$i(t) = 1 \text{ mA} * e^{-t/2\text{ms}}$$

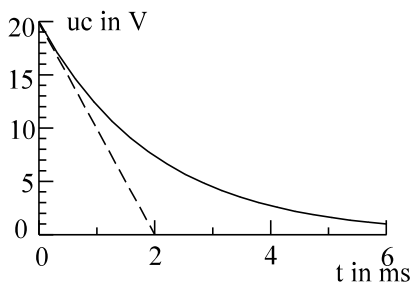


Bild EG1021D

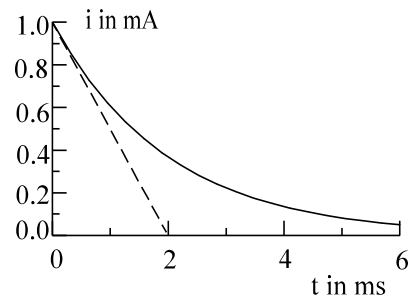
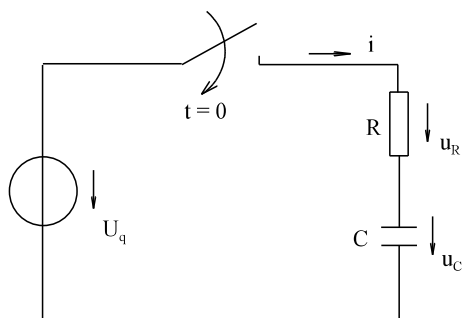


Bild EG1021E

10.2.2. Aufladen eines Kondensators**gegeben:**

Anordnung nach Bild EG1022A

$$U_q = 10 \text{ V}$$

$$C = 10 \text{ nF}$$

$$R = 50 \text{ k}\Omega$$

a) $u_C(t=0) = u_{C0} = 0$

b) $u_C(t=0) = u_{C0} = 3 \text{ V}$

gesucht:

$$u_C(t), u_R(t), i(t)$$

Bild EG1022A

Lösung:

Maschenumlauf: $U_q = u_R + u_C$

DGL für Variable: u_C

i - ersetzen: $i = C * \frac{du_C}{dt}$

u_R ersetzen: $u_R = R * i = R * C * \frac{du_C}{dt}$

Einsetzen in (A): $U_q = R * C * \frac{du_C}{dt} + u_C$

DGL: $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R * C} = \frac{U_q}{R * C}$

Homogene Lösung:

Aufstellen des Polynoms in λ aus der DGL:

$$\lambda + \frac{1}{R * C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{R * C}$$

$$u_{\text{Chom}} = c_1 * e^{t\lambda} = c_1 * e^{-t/(R * C)} = c_1 * e^{-t/T}$$

$$T = R * C$$

(A)

Spezielle Lösung:

In der Mathematik erfolgt für die spezielle Lösung ein Ansatz. Bei linearen Netzwerken kann die spezielle Lösung den Zustand für $t \rightarrow \infty$ entnommen werden. Nach Bild EG1022A ist für $t \rightarrow \infty$ der Kondensator auf die Quellspannung U_q aufgeladen:

$$U_{\text{cspe}} = U_q$$

Gesamte Lösung:

$$u_C(t) = u_{\text{Chom}} + u_{\text{Cspe}} = c_1 * e^{-t/T} + U_q$$

Anfangsbedingung auswerten:

$$u_C(t=0) = c_1 + U_q = u_{C0}$$

$$c_1 = u_{C0} - U_q$$

$$u_C(t) = (u_{C0} - U_q) * e^{-t/T} + U_q$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_{C0} - U_q}{-T} * e^{-t/T} = C \frac{U_q - u_{C0}}{R * C} * e^{-t/T}$$

$$i(t) = \frac{U_q - u_{C0}}{R} * e^{-t/T}$$

$$u_R(t) = R * i(t) = (U_q - u_{C0}) * e^{-t/T}$$

Zusammenfassung: Aufladung Kondensator	
$T = R * C$	
$u_C(t) = U_q - (U_q - u_{C0}) * e^{-t/T}$	
$u_R(t) = (U_q - u_{C0}) * e^{-t/T}$	
$i(t) = \frac{U_q - u_{C0}}{R} * e^{-t/T}$	

Lösung a: Aufladen eines ungeladenen Kondensators ($u_{C0} = 0$)

$$u_C = U_q(1 - e^{-t/T})$$

$$u_R = U_q * e^{-t/T}$$

$$i(t) = \frac{U_q}{R} * e^{-t/T}$$

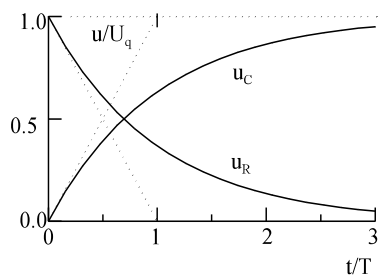


Bild EG1022B

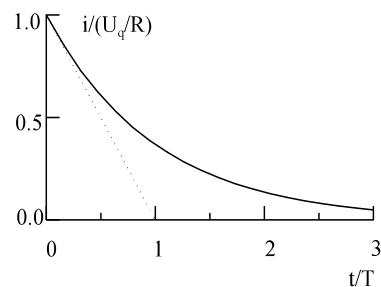


Bild EG1022C

Lösung b: Aufladen eines geladenen Kondensators ($u_{C0} \neq 0$)

$$U_q = 10 \text{ V}, \quad u_{C0} = 3 \text{ V},$$

$$R = 50 \text{ k}\Omega, \quad C = 10 \text{ nF}$$

$$U_q - u_{C0} = 7 \text{ V}$$

$$\frac{U_q - u_{C0}}{R} = \frac{7 \text{ V}}{50 \text{ k}\Omega} = 0.14 \text{ mA}$$

$$T = R * C = 50 * 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}} * 10 * 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 0.5 \text{ ms}$$

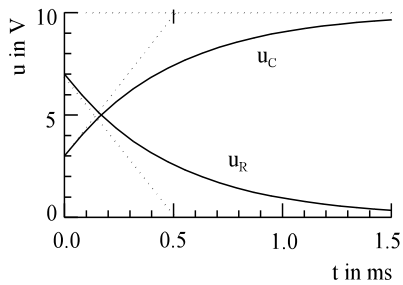


Bild EG1022D

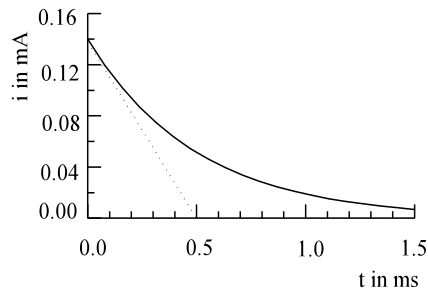


Bild EG1022E

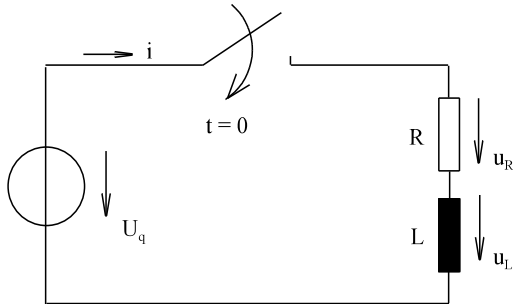
Kommentar zu den Ergebnissen der Bilder EG1022B bis EG1022E

Jede dargestellte Größe verläuft in Form einer e-Funktion mit der gleichen Zeitkonstanten von einem Anfangswert zu einem Endwert. Jede e-Funktion lässt sich leicht mit Hilfe der Tangente aus Anfangswert, Endwert und Zeitkonstante skizzieren. Die Zeitkonstante beträgt $T = R \cdot C$. Anfangswerte und Endwerte lassen sich auch aus physikalischen Überlegungen heraus bestimmen. Da eine Energie sich nicht sprungförmig ändern kann ($W = \frac{1}{2}Cu^2$), ist der Verlauf der Spannung am Kondensator stetig.

Beim **ungeladenen Kondensator** ($u_{C0} = 0$, Bild EG1022B und EG1022C) ist der Anfangswert der Kondensatorspannung Null. Der Endwert ist der Wert im aufgeladenen Zustand. Der Kondensator lädt sich nach Bild EG1022B auf die Quellspannung U_q auf. Die Differenz der Spannung U_q und der Spannung u_c fällt am Widerstand ab. Am Anfang fällt die gesamte Quellspannung an u_R ab, während u_R am Ende des Ladevorgangs Null ist. Der Strom i ist nach dem ohmschen Gesetz proportional zu u_R . Der Maximalwert bei $t = 0$ beträgt U_q/R . Am Ende des Ladevorgangs wird der Strom Null.

Beim Laden eines schon etwas **geladenen Kondensators** ($u_{C0} \neq 0$, Bilder EG1022D und EG1022E) verändert sich die Kondensatorspannung von am Anfang u_{C0} auf den Wert der Quellspannung am Ende des Ladevorgangs. Damit verändert sich die Differenz $u_R = U_q - u_c$ von am Anfang $U_q - u_{C0}$ auf Null am Ende des Ladevorgangs. Der Strom ist wieder proportional u_R mit der $(U_q - u_{C0})/R$ am Anfang und Null am Ende.

10.2.3. Einschalten einer Induktivität



gegeben: Anordnung nach Bild EG1023A

$$U_q = 220 \text{ V}$$

$$L = 0.3 \text{ H}$$

$$R = 50 \text{ } \Omega$$

gesucht: $u_L(t)$, $u_R(t)$, $i(t)$

Bild EG1023A

Lösung:

Maschenumlauf:

$$U_q = u_R + u_L \quad (\text{A})$$

DGL für Variable:

$$u_R = R \cdot i$$

u_R ersetzen durch i :

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

u_L ersetzen durch i :

Einsetzen in (A):

$$U_q = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

DGL:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = \frac{U_q}{R}$$

Homogene Lösung:

Aus dem Vergleich des homogenen Teils der oberen DGL:

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di}{dt} + i = 0$$

mit (10.5)

$$T \frac{dy}{dt} + y = 0 \Rightarrow y_{\text{hom}} = c_1 * e^{-t/T}$$

ergibt sich:

$$i_{\text{hom}} = c_1 * e^{-t/T} \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{R}$$

Spezielle Lösung:

Für $t \rightarrow \infty$ tritt an der Induktivität keine Spannung mehr auf, weil keine Änderung des Stromes mehr vorhanden ist, die gesamte Spannung U_q fällt für $t \rightarrow \infty$ nach Bild EG1023A am Widerstand R ab. Damit ergibt sich die spezielle Lösung zu:

$$i_{\text{spe}} = \frac{U_q}{R}$$

Gesamte Lösung:

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{spe}} = c_1 * e^{-t/T} + \frac{U_q}{R}$$

Anfangsbedingung auswerten:

Für den Bereich $t < 0$ ergibt sich aus Bild EG1023A, dass der Strom $i = 0$ ist. Da die Energie einer Induktivität ($W = \frac{1}{2}Li^2$) sich nicht sprunghaft ändern kann, ist der Anfangswert des Stromes Null:

$$i(t=0) = 0 = c_1 + \frac{U_q}{R} \Rightarrow c_1 = -\frac{U_q}{R}$$

$$i(t) = \frac{U_q}{R} * (1 - e^{-t/T})$$

$$u_R(t) = R * i(t) = U_q (1 - e^{-t/T})$$

$$u_L(t) = L * \frac{di}{dt} = U_q - u_R = U_q * e^{-t/T}$$

Zusammenfassung: Einschalten Induktivität
$T = L/R$
$i(t) = \frac{U_q}{R} * (1 - e^{-t/T})$
$u_R(t) = U_q (1 - e^{-t/T})$
$u_L(t) = U_q * e^{-t/T}$

Zahlenwerte: $T = \frac{L}{R} = \frac{0.3 \text{ AS/V}}{50 \text{ V/A}} = 6 \text{ ms}$ $\frac{U_q}{R} = \frac{220 \text{ V}}{50 \Omega} = 4.4 \text{ A}$

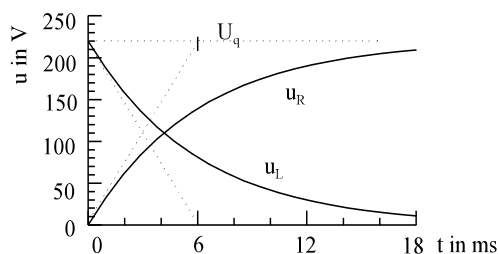


Bild EG1023B

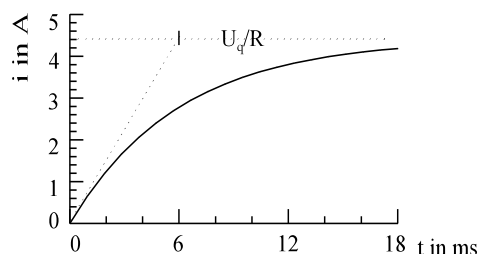
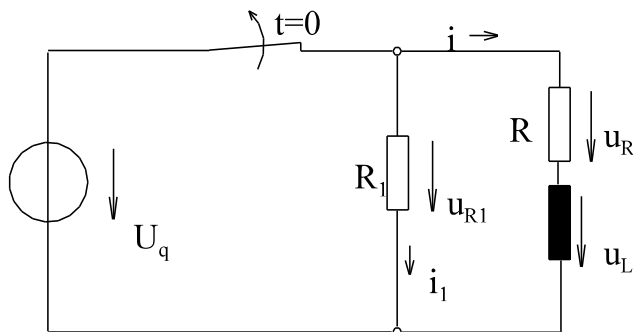


Bild EG1023C

Kommentar zu den Ergebnissen der Bild EG1022B bis EG1022C

Auch hier verändert sich jede Größe in Form einer e-Funktion mit der Zeitkonstante $T = L/R$ von einem Anfangswert zu einem Endwert. Der Anfangswert des Stromes ist Null. Für $t \rightarrow \infty$ tritt keine zeitlich Änderung mehr auf, die Spannung an L ist Null. Damit ist der Endwert des Stromes durch U_q und R nach dem ohmschen Gesetz bestimmt. Da am Anfang kein Strom fließt, ist der Anfangswert u_R auch Null. Zum Schluß liegt die gesamte Spannung U_q an R. Die Spannung u_L übernimmt am Anfang die gesamte Quellspannung, am Ende ist u_L Null.

10.2.4. Ausschalten einer Induktivität



gegeben: Anordnung nach Bild EG1024A

$$U_q = 12 \text{ V}$$

$$L = 0.12 \text{ H}$$

$$R_1 = 40 \text{ } \Omega$$

$$R = 10 \text{ } \Omega$$

gesucht: $u_L(t)$, $u_R(t)$, $i(t)$, $u_{R1}(t)$

Bild EG1024A

Lösung:

$$\text{Maschenumlauf: } u_{R1} = u_R + u_L \quad (\text{A})$$

DGL für Variable:

$$u_R \text{ ersetzen durch } i:$$

$$i$$

$$u_R = R \cdot i \quad (\text{B})$$

$$u_L \text{ ersetzen durch } i:$$

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt} \quad (\text{C})$$

$$u_{R1} \text{ ersetzen durch } i_1:$$

$$u_{R1} = R_1 \cdot i_1 \quad (\text{D})$$

$$i_1 \text{ durch } i \text{ ersetzen:}$$

$$i_1 = -i \quad (\text{E})$$

$$u_{R1} \text{ ersetzen durch } i:$$

$$u_{R1} = -R_1 \cdot i \quad (\text{F})$$

(B), (C) und (F) in (A) einsetzen:

$$-R_1 \cdot i = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$(R + R_1) \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

DGL:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R + R_1}{L} \cdot i = 0 \quad (\text{G})$$

Anfangsbedingung:

Der Strom einer Induktivität kann sich nicht sprunghaft ändern. Aus Bild EG1024A ergibt sich für $t < 0$ (Mit $u_L = 0$ weil keine Änderung des Stromes):

$$i(t=0) = i_0 = \frac{U_q}{R}$$

Laplace-Transformation der DGL (G):

$$p \cdot I(p) - i_0 + \frac{R + R_1}{L} \cdot I(p) = 0$$

Umformen:

$$I(p) \left[p + \frac{R + R_1}{L} \right] = i_0 = \frac{U_q}{R}$$

$$I(p) = \frac{U_q}{R} \cdot \frac{1}{p + \frac{R + R_1}{L}}$$

Zurücktransformieren:

$$i(t) = \frac{U_q}{R} * e^{-\frac{R+R_1}{L}t} = \frac{U_q}{R} * e^{-\frac{t}{L/(R+R_1)}}$$

$$T = \frac{L}{R + R_1}$$

$$i(t) = \frac{U_q}{R} * e^{-t/T}$$

$$u_R = R * i = U_q * e^{-t/T}$$

$$u_L = L * \frac{di}{dt} = L * \frac{U_q}{R} * \left(-\frac{1}{T}\right) * e^{-t/T} = L * \frac{U_q}{R} * \frac{R + R_1}{-L} * e^{-t/T} = -U_q \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) * e^{-t/T}$$

$$u_{R1} = u_R + u_L = U_q * e^{-t/T} - U_q \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) * e^{-t/T} = -\frac{R_1}{R} * U_q * e^{-t/T}$$

Zusammenfassung: Ausschalten Induktivität

$$T = \frac{L}{R + R_1}$$

$$i(t) = \frac{U_q}{R} * e^{-t/T}$$

$$u_R(t) = U_q * e^{-t/T}$$

$$u_L(t) = -U_q * \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) * e^{-t/T}$$

$$u_{R1} = -\frac{R_1}{R} * U_q * e^{-t/T}$$

Zahlenwerte:

$$T = \frac{L}{R + R_1} = \frac{0.12 \text{ H}}{10 \Omega + 40 \Omega} = 2.4 \text{ ms}$$

$$u_R = 12 \text{ V} * e^{-t/2.4\text{ms}}$$

$$\frac{U_q}{R} = \frac{12 \text{ V}}{10 \Omega} = 1.2 \text{ A}$$

$$i(t) = 1.2 \text{ A} * e^{-t/2.4\text{ms}}$$

$$\frac{R_1}{R} = 4$$

$$u_{R1} = -4 * 12 \text{ V} * e^{-t/2.4\text{ms}}$$

$$1 + \frac{R_1}{R} = 5$$

$$u_L = -5 * 12 \text{ V} * e^{-t/2.4\text{ms}}$$

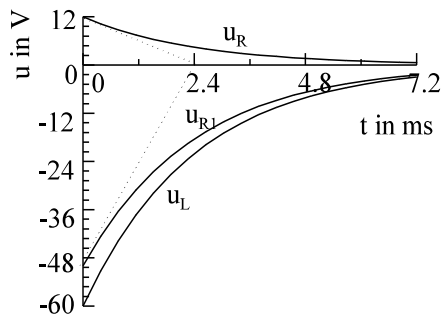


Bild EG1024B

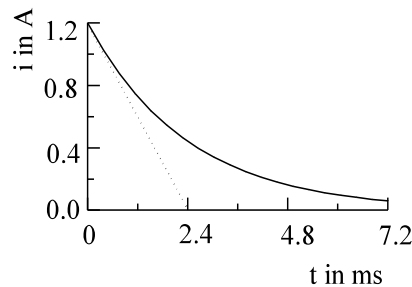


Bild EG1024C

Physikalische Erklärung der Verläufe in den Bildern EG1024B und EG1024C:

Auch hier verläuft jede physikalische Größe mit Hilfe einer e-Funktion von einem Anfangswert zu einem Endwert. Am besten ist als erstes der Anfangswert der sich stetig ändernden Größe (hier i) zu betrachten. Aus dem Zeitpunkt kurz vor Öffnen des Schalters ergibt sich $i_0 = U_q/R = 1.2 \text{ A}$. Die Anfangswerte an den Widerständen lassen sich mit Hilfe des ohmschen Gesetzes berechnen:

$$u_R(t=0) = R \cdot i_0 = 10 \, \Omega \cdot 1.2 \text{ A} = 12 \text{ V}$$

$$u_{R_1}(t=+0) = -R_1 \cdot i_0 = -40 \, \Omega \cdot 1.2 \text{ A} = -48 \text{ V}$$

Die Spannung u_{L0} ergibt sich aus der Differenz:

$$u_{L0} = u_L(t=+0) = u_{R_1}(t=0) - u_R(t=+0) = -48 \text{ V} - 12 \text{ V} = -60 \text{ V}$$

Da nach Öffnen des Schalters keine Spannungsquelle mehr im Kreis vorhanden ist, erfolgt keine Energiezufuhr. Damit verschwinden alle Größen für $t \rightarrow \infty$.

Nach Öffnen des Schalters ergibt sich eine Reihenschaltung R , R_1 und L . Zur Bestimmung der Zeitkonstanten

$$T = \frac{L}{R^*} = \frac{L}{R + R_1}$$

werden die Widerstände der Reihenschaltung R , R_1 zusammengefaßt.

Kommentar zu den Ergebnissen**Spannungsüberhöhung:**

Obwohl die Batteriespannung nur 12 V beträgt, treten beim Beispiel betragsmäßige Spannungen bis 60 V auf. Dieses ist bedingt durch den stetigen Verlauf des Stromes in der Induktivität. Wird der Schalter nach Bild EG1024A geöffnet, fließt der Strom $i_0 = U_q/R$ auch kurz nach Öffnen des Schalters weiter. Dieses Weiterfließen des Stromes ist aber nur durch R_1 möglich. Kurz nach Öffnen des Schalters tritt an R_1 die Spannungsspitze von $-R_1 \cdot i_0 = -(R_1/R) \cdot U_q$ mit der Zeitkonstanten $T = L/(R + R_1)$ auf. Wird der Widerstand R_1 erhöht, wird die Spannungsspitze betragsmäßig immer größer und die Zeitkonstante immer kleiner (Impulsfunktion). Ist kein Widerstand vorhanden ($R_1 \rightarrow \infty$), wird theoretisch die Spannung u_{R_1} unendlich. Da dieses physikalisch nicht möglich ist, ergibt sich ein Lichtbogen. Deswegen wird ein Gleichstrom einer Induktivität mit Hilfe einer Freilaufdiode ausgeschaltet, siehe Bild EG1024D. Während der Schalter eingeschaltet ist, weist im Sperrbereich der Widerstand der Diode $R_1 = u_1/i_1$ sehr hohe Werte auf, der Strom i_1 ist fast Null. Wird der Schalter geöffnet, wird die Spannung u_1 negativ, die Diode geht in den Durchlaßbereich über mit kleinen R_1 Werten.

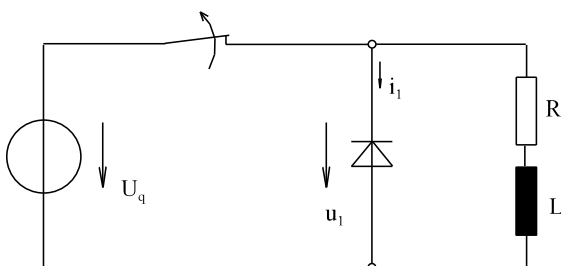
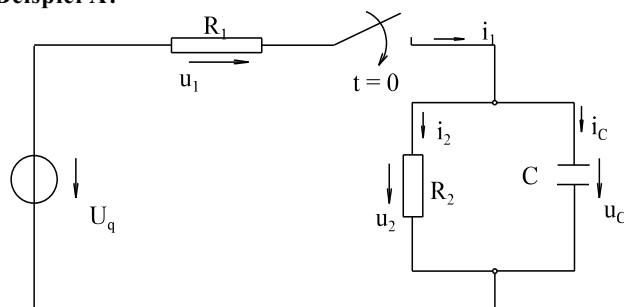


Bild EG1024D

10.2.5. Einschalten eines Netzwerkes mit mehreren R und einem Energiespeicher (L oder C)

Anhand der Beispiele A und B sollen verschiedene Methoden zur Berechnung des Einschaltvorgangs einer Gleichquelle an einem Netzwerk mit einem Energiespeicher (L oder C) aufgezeigt werden:

Beispiel A:

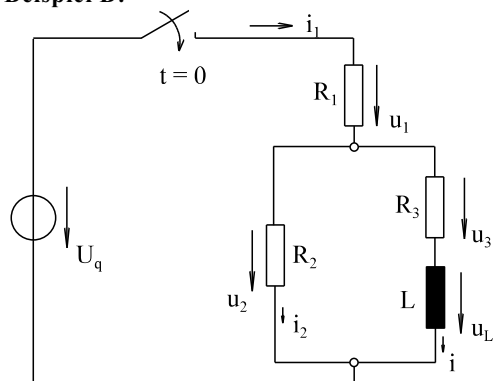


gegeben: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$
 $U_q = 10 \text{ V}$

gesucht: $u_C(t), u_1(t)$

Bild EG1025A

Beispiel B:



gegeben: $R_1 = 20 \Omega$
 $R_2 = 30 \Omega$
 $R_3 = 50 \Omega$
 $L = 310 \text{ mH}$
 $U_q = 15.5 \text{ V}$

gesucht: $i_L(t) = i(t), i_1(t)$

Bild EG1025B

10.2.5.1. Maschen- und Knotenanalyse

Verfahren:

gegeben: Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten

gesucht: $2z$ Unbekannte: z Zweigströme z Zweigspannungen

benötigt: $2z$ Gleichungen

z - **Gleichungen** ergeben sich aus dem Zusammenhang zwischen Strom und Spannung je nach Zweigelement:

$$R \quad \Rightarrow \quad u_R = R \cdot i_R$$

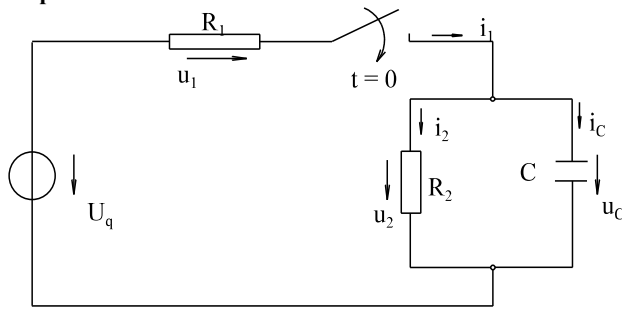
$$L \quad \Rightarrow \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

$$C \quad \Rightarrow \quad i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$k-1$ Knotengleichungen müssen ausgewertet werden.

Der Rest muß sich aus Maschenumläufen ergeben: $2z - (z-k-1) = z-(k-1)$ **Maschengleichungen** müssen aufgestellt werden.

Lösung: Aus den $2z$ Gleichungen müssen alle Variable bis auf eine eliminiert (z.B. durch Einsetzen) werden. Dieses ergibt eine DGL für eine Variable.

Beispiel A:

gegeben:	$R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
	$R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
	$C = 50 \text{ nF}$
	$U_q = 10 \text{ V}$
gesucht:	$u_C(t), u_1(t)$

Bild EG1025A

Anzahl der Zweige:	3 (1, 2, C)
Anzahl der Unbekannten:	6
Unbekannte:	$i_1, u_1, i_2, u_2, i_C, u_C$
Anzahl der benötigten Gleichungen:	6

Drei Gleichungen ergeben sich aus dem Zusammenhang zwischen Strom und Spannung

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 \quad (\text{A1})$$

$$u_2 = R_2 \cdot i_2 \quad (\text{A2})$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (\text{A3})$$

Bei zwei Knoten kann eine Knotengleichung ausgewertet werden:

$$i_1 = i_2 + i_C \quad (\text{A4})$$

Um sechs Gleichungen zu bekommen, müssen noch zwei Maschen ausgewertet werden:

$$U_q = u_1 + u_2 \quad (\text{A5})$$

$$u_2 = u_C \quad (\text{A6})$$

Nun wird eine Variable nach der anderen eliminiert. Zum Eliminieren von u_2 wird (A6) in (A5) und (A2) eingesetzt, die anderen Gleichungen werden übernommen:

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 \quad (\text{B1})$$

$$u_C = R_2 \cdot i_2 \quad (\text{B2})$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (\text{B3})$$

$$i_1 = i_2 + i_C \quad (\text{B4})$$

$$U_q = u_1 + u_C \quad (\text{B5})$$

u_1 wird durch Einsetzen von (B1) in (B5) eliminiert

$$u_C = R_2 \cdot i_2 \quad (\text{C1})$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (\text{C2})$$

$$i_1 = i_2 + i_C \quad (\text{C3})$$

$$U_q = R_1 \cdot i_1 + u_C \quad (\text{C4})$$

i_1 wird eliminiert, indem (C3) in (C4) eingesetzt wird:

$$u_C = R_2 \cdot i_2 \quad (\text{D1})$$

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad (\text{D2})$$

$$U_q = R_1 \cdot (i_2 + i_C) + u_C = R_1 \cdot i_2 + R_1 \cdot i_C + u_C \quad (\text{D3})$$

Zum Eliminieren von i_2 wird (D1) umgestellt

$$i_2 = u_C / R_2$$

und in (D3) eingesetzt:

$$i_C = C * \frac{du_C}{dt} \quad (E1)$$

$$U_q = R_1 \frac{u_C}{R_2} + R_1 * i_C + u_C \quad (E2)$$

i_C wird eliminiert durch Einsetzen von (E1) in (E2):

$$U_q = u_C \left[1 + \frac{R_1}{R_2} \right] + R_1 * C * \frac{du_C}{dt}$$

Damit ergibt sich die gesuchte DGL für u_C :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_1 * R_2 * C} u_C &= \frac{U_q}{R_1 * C} \\ \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} * C * \frac{du_C}{dt} + u_C &= \frac{R_2}{R_1 + R_2} * U_q \end{aligned} \quad (DGL A)$$

Kommentar zum Verfahren:

Das Aufstellen und Eliminieren der Gleichungen ist sehr sehr aufwendig, aber nach bestimmten Regeln abzuarbeiten. Die obere DGL muss noch gelöst werden. Dieses Verfahren eignet sich auch bei Vorhandensein mehrerer Energiespeicher (L oder C) im Kreis. Dabei müssen dann aber zum Einsetzen der Gleichungen noch ganze Gleichungen differenziert werden, siehe Kap. 10.5.

Kommentar zur oberen DGL

Die Lösung der DGL

$$T \frac{dy}{dt} + y = A$$

ergibt mit $y_0 = 0$

$$y(t) = A(1 - e^{-t/T})$$

Vergleicht man die DGL in y mit (DGL A) stellt man fest:

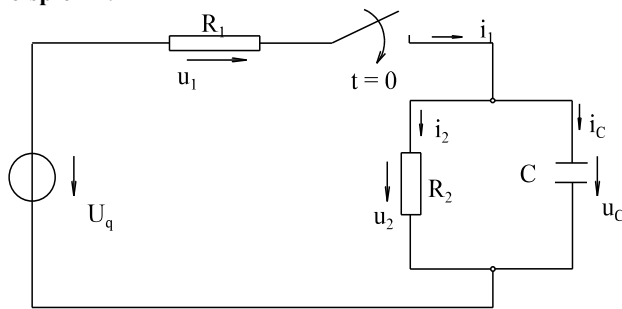
$$T = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} * C = R^* * C \quad \Rightarrow \quad R^* = R_1 || R_2$$

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} * U_q \quad \Rightarrow \quad \text{Spannungsteiler } R_2, R_1 \text{ an } R_2$$

10.2.5.2. Vereinfachtes Aufstellen der DGL

Prinzip: Alle Größen eines Netzwerks werden durch eine Variable ersetzt. Diese Variable muss mit dem Element im Netzwerk in Zusammenhang stehen, mit dem man bei der Methode "Ersatzwiderstand bilden" beginnen würde.

Beispiel A:



gegeben: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$
 $U_q = 10 \text{ V}$

gesucht: $u_C(t), u_1(t)$

Bild EG1025A

Begonnen wird mit Variable: u_C

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$u_2 = u_C$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{u_C}{R_2}$$

$$i_1 = i_2 + i_C = \frac{u_C}{R_2} + C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 = \frac{R_1}{R_2} u_C + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt}$$

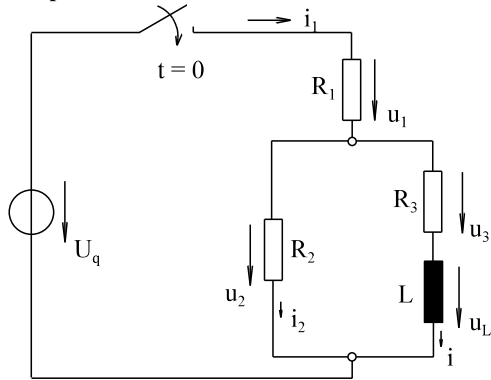
$$U_q = u_1 + u_C = \frac{R_1}{R_2} u_C + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C$$

$$\left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) u_C + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = U_q$$

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} u_C + R_1 \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} = U_q$$

$$\frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U_q$$

Kommentar: Das Aufstellen der DGL ist schon etwas einfacher.

Beispiel B:**gegeben:**

$$\begin{aligned} R_1 &= 20 \, \Omega \\ R_2 &= 30 \, \Omega \\ R_3 &= 50 \, \Omega \\ L &= 310 \, \text{mH} \\ U_q &= 15.5 \, \text{V} \end{aligned}$$

gesucht:

$$i_L(t) = i(t), i_1(t)$$

Bild EG1025B

Begonnen wird mit Variable:

i

$$u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_3 = R_3 \cdot i$$

$$u_2 = u_3 + u_L = R_3 \cdot i + L \frac{di}{dt}$$

$$i_2 = \frac{u_2}{R_2} = \frac{R_3}{R_2} \cdot i + \frac{L}{R_2} \frac{di}{dt}$$

$$i_1 = i_2 + i = \left(\frac{R_3}{R_2} \cdot i + \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di}{dt} \right) + i = \left(\frac{R_3}{R_2} + 1 \right) i + \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 = R_1 \left(\frac{R_3}{R_2} + 1 \right) i + \frac{R_1}{R_2} L \frac{di}{dt}$$

$$U_q = u_1 + u_2 = \left[\left(\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} + R_1 \right) i + \frac{R_1}{R_2} L \cdot \frac{di}{dt} \right] + \left[R_3 \cdot i + L \frac{di}{dt} \right]$$

$$U_q = \left(\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} + R_1 + R_3 \right) i + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) L \frac{di}{dt}$$

$$i + L \cdot \frac{\frac{R_1}{R_2} + 1}{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} + R_1 + R_3} \frac{di}{dt} = \frac{U_q}{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} + R_1 + R_3}$$

Aus dem Vergleich der oberen DGL mit (10.5)

$$T \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{hom}} = c_1 \cdot e^{-t/T}$$

ergibt sich:

$$T = \frac{\frac{R_1}{R_2} + 1}{\frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} + R_1 + R_3} \cdot L = \frac{L}{R^*}$$

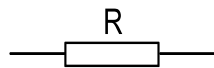
$$R^* = \frac{\frac{R_1 * R_3}{R_2} + R_1 + R_3}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \frac{R_1 * R_3 + R_1 * R_2 + R_3 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(R_1 + R_2) * R_3 + R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R^* = R_3 + \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = R_3 + (R_1 || R_2)$$

Fazit: Zur Bestimmung der Zeitkonstanten $T = L / R^*$ muss der obere Widerstand R^* benutzt werden.

10.2.5.3. Laplace-transformierte Widerstände

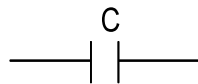
Prinzip: Wie bei der komplexen Rechnung wird der Kreis mit der Laplace Variablen p anstatt mit $j\omega$ berechnet. Auch die eingeschalteten Quellen werden Laplace transformiert.



$$Z(p) = R$$



$$Z(p) = pL$$



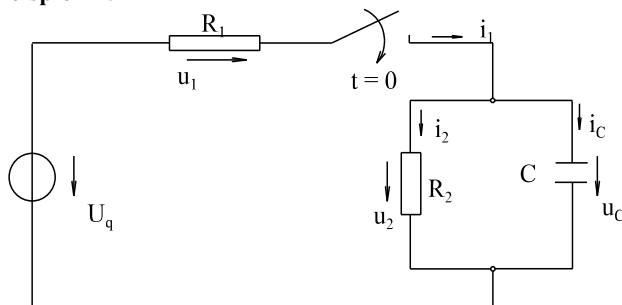
$$Z(p) = \frac{1}{pC}$$

Voraussetzung:

Alle Energiespeicher sind zum Einschaltzeitpunkt entladen:

$$u_{C0} = 0, i_{L0} = 0$$

Beispiel A:



gegeben: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$
 $U_q = 10 \text{ V}$

gesucht: $u_C(t), u_1(t)$

Bild EG1025A

Laplace-Transformation der Widerstände und der Spannungsquelle

$$Z_C(p) = \frac{1}{pC} \quad Z_2(p) = R_2 \quad Z_1(p) = R_1 \quad U_q(p) = \frac{U_q}{p}$$

Berechnung der Parallelschaltung:

$$Z_{2C} = \frac{Z_2 * Z_C}{Z_2 + Z_C} = \frac{R_2 * \frac{1}{pC}}{R_2 + \frac{1}{pC}} = \frac{R_2}{1 + R_2 * Cp}$$

Anwendung des Laplace transformierten Spannungsteilers:

$$\frac{U_C(p)}{U_q(p)} = \frac{Z_{2C}(p)}{Z_1(p) + Z_{2C}(p)} = \frac{\frac{R_2}{1 + R_2 Cp}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2 Cp}} = \frac{R_2}{R_1 + R_1 * R_2 Cp + R_2}$$

$$\frac{U_C(p)}{U_q(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} Cp}$$

$$T = \frac{R_1 * R_2 * C}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_C(p)}{U_q(p)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + T p}$$

$$U_C(p) = \frac{U_q}{p} * \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 + T p}$$

$$U_q(p) = U_q * \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{p(1 + T p)}$$

Rücktransformation:

$$u_C(t) = U_q * \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/T})$$

$$u_1(t) = U_q - u_C(t) = U_q - U_q * \frac{R_2}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/T}) = U_q * \left[1 - \frac{R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/T} \right]$$

$$u_1(t) = U_q * \left[\frac{R_1 + R_2 - R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/T} \right]$$

$$u_1(t) = U_q * \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-t/T} \right]$$

Zahlenwerte:

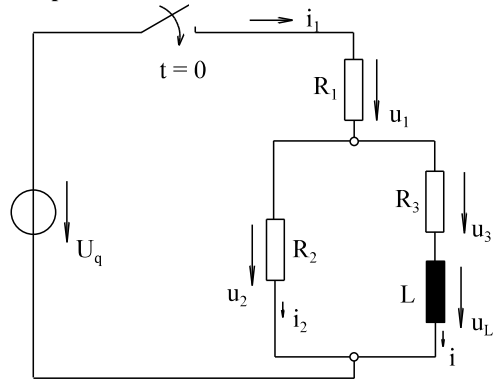
$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20 \text{ k}\Omega * 30 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} = 12 \text{ k}\Omega$$

$$T = C * (R_1 \parallel R_2) = 50 \text{ nF} * 12 \text{ k}\Omega = 0.6 \text{ ms}$$

$$u_C(t) = 10 \text{ V} \frac{30 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} (1 - e^{-t/T}) = 6 \text{ V} (1 - e^{-t/0.6 \text{ ms}})$$

$$u_1(t) = 10 \text{ V} \left[\frac{20 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} + \frac{30 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} * e^{-t/T} \right] = 4 \text{ V} + 6 \text{ V} * e^{-t/0.6 \text{ ms}}$$

Die grafische Darstellung der Ergebnisse erfolgt im nächsten Abschnitt.

Beispiel B:

gegeben: $R_1 = 20 \Omega$
 $R_2 = 30 \Omega$
 $R_3 = 50 \Omega$
 $L = 310 \text{ mH}$
 $U_q = 15.5 \text{ V}$

gesucht: $i_L(t) = i(t), i_1(t)$

Bild EG1025B

Laplace-Transformation der Widerstände und der Spannungsquelle

$$Z_1(p) = R_1$$

$$Z_2(p) = R_2$$

$$Z_{3L}(p) = R_3 + pL$$

$$U_q(p) = \frac{U_q}{p}$$

Berechnung der Parallelschaltung:

$$Z_{23L} = \frac{Z_2 * Z_{3L}}{Z_2 + Z_{3L}} = \frac{R_2 * (R_3 + pL)}{R_2 + R_3 + pL} = \frac{R_2 * R_3 + R_2 pL}{R_2 + R_3 + pL}$$

Berechnung des Gesamtwiderstandes:

$$Z_{\text{ges}}(p) = Z_1(p) + Z_{23L}(p) = R_1 + \frac{R_2 * R_3 + R_2 pL}{R_2 + R_3 + pL}$$

$$Z_{\text{ges}}(p) = \frac{R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_1 pL + R_2 * R_3 + R_2 pL}{R_2 + R_3 + pL}$$

$$Z_{\text{ges}}(p) = \frac{(R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_2 * R_3) + (R_1 + R_2) pL}{(R_2 + R_3) + pL}$$

$$I_1(p) = \frac{U_q(p)}{Z_{\text{ges}}} = \frac{U_q}{p} * \frac{R_2 + R_3 + pL}{R_1 * R_2 + R_1 * R_3 + R_2 * R_3 + (R_1 + R_2) pL}$$

Einsetzen von Zahlenwerten:

$$R_2 + R_3 = 30 \, \Omega + 50 \, \Omega = 80 \, \Omega$$

$$R_1 + R_2 = 50 \, \Omega$$

$$L = 0.31 \, \text{H} = 0.31 \, \Omega\text{s}$$

$$R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3 = 20 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega + 20 \, \Omega \cdot 50 \, \Omega + 30 \, \Omega \cdot 50 \, \Omega = 3100 \, \Omega^2$$

$$(R_1 + R_2) \cdot L = 50 \, \Omega \cdot 0.31 \, \Omega\text{s} = 15.5 \, \Omega^2\text{s}$$

$$I_1(p) = 15.5 \, \text{V} \frac{80 \, \Omega + 0.31 \, \Omega\text{s}p}{p \cdot (3100 \, \Omega^2 + 15.5 \, \Omega^2 \text{s}p)}$$

$$I_1(p) = 1 \frac{\text{A}}{\text{s}} \frac{80 + 0.31 \, \text{s}p}{p \cdot (p + 200 \, \text{s}^{-1})}$$

$$I_1(p) = \frac{A_1}{p} + \frac{A_2}{p + 200 \, \text{s}^{-1}}$$

Berechnung von A_1 und A_2 nach der Zuhaltmethode:

$$p = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 1 \frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot \frac{80}{200 \, \text{s}^{-1}} = 0.4 \, \text{A}$$

$$p = -200 \, \text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = 1 \frac{\text{A}}{\text{s}} \cdot \frac{80 - 0.31 \, \text{s} \cdot 200 \, \text{s}^{-1}}{-200 \, \text{s}^{-1}} = -0.09 \, \text{A}$$

$$I_1(p) = \frac{0.4 \, \text{A}}{p} - \frac{0.09 \, \text{A}}{p + 200 \, \text{s}^{-1}}$$

$$i_1(t) = 0.4 \, \text{A} - 0.09 \, \text{A} \cdot e^{-200t/\text{s}}$$

$$i_1(t) = 0.4 \, \text{A} - 0.09 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

Der Strom $I(p)$ wäre aus $I_1(p)$ mit Hilfe des Ansatzes eines Laplace transformierten Stromteilers möglich. Schneller ist aber in diesem Beispiel die zahlenwertmäßige Berechnung im Zeitbereich.

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) = 20 \, \Omega \cdot i_1(t) = 8 \, \text{V} - 1.8 \, \text{V} \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

$$u_2(t) = U_q - u_1(t) = 15.5 \, \text{V} - 8 \, \text{V} + 1.8 \, \text{V} \cdot e^{-t/5\text{ms}} = 7.5 \, \text{V} + 1.8 \, \text{V} \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

$$i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = \frac{u_2(t)}{30 \, \Omega} = 0.25 \, \text{A} + 0.06 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

$$i(t) = i_1(t) - i_2(t) = 0.4 \, \text{A} - 0.09 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}} - (0.25 \, \text{A} + 0.06 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}})$$

$$i(t) = 0.15 \, \text{A} - 0.15 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

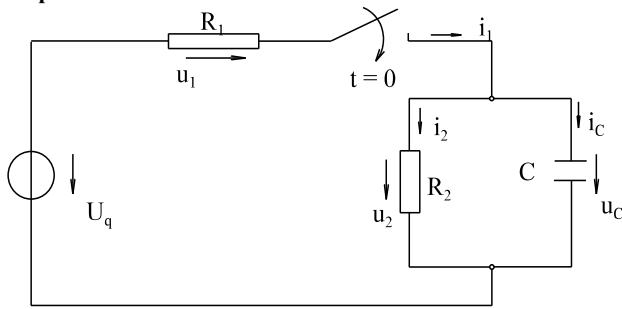
$$i(t) = 0.15 \, \text{A} [1 - e^{-t/5\text{ms}}]$$

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt im nächsten Abschnitt.

10.2.5.4. Darstellung und Diskussion der Ergebnisse von Beispiel A und B

Die in den letzten Abschnitten berechneten Ergebnissen für die Beispiele A und B sind in den Bildern EG10254A und EG10254B dargestellt.

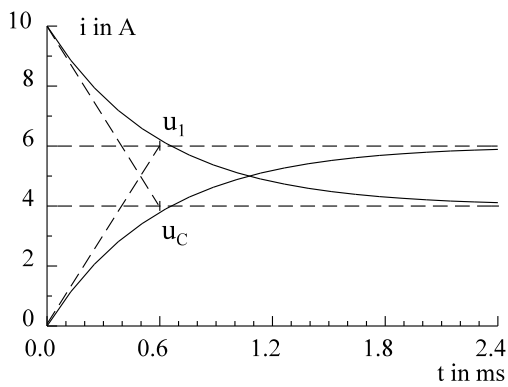
Beispiel A:



gegeben: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$
 $U_q = 10 \text{ V}$

gesucht: $u_C(t), u_1(t)$

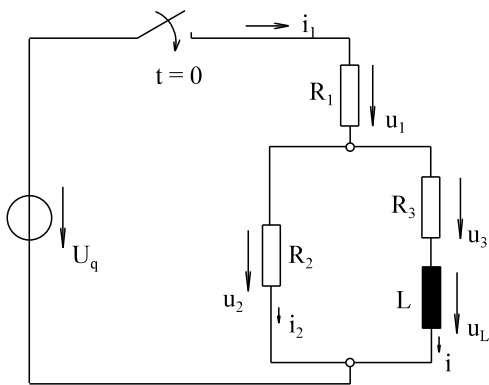
Bild EG1025A



Ergebnis: $u_C(t) = 6 \text{ V} (1 - e^{-t/0.6\text{ms}})$
 $u_1(t) = 4 \text{ V} + 6 \text{ V} * e^{-t/0.6\text{ms}}$

Bild EG10254A

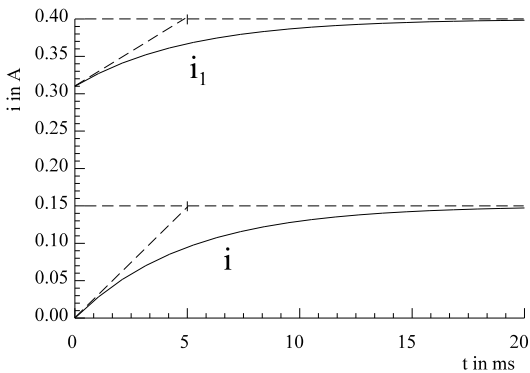
Beispiel B:



gegeben: $R_1 = 20 \Omega$
 $R_2 = 30 \Omega$
 $R_3 = 50 \Omega$
 $L = 310 \text{ mH}$
 $U_q = 15.5 \text{ V}$

gesucht: $i_L(t) = i(t), i_1(t)$

Bild EG1025B



Ergebnis: $i_1(t) = 0.4 \text{ A} - 0.09 \text{ A} * e^{-t/5\text{ms}}$
 $i(t) = 0.15 \text{ A} [1 - e^{-t/5\text{ms}}]$

Bild EG10254B

Bei allen bisher untersuchten Einschaltvorgängen bei einem Energiespeicher im Netz

- 1] Entladen Kondensator
- 2] Aufladen Kondensator
- 3] Einschalten Induktivität
- 4] Ausschalten Induktivität
- 5] Beispiel A
- 6] Beispiel B

verlaufen die physikalischen Größen nach einer e-Funktion von einem Anfangs- nach einem Endwert. Dabei ist für alle Größen in einem Netzwerk die Zeitkonstante T gleich. Die Zeitkonstante ergab sich:

1]und 2]	Entladen und Aufladen eines Kondensators (Bildern EG1021A und EG1022A)	$T = R^* \cdot C$	$R^* = R$
3]	Einschalten einer Induktivität (Bild EG1023A)	$T = \frac{L}{R^*}$	$R^* = R$
4]	Ausschalten einer Induktivität (Bild EG1024A)	$T = \frac{L}{R^*}$	$R^* = R_1 + R$
5]	Beispiel A (Bild EG1025A)	$T = R^* \cdot C$	$R^* = R_1 \parallel R_2$
6]	Beispiel B (Bild EG1025B)	$T = \frac{L}{R^*}$	$R^* = R_3 + (R_1 \parallel R_2)$

Die Zeitkonstante ergibt sich immer mit Hilfe eines Widerstandes R^* . Wie lässt sich dieser bestimmen? Die Zeitkonstante berücksichtigt die homogene Lösung. Auch wenn keine Quelle im Kreis ist, würde die Entladung mit der Zeitkonstanten stattfinden. Eine Entladung aber findet mit der Zeitkonstanten des Widerstandes statt, den der Energiespeicher an seinen Klemmen "sieht". Bei allen oberen sechs Fällen ergibt sich der Widerstand R^* durch die Ermittlung des Widerstandes an den Klemmen des Energiespeichers, wobei eine ideale Spannungsquelle kurzgeschlossen werden muss und eine ideale Stromquelle offengelassen wurden muss. Die Ermittlung des Widerstandes erfolgt in gleicher Weise wie bei der Netzwerks-Berechnungsmethode Ersatzquelle (Kap. 3.6, erstes Semester und Kap. 6.8.10, zweites Semester).

10.2.5.5. Anfangswert, Endwert, Zeitkonstante

Aus den Betrachtungen des letzten Abschnitts ergaben sich: Ein Einschaltvorgang einer Gleichquelle an einem Netzwerk mit nur einem Energiespeicher kann beschrieben werden durch Anfangswert, Endwert und Zeitkonstante.

Schema:

gegeben: Netzwerk, Gleichquelle(n), ein Energiespeicher (L oder C)

1. Anfangswert y_{ANF} bestimmen

2. Endwert y_{END} bestimmen

3. Zeitkonstante bestimmen

$$T = \frac{L}{R^*} \qquad T = R^* \cdot C$$

R^* an den Klemmen des Energiespeichers (U_q kurzschließen, I_q offen)

4. Größe angeben

$$y(t) = y_{END} - (y_{END} - y_{ANF}) \cdot e^{-t/T}$$

5. Konstruktion e-Funktion mit Hilfe der Tangente

Hinweis: Bei umfangreicheren Netzwerken ist es ratsam, für die Punkte 1 bis 3 jeweils ein ESB zu skizzieren.

Zur Berechnung des Anfangswertes kann ersetzt werden:

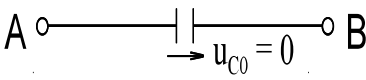
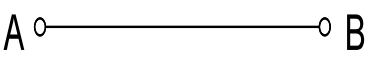
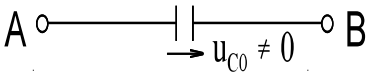
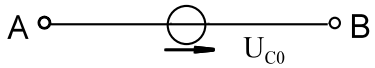
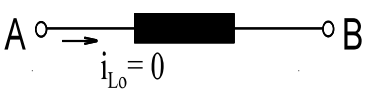

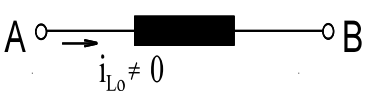
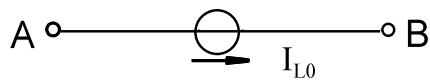
ESB Element	ersetzbar durch
ungeladener Kondensator 	Kurzschluss 
geladener Kondensator 	Spannungsquelle 
Induktivität entladen 	offene Klemmen 
Induktivität geladen 	Stromquelle 

Tabelle: Ersatzelement für $t = 0$

Zur Berechnung des Endwertes kann ersetzt werden:

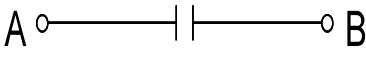


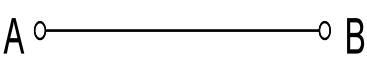
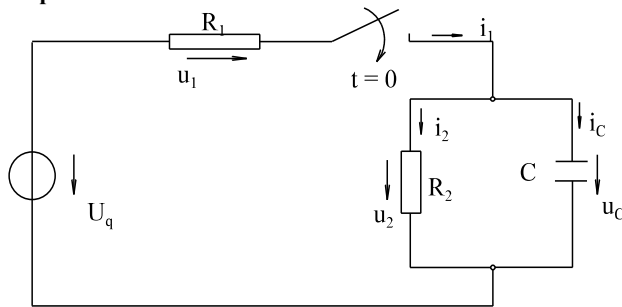
ESB Element	ersetzbar durch
Kondensator 	offene Klemmen 
Induktivität 	Kurzschluss 

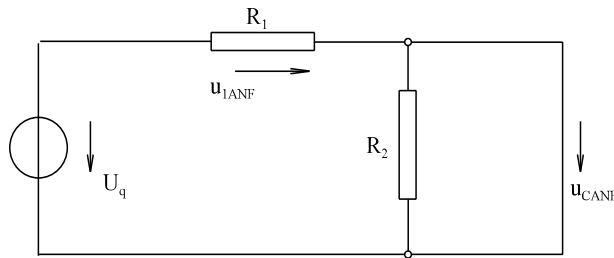
Tabelle: Ersatzelement für $t \rightarrow \infty$

Beispiel A:

gegeben: $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$
 $R_2 = 30 \text{ k}\Omega$
 $C = 50 \text{ nF}$
 $U_q = 10 \text{ V}$

gesucht: $u_C(t), u_1(t)$

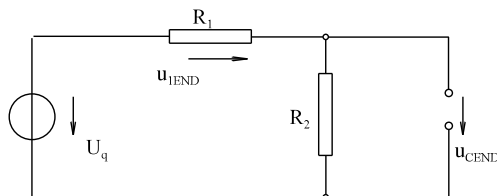
Bild EG1025A

1. Anfangswert berechnen:

$$u_{\text{CANF}} = 0$$

$$u_{\text{1ANF}} = U_q = 10 \text{ V}$$

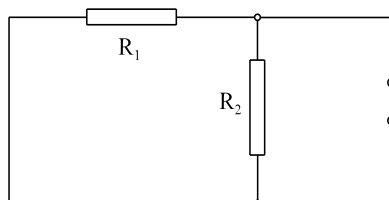
Bild EG10255A: ESB für den Anfangswert

2. Endwert berechnen:

$$u_{\text{CEND}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_q = \frac{30 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} * 10 \text{ V} = 6 \text{ V}$$

$$u_{\text{1END}} = U_q - u_{\text{CEND}} = 10 \text{ V} - 6 \text{ V} = 4 \text{ V}$$

Bild EG10255B: ESB für den Endwert

3. Zeitkonstante bestimmen:

$$R^* = R_1 \parallel R_2 = \frac{20 \text{ k}\Omega * 30 \text{ k}\Omega}{20 \text{ k}\Omega + 30 \text{ k}\Omega} = 12 \text{ k}\Omega$$

$$T = C * R^* = 50 \text{ nF} * 12 \text{ k}\Omega = 0.6 \text{ ms}$$

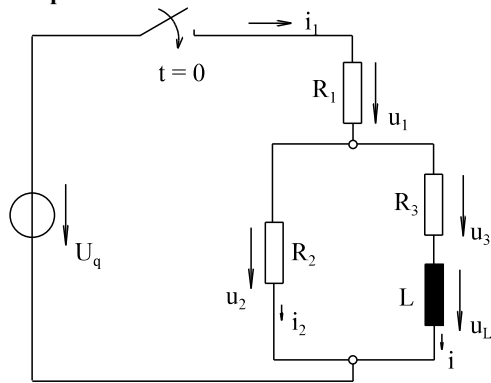
Bild EG10255C: ESB für die Zeitkonstante

4. Ergebnis angeben:

$$u_C(t) = u_{\text{CEND}} - (u_{\text{CEND}} - u_{\text{CANF}}) * e^{-t/T} = 6 \text{ V} - (6 \text{ V} - 0) * e^{-t/T} = 6 \text{ V} (1 - e^{-t/T})$$

$$u_1(t) = u_{\text{1END}} - (u_{\text{1END}} - u_{\text{1ANF}}) * e^{-t/T} = 4 \text{ V} - (4 \text{ V} - 10 \text{ V}) * e^{-t/T} = 4 \text{ V} + 6 \text{ V} e^{-t/T}$$

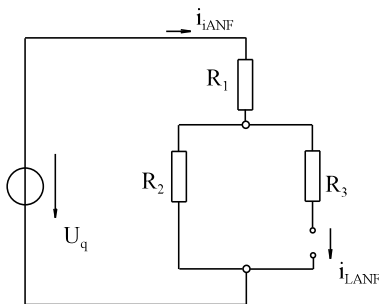
5. Ergebnis darstellen: siehe Kap. 10.2.5.4

Beispiel B:

gegeben: $R_1 = 20 \Omega$
 $R_2 = 30 \Omega$
 $R_3 = 50 \Omega$
 $L = 310 \text{ mH}$
 $U_q = 15.5 \text{ V}$

gesucht: $i_L(t) = i(t), i_1(t)$

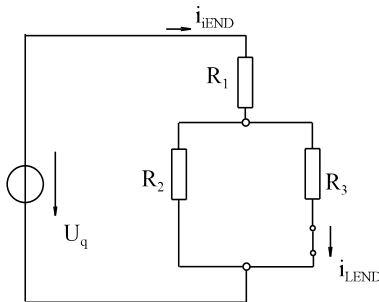
Bild EG1025B

1. Anfangswert bestimmen:

$$i_{i\text{ANF}} = \frac{U_q}{R_1 + R_2} = \frac{15.5 \text{ V}}{20 \Omega + 30 \Omega} = 0.31 \text{ A}$$

$$i_{L\text{ANF}} = 0$$

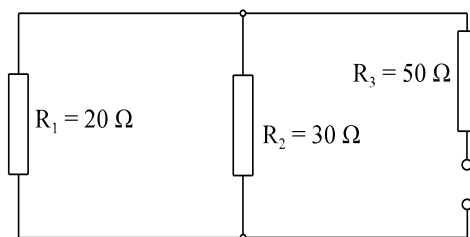
Bild EG10255D: ESB für den Anfangswert

2. Endwert bestimmen:

$$i_{i\text{END}} = \frac{U_q}{R_1 + \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{15.5 \text{ V}}{20 \Omega + \frac{30 \Omega * 50 \Omega}{30 \Omega + 50 \Omega}} = 0.4 \text{ A}$$

$$i_{L\text{END}} = I_{i\text{END}} \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0.4 \text{ A} \frac{30 \Omega}{30 \Omega + 50 \Omega} = 0.15 \text{ A}$$

Bild EG10255E: ESB für Endwert

3. Zeitkonstante bestimmen:

$$R^* = R_3 + \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R^* = 50 \Omega + \frac{20 \Omega * 30 \Omega}{20 \Omega + 30 \Omega} = 62 \Omega$$

$$T = \frac{L}{R^*} = \frac{310 \text{ mH}}{62 \Omega} = 5 \text{ ms}$$

Bild EG10255F: ESB für die Zeitkonstante

4. Ergebnis angeben:

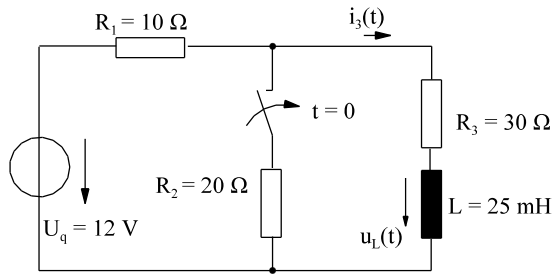
$$i_L(t) = i_{L\text{END}} - (i_{L\text{END}} - i_{L\text{ANF}}) * e^{-t/T} = 0.15 \text{ A} - (0.15 \text{ A} - 0) * e^{-t/T} = 0.15 \text{ A} (1 - e^{-t/T})$$

$$i_1(t) = i_{i\text{END}} - (i_{i\text{END}} - i_{i\text{ANF}}) * e^{-t/T} = 0.4 \text{ A} - (0.4 \text{ A} - 0.31 \text{ A}) * e^{-t/5\text{ms}} = 0.4 \text{ A} - 0.09 \text{ A} * e^{-t/5\text{ms}}$$

5. Ergebnis darstellen: siehe Kap. 10.2.5.4

10.2.5.6. Weite Übungsbeispiele zu Anfangswert, Endwert, Zeitkonstante und Aufgaben

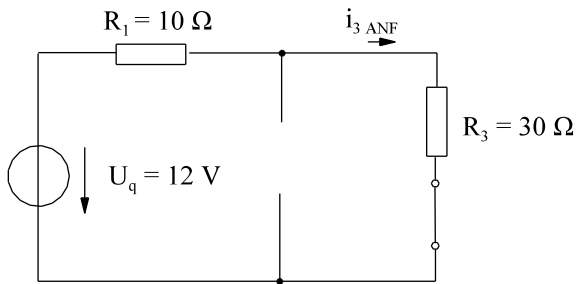
Beispiel C



gesucht: $u_L(t), i_3(t)$

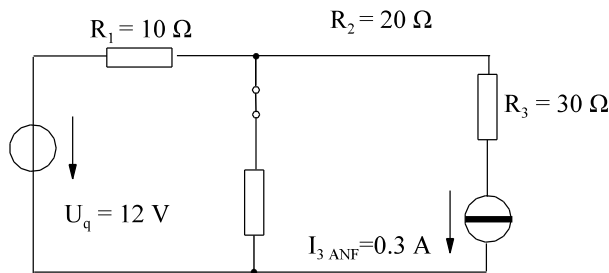
Lösungsweg:

ESB für $t = -0$ zur Bestimmung der energiebehafteten Anfangsgröße



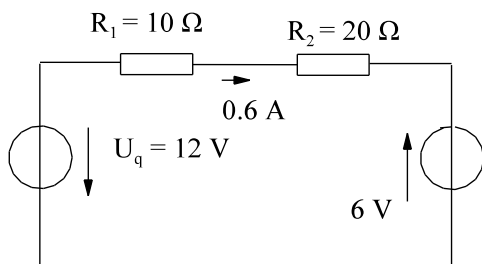
$$i_{3 \text{ ANF}} = \frac{12\text{V}}{40\Omega} = 0.3\text{A}$$

ESB für $t = +0$ zur Bestimmung der nicht energiebehafteten Anfangsgröße

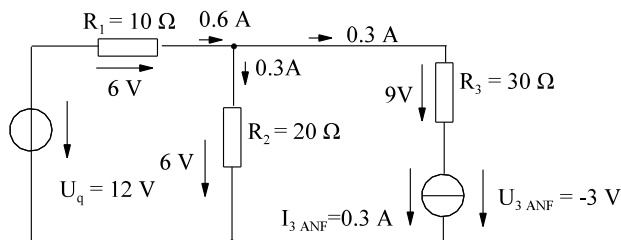


$$20\Omega \cdot 0.3\text{A} = 6\text{V}$$

Die Größe des Widerstandes R_3 ist für die Berechnung von i_1 und u_2 nicht von Interesse.

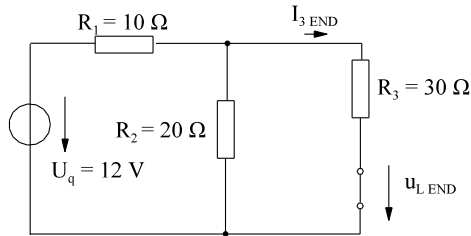


$$\frac{18\text{V}}{30\Omega} = 0.6\text{A}$$



$$u_{L \text{ ANF}} = 6\text{V} - 9\text{V} = -3\text{V}$$

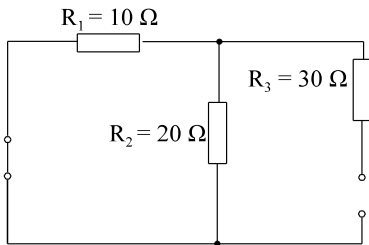
EBB für $t \rightarrow \infty$ zur Bestimmung der Endwerte



$$i_{3 \text{ END}} = \frac{12V}{10\Omega + \frac{20\Omega * 30\Omega}{20\Omega + 30\Omega}} * \frac{20\Omega}{20\Omega + 30\Omega} = 0.218 A$$

$u_{L \text{ END}} = 0$

ESB für R^* bzw. T



$$R^* = 30\Omega + \frac{10\Omega * 20\Omega}{10\Omega + 20\Omega} = 36.67\Omega$$

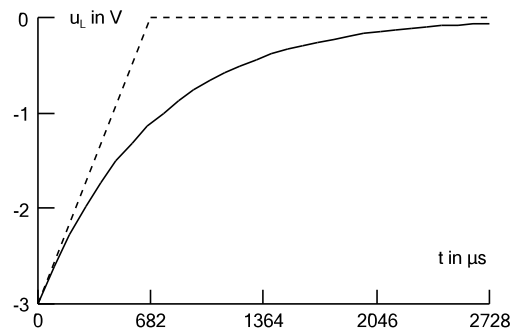
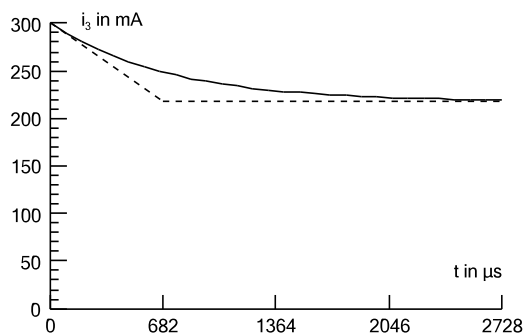
$$T = \frac{L}{R^*} = \frac{25mH}{36.67\Omega} = 0.687 ms$$

$u_L(t) = u_{L \text{ END}} + (u_{L \text{ ANF}} - u_{L \text{ END}}) * e^{-t/T}$

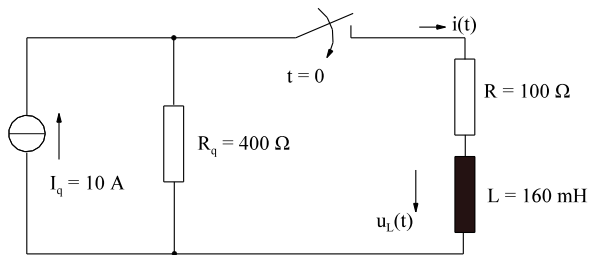
$i_3(t) = i_{3 \text{ END}} + (i_{3 \text{ ANF}} - i_{3 \text{ END}}) * e^{-t/T}$

$u_L(t) = -3 V * e^{-t/T}$

$i_3(t) = 0.218 A + (0.3 A - 0.218 A) * e^{-t/0.682ms} = 0.218 A + 0.082 A * e^{-t/0.682ms}$

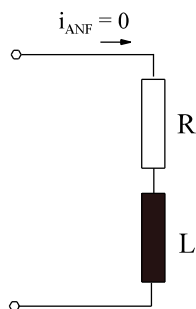


Beispiel D



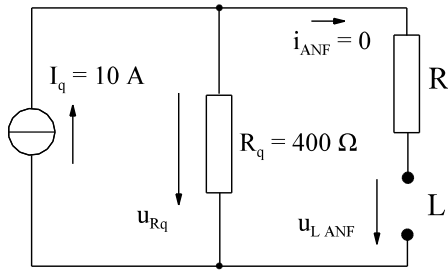
gesucht: $u_L(t), i(t)$

Lösungsweg:



ESB für $t = -0$ (Anfangswert der energiebehafteten Größe i)

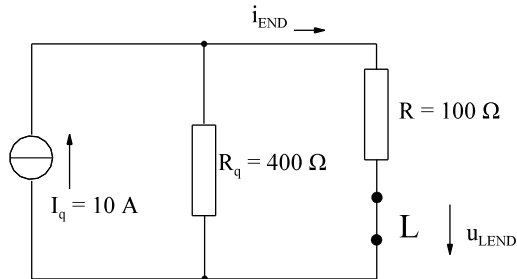
$i_{ANF} = 0$



ESB für $t = +0$ (Anfangswert der nicht energiebehafteten Größe u_L)

$$u_{Rq} = 10 \text{ A} \cdot 400 \text{ } \Omega = 4000 \text{ V}$$

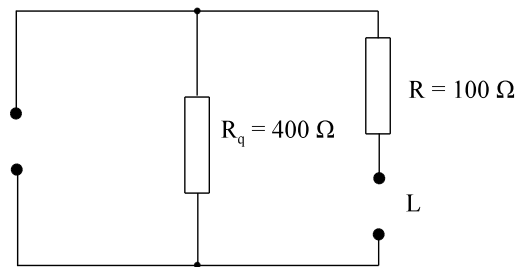
$$u_{L \text{ ANF}} = u_{Rq} = 4000 \text{ V}$$



ESB für $t = \infty$ (Endwerte)

$$u_{L \text{ END}} = 0$$

$$i_{\text{END}} = I_q \cdot \frac{R_q}{R + R_q} = 10 \text{ A} \cdot \frac{400 \text{ } \Omega}{400 \text{ } \Omega + 100 \text{ } \Omega} = 8 \text{ A}$$



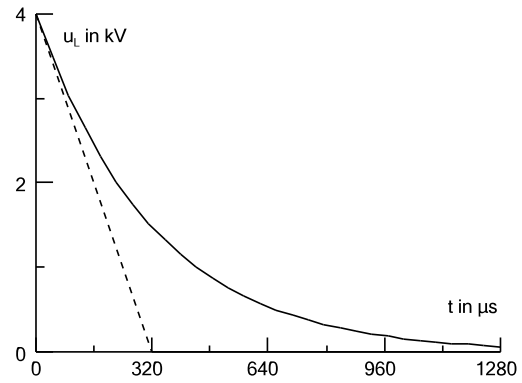
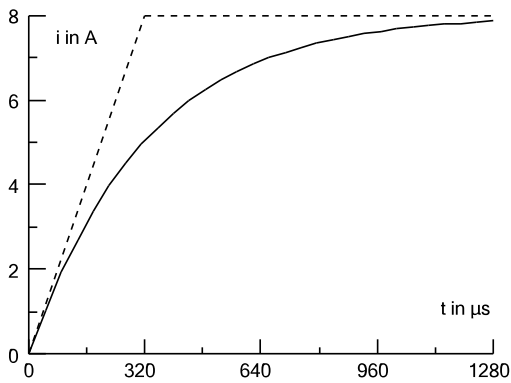
ESB für R_q^*

$$R_q^* = R_q + R = 400 \text{ } \Omega + 100 \text{ } \Omega = 500 \text{ } \Omega$$

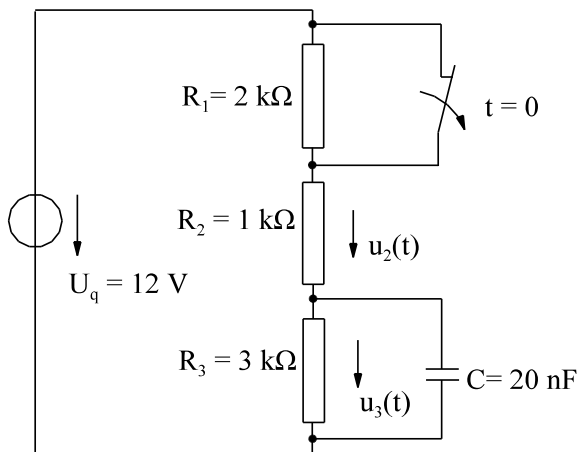
$$T = \frac{L}{R_q^*} = \frac{0.16 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}{500 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 0.32 \text{ ms}$$

$$i(t) = i_{\text{END}} + (i_{\text{ANF}} - i_{\text{END}}) \cdot e^{-t/T} = 8 \text{ A} - 8 \text{ A} \cdot e^{-t/0.32 \text{ ms}}$$

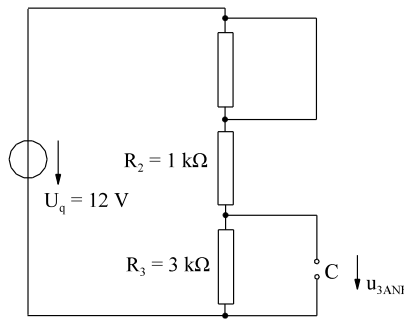
$$u_L(t) = 4000 \text{ V} \cdot e^{-t/0.32 \text{ ms}}$$



Beispiel E

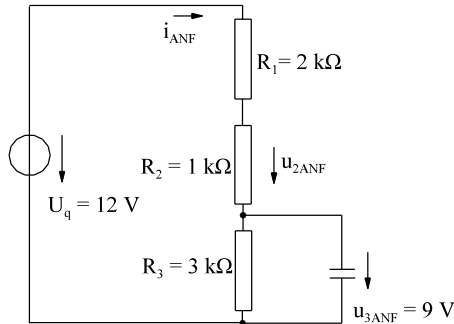


gesucht: $u_2(t), u_3(t)$

Lösungsweg:

ESB für $t = -0$ (Anfangswert der energiebehafteten Größe u_3)

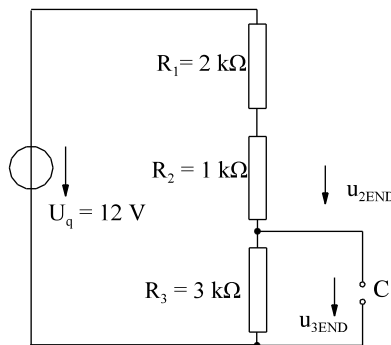
$$u_{3ANF} = U_q \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 12V \cdot \frac{3k\Omega}{3k\Omega + 1k\Omega} = 9V$$



ESB für $t = +0$ (Anfangswert der nicht energiebehafteten Größe u_2)

$$i_{ANF} = \frac{U_q - u_{3ANF}}{R_1 + R_2} = \frac{12V - 9V}{2k\Omega + 1k\Omega} = 1mA$$

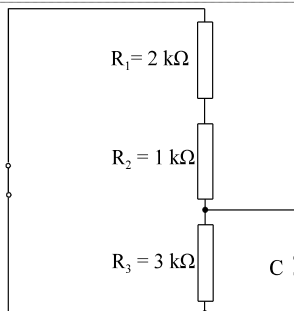
$$u_{2ANF} = i_{ANF} \cdot R_2 = 1mA \cdot 1k\Omega = 1V$$



ESB für $t \rightarrow \infty$ (Endwerte)

$$u_{2END} = U_q \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 12V \cdot \frac{1k\Omega}{2k\Omega + 1k\Omega + 3k\Omega} = 2V$$

$$u_{3END} = U_q \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 12V \cdot \frac{3k\Omega}{2k\Omega + 1k\Omega + 3k\Omega} = 6V$$



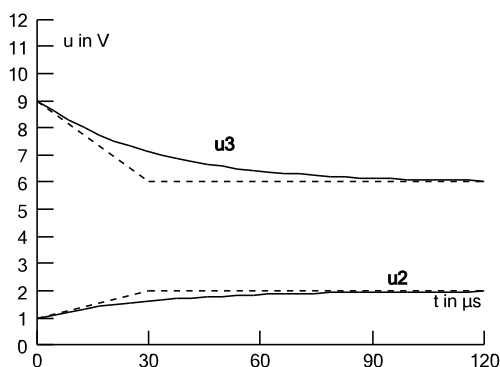
ESB für R_q^*

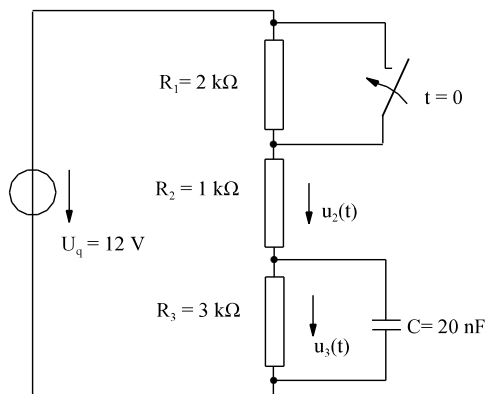
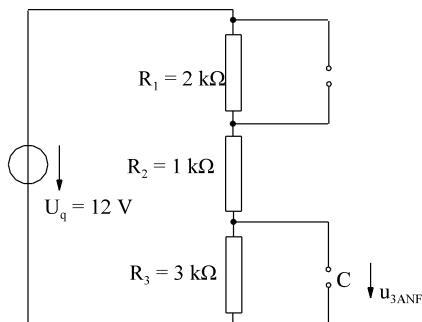
$$R_q^* = (R_1 + R_2) \parallel R_3 = (2k\Omega + 1k\Omega) \parallel 3k\Omega = 3k\Omega \parallel 3k\Omega = 1.5k\Omega$$

$$T = R_q^* \cdot C = 1.5 \cdot 10^3 \frac{V}{A} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \frac{As}{V} = 30\mu s$$

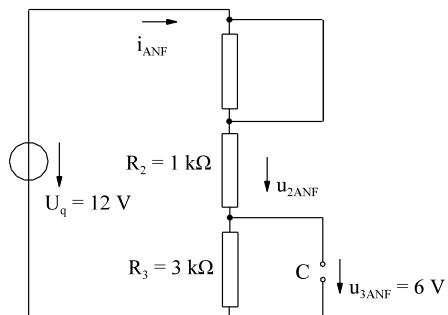
$$u_2(t) = u_{2END} + (u_{2ANF} - u_{2END}) \cdot e^{-t/T} = 2V + (1V - 2V) \cdot e^{-t/30\mu s} = 2V - 1V \cdot e^{-t/30\mu s}$$

$$u_3(t) = u_{3END} + (u_{3ANF} - u_{3END}) \cdot e^{-t/T} = 6V + (9V - 6V) \cdot e^{-t/30\mu s} = 6V + 3V \cdot e^{-t/30\mu s}$$



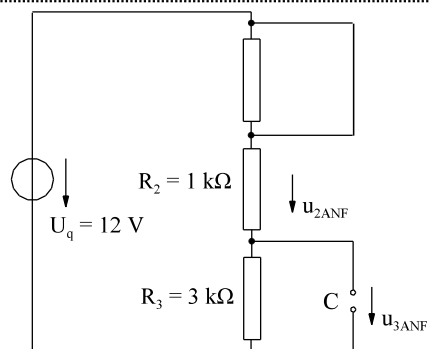
Beispiel Fgesucht: $u_2(t)$, $u_3(t)$ **Lösungsweg:**ESB für $t = -0$ (Anfangswert der energiebehafteten Größe u_3)

$$u_{3ANF} = U_q \cdot \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 12 \text{ V} \cdot \frac{3 \text{ k}\Omega}{2 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega} = 6 \text{ V}$$

ESB für $t = +0$ (Anfangswert der nicht energiebehafteten Größe u_2)

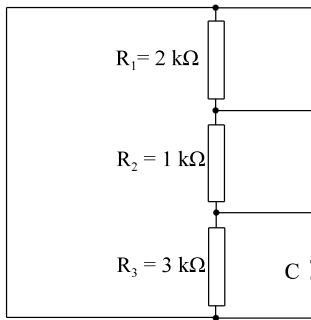
$$i_{ANF} = \frac{U_q - u_{3ANF}}{R_2} = \frac{12 \text{ V} - 6 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 6 \text{ mA}$$

$$u_{2ANF} = i_{ANF} \cdot R_2 = 6 \text{ mA} \cdot 1 \text{ k}\Omega = 6 \text{ V}$$

ESB für $t \rightarrow \infty$ (Endwerte)

$$u_{2END} = U_q \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 12 \text{ V} \cdot \frac{1 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} = 3 \text{ V}$$

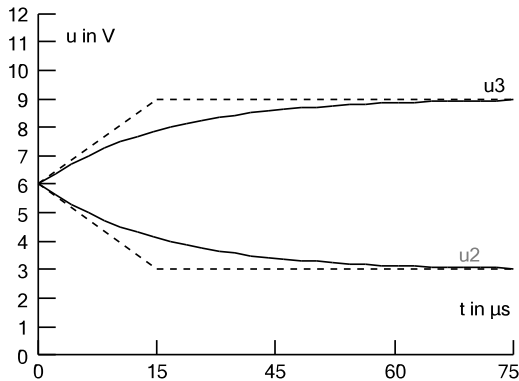
$$u_{3END} = U_q \cdot \frac{R_3}{R_2 + R_3} = 12 \text{ V} \cdot \frac{3 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega + 3 \text{ k}\Omega} = 9 \text{ V}$$



ESB für R_q^*

$$R_q^* = R_2 \parallel R_3 = 1 \text{ k}\Omega \parallel 3 \text{ k}\Omega = 0.75 \text{ k}\Omega$$

$$T = R_q^* \cdot C = 0.75 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}} \cdot 20 \cdot 10^{-9} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 15 \mu\text{s}$$



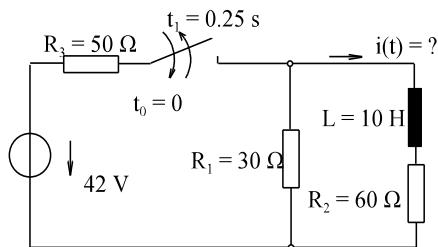
$$u_2(t) = u_{2\text{END}} + (u_{2\text{ANF}} - u_{2\text{END}}) \cdot e^{-t/T}$$

$$u_2(t) = 3 \text{ V} + (6 \text{ V} - 3 \text{ V}) \cdot e^{-t/15\mu\text{s}} = 3 \text{ V} + 3 \text{ V} \cdot e^{-t/15\mu\text{s}}$$

$$u_3(t) = u_{3\text{END}} + (u_{3\text{ANF}} - u_{3\text{END}}) \cdot e^{-t/T}$$

$$u_3(t) = 9 \text{ V} + (6 \text{ V} - 9 \text{ V}) \cdot e^{-t/15\mu\text{s}} = 9 \text{ V} - 3 \text{ V} \cdot e^{-t/15\mu\text{s}}$$

Beispiel G



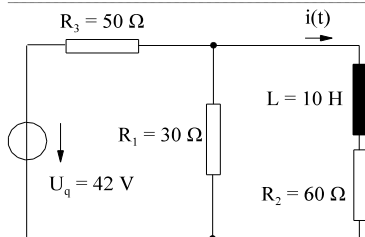
Bei dem dargestellten Schaltvorgang wird der Schalter zur Zeit $t_0 = 0$ geschlossen und zur Zeit $t = t_1 = 0.25 \text{ s}$ wieder geöffnet. Der Verlauf der gesuchten elektrischen Größe $i(t)$ ist abschnittsweise zu berechnen und zu skizzieren. Welchen Wert hat die gesuchte Größe $i(t)$ zur Zeit $t = 2t_1 = 0.5 \text{ s}$?

Lösungsweg:

$t < 0$

$\Rightarrow i = 0;$

$i_{\text{ANF}} = 0$



Bereich 1 für $0 \leq t \leq 0.25 \text{ ms}$

$$R^* = R_2 + R_1 \parallel R_3 = 60 \Omega + \frac{50 \Omega \cdot 30 \Omega}{50 \Omega + 30 \Omega} = 78.75 \Omega$$

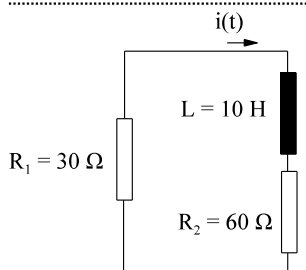
$$T_1 = \frac{L}{R^*} = \frac{10 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}}{78.75 \frac{\text{V}}{\text{A}}} = 127 \text{ ms}$$

$$i_{\text{END}} = \frac{U_q}{R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{42 \text{ V}}{50 \Omega + \frac{30 \Omega \cdot 60 \Omega}{30 \Omega + 60 \Omega}} \cdot \frac{30 \Omega}{30 \Omega + 60 \Omega} = 0.2 \text{ A}$$

$$i(t) = i_{\text{END}} \cdot (1 - e^{-t/T_1}) = 0.2 \text{ A} \cdot (1 - e^{-t/127 \text{ ms}})$$

Berechnung des Anfangswertes des 2. Zeitbereiches der energiebehafteten Größe aus Bereich 1:

$$i(t = 0.25 \text{ ms}) = 0.2 \text{ A} \cdot (1 - e^{-0.25/0.127}) = 172.1 \text{ mA}$$

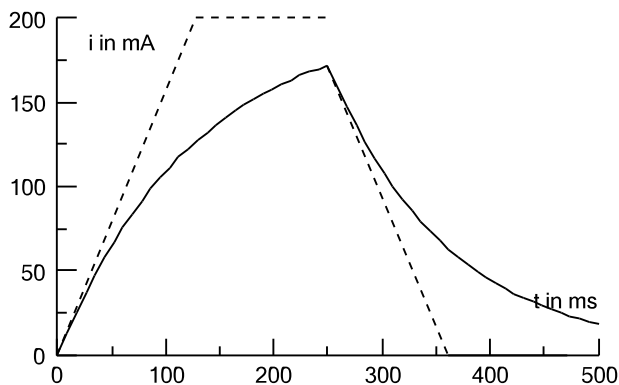


Berechnung Bereich 2, $t \geq 0.25$ ms

$$T_2 = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{10H}{30\Omega + 60\Omega} = 111ms$$

$$i_{END} = 0 \qquad i_{ANF} = 172.1 \text{ mA}$$

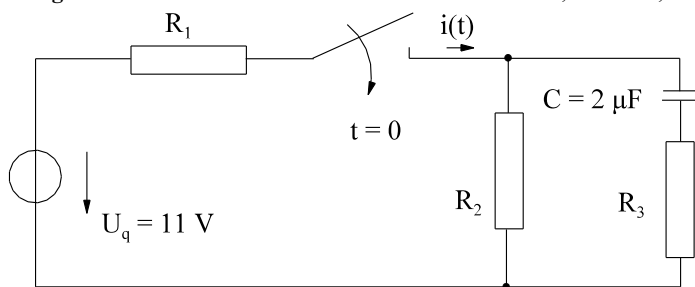
$$i(t) = i_{ANF} * e^{-\frac{t-t_1}{T_2}} = 172.1mA * e^{-\frac{t-250ms}{111ms}}$$



$$i(t = 2t_1) = i(t = 0.5ms) = 172.1mA * e^{-\frac{500ms - 250ms}{111ms}} = 18.1mA$$

Aufgabe 10.2.5.A

Klausur EG3 06.07.1995, SS1995, Aufgabe 3

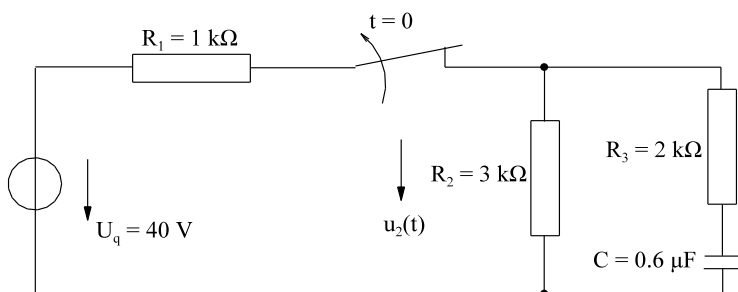


- $R_1 = 0.5 \text{ k}\Omega$
- $R_2 = 1.5 \text{ k}\Omega$
- $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$

Bei der dargestellten Anordnung wird der Schalter zur Zeit $t = 0$ geschlossen. Der Strom $i(t)$ ist zu berechnen und zu skizzieren.

Aufgabe 10.2.5.B

Klausur EG3 25.01.1997, WS1996/97, Aufgabe 6

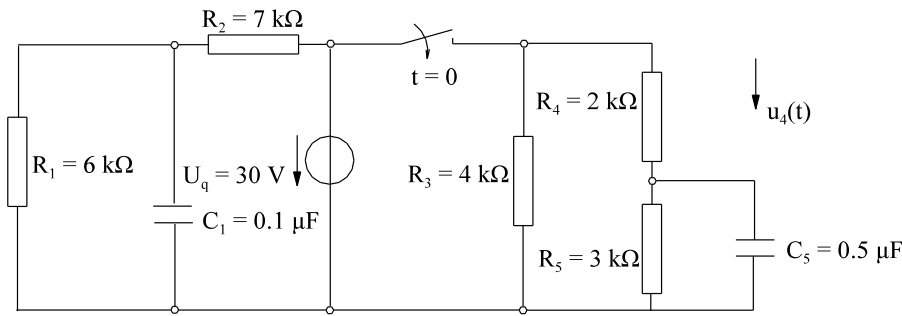


Zur Zeit $t = 0$ wird bei der dargestellten Anordnung der Schalter geöffnet.

- a) Geben Sie den Zeitverlauf $u_2(t)$ analytisch an.
- b) Skizzieren Sie den Zeitverlauf $u_2(t)$.

Aufgabe 10.2.5.C

Klausur EG3 03.07.1998, SS1998, Aufgabe 3

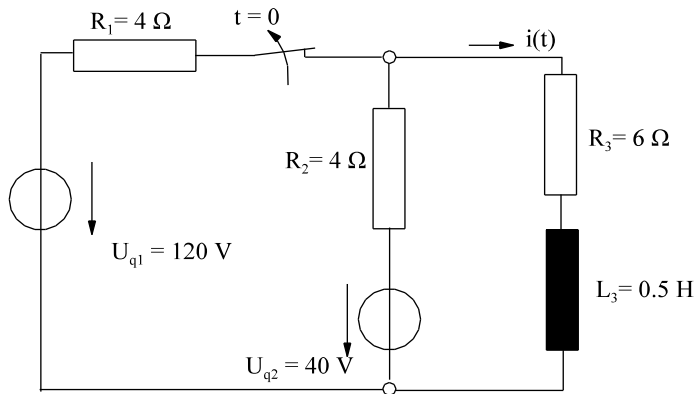


- a) Berechnen Sie für $t > 0$ den Zeitverlauf der Spannung $u_4(t)$.
- b) Stellen Sie $u_4(t)$ grafisch dar.

Hinweis: Die Aufgabe sieht kompliziert aus. Durch Überlegung vereinfacht sich die Aufgabe.

Aufgabe 10.2.5.D

Klausur EG3 19.01.2001, WS2000/2001, Aufgabe 5

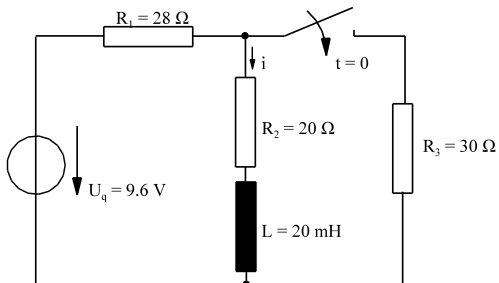


Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter des dargestellten Netzwerks geöffnet.

- a) Berechnen Sie den Strom $i(t)$.
- b) Skizzieren Sie den Strom $i(t)$.

Aufgabe 10.2.5.E

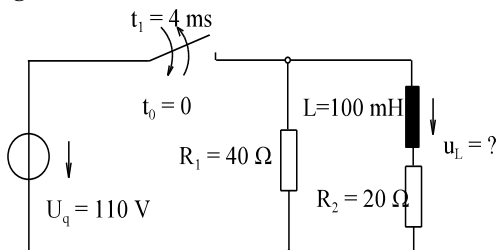
Klausur EG3 18.01.2002, WS2001/2002, Aufgabe 3



Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter des dargestellten Netzwerks geschlossen.

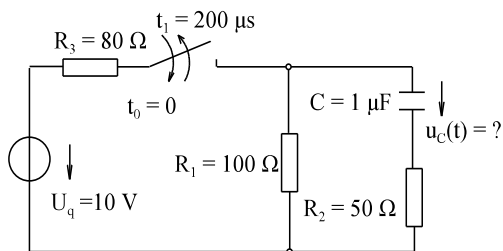
- a) Berechnen Sie den Strom $i(t)$.
- b) Skizzieren Sie den Strom $i(t)$.

Aufgabe 10.2.5.F



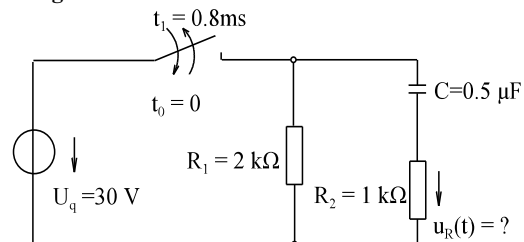
Bei dem dargestellten Schaltvorgang wird der Schalter zur Zeit $t_0 = 0$ geschlossen und zur Zeit $t = t_1 = 4$ ms wieder geöffnet. Der Verlauf der gesuchten elektrischen Größe $u_L(t)$ ist abschnittsweise zu berechnen und zu skizzieren. Welchen Wert hat die gesuchte Größe $u_L(t)$ zur Zeit $t = 2t_1 = 8$ ms?

Aufgabe 10.2.5.G



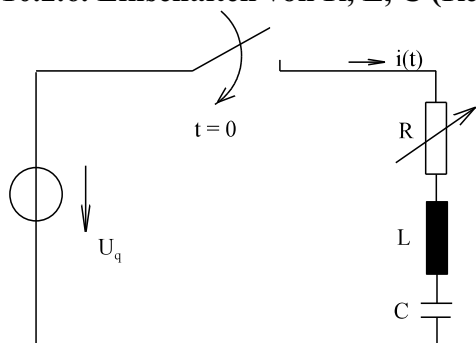
Bei dem dargestellten Schaltvorgang wird der Schalter zur Zeit $t_0 = 0$ geschlossen und zur Zeit $t = t_1 = 200 \mu\text{s}$ wieder geöffnet. Der Verlauf der gesuchten elektrischen Größe $u_C(t)$ ist abschnittsweise zu berechnen und zu skizzieren. Welchen Wert hat die gesuchte Größe $u_C(t)$ zur Zeit $t = 2t_1 = 400 \mu\text{s}$?

Aufgabe 10.2.5.H



Bei dem dargestellten Schaltvorgang wird der Schalter zur Zeit $t_0 = 0$ geschlossen und zur Zeit $t = t_1 = 0.8 \text{ ms}$ wieder geöffnet. Der Verlauf der gesuchten elektrischen Größe $u_R(t)$ ist abschnittsweise zu berechnen und zu skizzieren. Welchen Wert hat die gesuchte Größe $u_R(t)$ zur Zeit $t = 2t_1 = 1.6 \text{ ms}$?

10.2.6. Einschalten von R, L, C (Reihenschwingkreis)



- gegeben:** Anordnung nach Bild EG1026A
 $U_q = 10 \text{ V}$
 $L = 1 \text{ H}$
 $C = 1 \mu\text{F}$
 a) $R = 2.5 \text{ k}\Omega$
 b) $R = 600 \Omega$

Bild EG1026A

Ziel: Der Einfluss des Widerstandes R auf das Einschaltverhalten eines Reihenschwingkreises soll untersucht werden. Dazu soll für zwei Werte von R der Kreis berechnet werden.

Allgemeine Berechnung für Teilaufgabe a und b

Laplace-Transformation von Quelle und Widerstand:

$$U_q(p) = \frac{U_q}{p}$$

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} = \frac{p^2LC + pCR + 1}{pC}$$

Ohmsches Gesetz anwenden und umformen:

$$I(p) = \frac{U_q(p)}{Z(p)} = \frac{U_q}{p} \frac{pC}{p^2LC + pCR + 1}$$

$$I(p) = \frac{U_q}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} \tag{A}$$

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind entweder

- konjugiert komplex => periodischer Fall
- verschieden reell => aperiodischer Fall
- doppelt reell => aperiodischer Grenzfall

und ergeben sich zu:

$$p_{01,02} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (\text{B})$$

Mit den Daten für Reihenschwingkreise (Kap. 6.7.6.3, 2. Semester)

$$Q = \frac{X_0}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} \quad - \text{ Güte}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad - \text{ Resonanzkreisfrequenz}$$

lassen sich die Nullstellen auch angeben:

$$p_{01,02} = \left[-\frac{1}{2Q} \pm j \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \right] \omega_0$$

Für eine große Güte (R klein) ergibt sich ein kleiner negativer Realteil (kleine Dämpfung) und die Frequenz des Einschwingvorgangs ist nahe der Resonanzfrequenz.

Teilaufgabe a) $R = 2.5 \text{ k}\Omega$

Zahlenwertmäßige Berechnung der Nullstellen (B):

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}}} = 10^6 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{R}{2L} = \frac{2.5 * 10^3 \frac{\text{V}}{\text{A}}}{2 * 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} = 1250 \text{ s}^{-1}$$

$$p_{01,02} = -1250 \text{ s}^{-1} \pm \sqrt{(1250 \text{ s}^{-1})^2 - 10^6 \text{ s}^{-2}} = -1250 \text{ s}^{-1} \pm 750 \text{ s}^{-1}$$

$$p_{01} = -500 \text{ s}^{-1} \quad p_{02} = -2000 \text{ s}^{-1}$$

Gleichung (A) kann durch die Nullstellen ausgedrückt werden:

$$I(p) = \frac{U_q}{L} \frac{1}{p^2 + \frac{R}{Lp} + \frac{1}{LC}} = \frac{U_q}{L} \frac{1}{(p - p_{01})(p - p_{02})}$$

$$I(p) = \frac{10 \text{ V}}{1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}} \frac{1}{(p + 500 \text{ s}^{-1})(p + 2000 \text{ s}^{-1})}$$

Partialbruchzerlegung nach Zuhaltmethode:

$$I(p) = 10 \text{ As}^{-1} \frac{1}{(p + 500 \text{ s}^{-1})(p + 2000 \text{ s}^{-1})} = \frac{A_1}{p + 500 \text{ s}^{-1}} + \frac{A_2}{p + 2000 \text{ s}^{-1}}$$

$$p = p_{01} = -500 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{10 \text{ As}^{-1}}{-500 \text{ s}^{-1} + 2000 \text{ s}^{-1}} = 6.67 \text{ mA}$$

$$p = p_{02} = -2000 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \frac{10 \text{ As}^{-1}}{-2000 \text{ s}^{-1} + 500 \text{ s}^{-1}} = -6.67 \text{ mA}$$

$$I(p) = 6.67 \text{ mA} \left[\frac{1}{p + 500 \text{ s}^{-1}} - \frac{1}{p + 2000 \text{ s}^{-1}} \right]$$

Rücktransformation:

$$i(t) = 6.67 \text{ mA} \left[e^{-500 \text{ s}^{-1} \cdot t} - e^{-2000 \text{ s}^{-1} \cdot t} \right]$$

$$i(t) = 6.67 \text{ mA} \left[e^{-t/2 \text{ ms}} - e^{-t/0.5 \text{ ms}} \right] \quad (\text{C})$$

Die Konstruktion des oberen Zeitverlaufes (C) kann mit Hilfe einer Tangenten und einer Asymptoten erfolgen, siehe Bild EG1026B. Aus dem Ergebnis erhält man durch Differenzieren und Einsetzen für $t = 0$ die Steigung der Tangenten bei $t = 0$.

$$\frac{di}{dt}(t=0) = 6.67 \text{ mA} \left(-\frac{1}{2 \text{ ms}} + \frac{1}{0.5 \text{ ms}} \right) = 10 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

Gleiches Ergebnis erhält man schneller durch physikalische Betrachtung. Nach Bild EG1026A ergibt sich $t = 0$ kein Strom. Die Spannungen $u_C(t=0) = 0$ und $u_R(t=0) = 0$ führen dazu, dass für $t = 0$ die volle Spannung U_q an L liegt. Somit gilt

$$U_q = u_L(t=0) = L \cdot \frac{di}{dt}(t=0) \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt}(t=0) = \frac{U_q}{L} = \frac{10 \text{ V}}{1 \frac{\text{A}}{\text{s}}} = 10 \frac{\text{A}}{\text{s}}$$

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{5 \text{ mA}}{0.5 \text{ ms}}$$

Gleichung (C) beinhaltet zwei e-Funktionen mit unterschiedlichen Zeitkonstanten. Für $t \rightarrow \infty$ ist die Funktion mit der größeren Zeitkonstant $T = 2 \text{ ms}$ die Asymptote. Aus Steigung und Asymptote kann der Zeitverlauf $i(t)$ nach (C) skizziert werden, siehe Bild EG1026B.

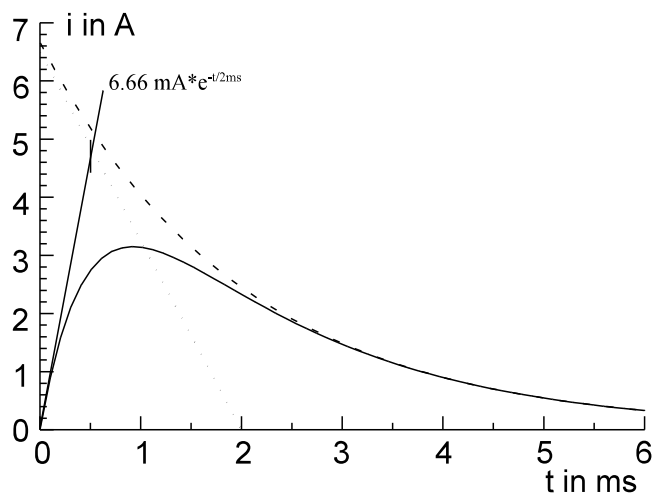


Bild EG1026B: Lösung Teilaufgabe a, $R = 2500 \Omega$

Weitere Ergebnisse für verschiedene R sind später in diesem Abschnitt dargestellt.

Teilaufgabe b) R = 600 Ω

Zahlenwertmäßige Berechnung der Nullstellen (B):

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{1 \frac{Vs}{A} * 10^{-6} \frac{As}{V}} = 10^6 \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{R}{2L} = \frac{600 \frac{V}{A}}{2 \frac{Vs}{A}} = 300 \text{ s}^{-1}$$

$$p_{01,02} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -300 \text{ s}^{-1} \pm j \sqrt{10^6 \text{ s}^{-2} - (300 \text{ s}^{-1})^2} = -300 \text{ s}^{-1} \pm j953.9 \text{ s}^{-1}$$

Die Gleichung (A) mit Hilfe der konjugiert komplexen Nullstellen umgeformt ergibt:

$$(p - p_{0re} + jp_{0im})(p - p_{0re} - jp_{0im}) = (p - p_{0re})^2 + (p_{0im})^2$$

$$I(p) = \frac{U_q}{L} \frac{1}{(p + 300 \text{ s}^{-1})^2 + (953.9 \text{ s}^{-1})^2} = \frac{10 \text{ V}}{1 \frac{Vs}{A} * 953.9 \text{ s}^{-1}} \frac{953.9 \text{ s}^{-1}}{(p + 300 \text{ s}^{-1})^2 + (953.9 \text{ s}^{-1})^2}$$

$$I(p) = 10.5 \text{ mA} \frac{953.9 \text{ s}^{-1}}{(p + 300 \text{ s}^{-1})^2 + (953.9 \text{ s}^{-1})^2}$$

Rücktransformation:

$$i(t) = 10.5 \text{ mA} * e^{-300 \text{ s}^{-1} * t} * \sin(953.9 \text{ s}^{-1} t) = 10.5 \text{ mA} * e^{-t/3.33 \text{ ms}} * \sin\left(2\pi \frac{t}{2\pi / 953.9 \text{ s}^{-1}}\right)$$

$$i(t) = 10.5 \text{ mA} * e^{-300 \text{ s}^{-1} * t} * \sin\left(2\pi \frac{t}{6.59 \text{ ms}}\right)$$

Die Lösung stellt eine mit 3.33 ms gedämpfte Schwingung der Amplitude 10.5 mA und der Periodendauer von 6.59 ms dar, siehe Bild EG1026C.

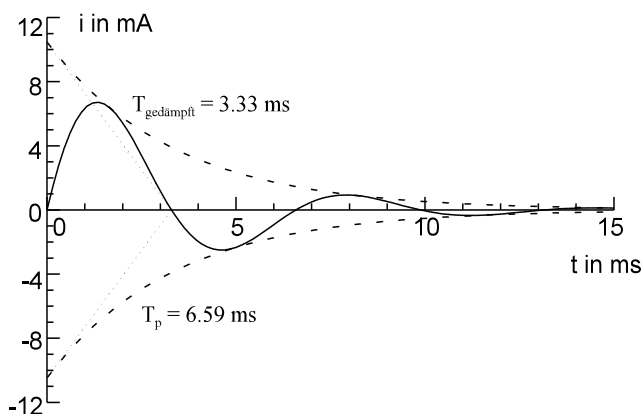


Bild EG1026C: Lösung Teilaufgabe b, R = 600 Ω

Einfluss des Widerstandes R

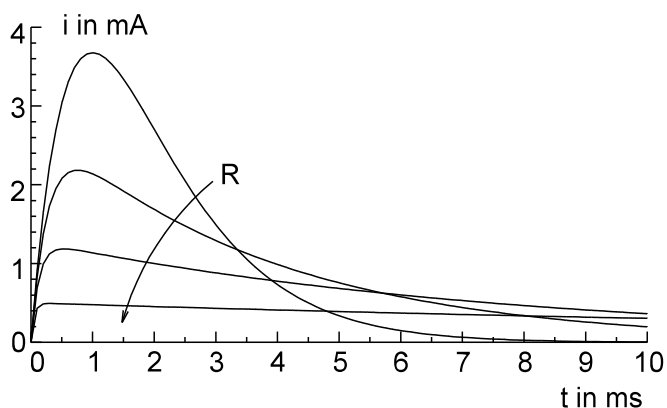


Bild EG1026D: Einschalten eines Reihenschwingkreises an einer Gleichspannungsquelle
 $U_q = 10 \text{ V}$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = (2.002, 4, 8, 20) \text{ k}\Omega$

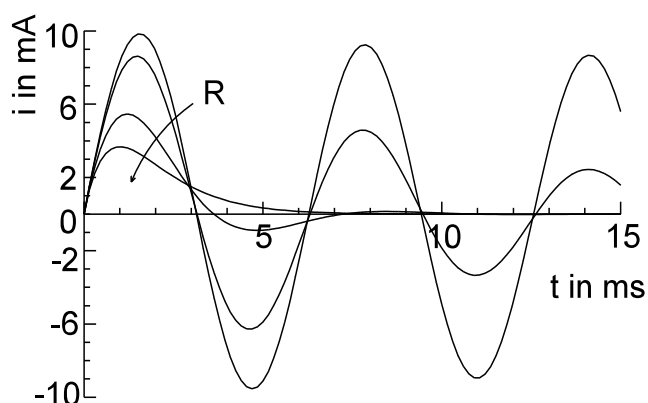
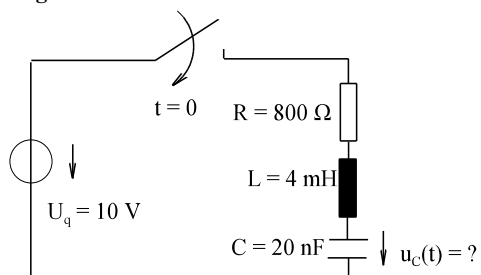


Bild EG1026E: Einschalten eines Reihenschwingkreises an einer Gleichspannungsquelle
 $U_q = 10 \text{ V}$, $L = 1 \text{ H}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = (1998, 1000, 200, 20) \Omega$

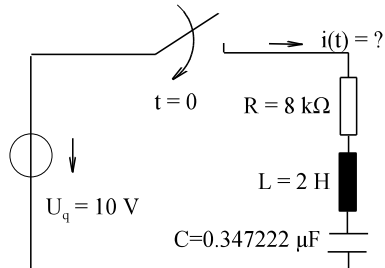
Aufgabe 10.2.6.A

Berechnen Sie die Spannung $u_C(t)$.



Aufgabe 10.2.6.B

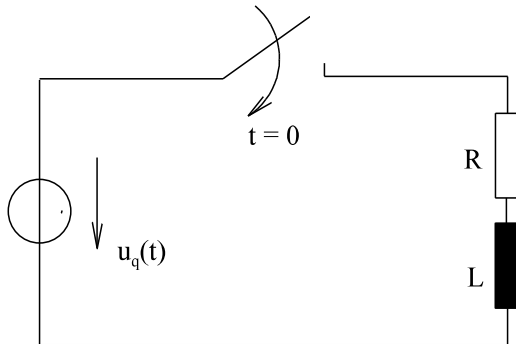
Berechnen Sie den Strom $i(t)$.



10.3. Schalten von Wechselspannungsquellen

10.3.1. Prinzip

Das Prinzip zur Behandlung von Wechselquellen soll am Beispiel (Bild EG1031A) entwickelt werden. Die Lösung der vollständigen DGL ist immer möglich, aber aufwendig. Es wird eine praktische Methode zur Bestimmung der Schaltvorgänge an Wechselquellen entwickelt. Für das untere Beispiel soll erstmal die Lösung der vollständigen DGL durchgeführt werden. Anschließend soll das Ergebnis analysiert werden, ob dieses nicht einfacher zu bestimmen ist.



$$u_q(t) = \hat{u}_A \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_B \cdot \sin(\omega t)$$

Bild EG1031A

Aus dem **Maschenumlauf** in Bild EG1031A ergibt sich die **DGL**:

$$u_q(t) = R \cdot i + L \frac{di}{dt} = \hat{u}_A \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_B \cdot \sin(\omega t)$$

A) homogene Lösung:

$$i_{\text{hom}} = C \cdot e^{-t/T} \quad T = L/R$$

B) spezielle Lösung:

Ansatz: $i_{\text{sp}} = A \cdot \cos(\omega t) - B \cdot \sin(\omega t)$

Ableitung: $\frac{di_{\text{sp}}}{dt} = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$

Einsetzen in die DGL: $R \cdot A \cdot \cos(\omega t) - R \cdot B \cdot \sin(\omega t) - L \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - L \cdot B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = \hat{u}_A \cdot \cos(\omega t) - \hat{u}_B \cdot \sin(\omega t)$

Die obere Gleichung ist nur erfüllt, wenn die Gleichung für Sinus- und Kosinusfunktion einzeln erfüllt ist. Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$R \cdot A - L \cdot B \cdot \omega = \hat{u}_A$$

$$\omega \cdot L \cdot A + R \cdot B = \hat{u}_B$$

$$\omega L = X$$

Überführen in Matrix-Schreibweise und Lösung:

$$\begin{bmatrix} R & -X \\ X & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_A \\ \hat{u}_B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{R^2 + X^2} \cdot \begin{bmatrix} R & X \\ -X & R \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{u}_A \\ \hat{u}_B \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{R \cdot \hat{u}_A + X \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2}$$

$$B = \frac{-X \cdot \hat{u}_A + R \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2}$$

Einsetzen von A und B in den Ansatz ergibt die spezielle Lösung:

$$i_{\text{sp}} = \frac{R \cdot \hat{u}_A + X \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2} \cos(\omega t) - \frac{-X \cdot \hat{u}_A + R \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2} \sin(\omega t)$$

$i_{sp}(t)$ wird mit Hilfe der komplexen Rechnung in einem ruhenden Scheitelwertzeiger gewandelt:

$$\begin{array}{ll} \hat{i} \cdot \cos(\omega t) & \text{○} \text{-----} \bullet \qquad \qquad \qquad \hat{i} | 0^\circ \\ -\hat{i} \cdot \sin(\omega t) & \text{○} \text{-----} \bullet \qquad \qquad \qquad -\hat{i} | -90^\circ = \hat{i} | 90^\circ \end{array}$$

$$\hat{i}_{sp} = \frac{R \cdot \hat{u}_A + X \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2} + j \frac{-X \cdot \hat{u}_A + R \cdot \hat{u}_B}{R^2 + X^2} \quad (\text{A})$$

Transformation von $u_q(t)$ und R, L ergibt

$$\hat{u}_q = \hat{u}_A + j\hat{u}_B \qquad \underline{Z} = R + j\omega L = R + jX = \omega L$$

Der ruhende Scheitelwertzeiger lässt sich mit Hilfe der komplexen Rechnung angeben:

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \frac{\hat{u}_q}{\underline{Z}} = \frac{\hat{u}_A + j\hat{u}_B}{R + jX} \cdot \frac{R - jX}{R - jX} = \frac{\hat{u}_A \cdot R + j\hat{u}_B \cdot R - j\hat{u}_A \cdot X + \hat{u}_B \cdot X}{R^2 + X^2} \\ \hat{i} &= \frac{\hat{u}_A \cdot R + \hat{u}_B \cdot X}{R^2 + X^2} + j \frac{\hat{u}_B \cdot R - \hat{u}_A \cdot X}{R^2 + X^2} \end{aligned} \quad (\text{B})$$

Ein Vergleich der Gleichungen (A) und (B) zeigt, daß der Zeitverlauf, der mit Hilfe der komplexen Wechselstrom-Methode berechnet wird, die spezielle Lösung ergibt.

10.3.2. Schema

A) Homogene Lösung:

Die Anregung (Wechselquelle) liefert nach Aufstellen der DGL den inhomogenen Teil der DGL und hat somit auf die homogene DGL keinen Einfluss. Die homogene Lösung kann wie beim Schalten von Gleichquellen bestimmt werden. Bei nur einem Energiespeicher im Kreis ergibt sich eine DGL 1. Ordnung mit der homogenen Lösung

$$y_{\text{hom}} = C_1 \cdot e^{-t/T}$$

Die Zeitkonstante kann wie in Abschnitt 10.2.5.5 (Punkt 3) beschrieben, durch Bestimmung des Widerstandes an den Klemmen des Energiespeichers bestimmt werden:

$$T = R \cdot C \quad \text{oder} \quad T = \frac{L}{R}$$

Sind n Energiespeicher im Kreis, muss die DGL aufgestellt werden, siehe Abschnitt 10.5.

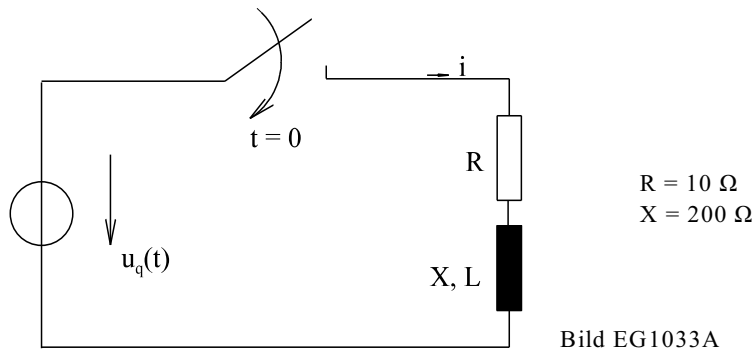
B) Spezielle Lösung:

Die spezielle Lösung, wird mit Hilfe der ruhenden Scheitelwertzeiger und der komplexen Rechnung bestimmt.

C) Addieren von spezieller und homogener Lösung

D) Integrationskonstante(n) mit Hilfe der Anfangsbedingung(en) bestimmen

10.3.3. Beispiel: Einschalten R, L



- a) $u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \sin(\omega t)$ $f = 50 \text{ Hz}$ Einschalten im Nulldurchgang der Spannung
- b) $u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \cos(\omega t)$ $f = 50 \text{ Hz}$ Einschalten im Maximum der Spannung

Teilaufgabe a

A) homogene Lösung:

$$i_{\text{hom}}(t) = c_1 * e^{-t/T}$$

$$T = \frac{L}{R} = \frac{X}{\omega * R} = \frac{200 \Omega}{2\pi * 50 \text{ s}^{-1} * 10 \Omega} = 63.66 \text{ ms}$$

B) spezielle Lösung:

$$\hat{i}_{\text{sp}} = \frac{\hat{u}_q}{\underline{Z}} \quad \sin(\omega t) \quad \text{O} \cdots \bullet \quad -j$$

$$\hat{u}_q = \sqrt{2} 220 \text{ V} (j) \quad \underline{Z} = R + jX = (10 + j200) \Omega \quad \hat{u}_q = -j\sqrt{2} 220 \text{ V}$$

$$\hat{i}_{\text{sp}} = \frac{\hat{u}_q}{\underline{Z}} = \frac{-j\sqrt{2} 220 \text{ V}}{(10 + j200) \Omega} = -1.552 \text{ A} - j0.0776 \text{ A}$$

$$i_{\text{sp}}(t) = -1.552 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.0776 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

C) gesamte Lösung:

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{sp}} = C_1 * e^{-t/T} - 1.552 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.0776 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

D) Integrationskonstanten bestimmen

$$i(t=0) = 0 = C_1 - 1.552 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 1.552 \text{ A}$$

$$i(t) = 1.552 \text{ A} * e^{-t/T} - 1.552 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.0776 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

Die Ergebnisse sind in den Bildern EG1033B bis EG1033D dargestellt.

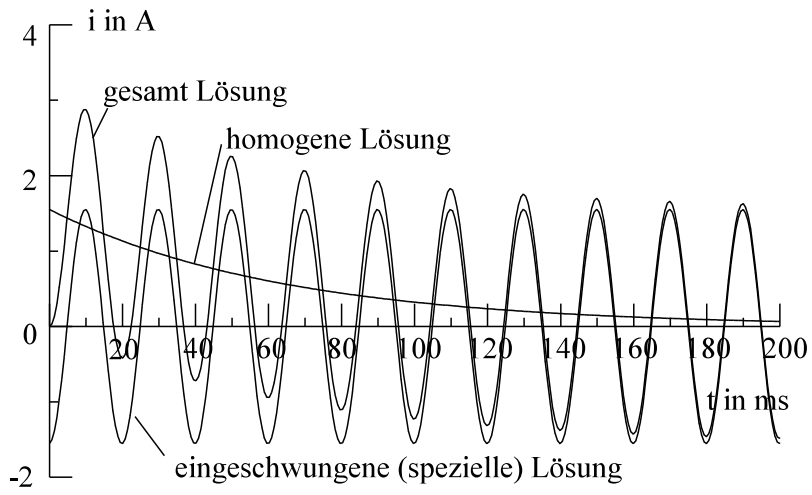


Bild EG1033B: Einschalten im Nulldurchgang der Spannung

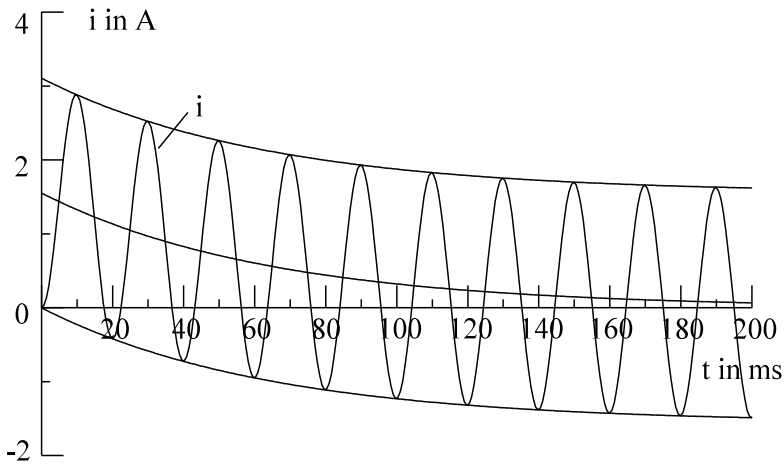


Bild EG1033C: Einschalten im Nulldurchgang der Spannung

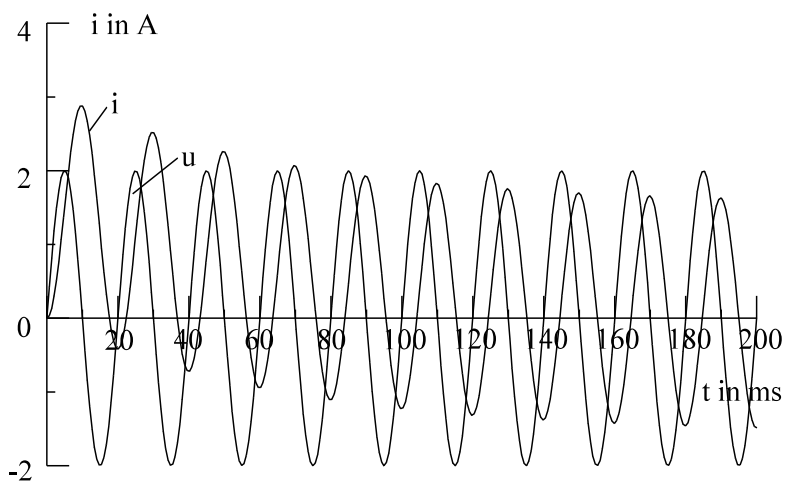


Bild EG1033D: Einschalten im Nulldurchgang der Spannung

Teilaufgabe b

A) homogene Lösung:

$$i_{\text{hom}}(t) = c_1 * e^{-t/T}$$

$$T = 63.66 \text{ ms}$$

(kein Unterschied zu a)

B) Spezielle Lösung:

$$u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \cos(\omega t)$$

$$\hat{i}_{\text{sp}} = \frac{u_q}{Z} \quad \cos(\omega t) \quad \text{O} \cdots \bullet \quad 1$$

$$\hat{u}_q = \sqrt{2} 220 \text{ V} \quad Z = R + jX = (10 + j200) \Omega$$

$$\hat{i}_{\text{sp}} = \frac{u_q}{Z} = \frac{\sqrt{2} 220 \text{ V}}{(10 + j200) \Omega} = 0.0776 \text{ A} - j 1.552 \text{ A}$$

$$i_{\text{sp}}(t) = 0.0776 \text{ A} * \cos(\omega t) + 1.552 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

C) gesamte Lösung

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{sp}} = C_1 * e^{-t/T} + 0.0776 \text{ A} * \cos(\omega t) + 1.552 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

D) Integrationskonstanten bestimmen

$$i(t=0) = 0 = C_1 + 0.0776 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -0.0776 \text{ A}$$

$$i(t) = -0.0776 \text{ A} * e^{-t/T} + 0.0776 \text{ A} * \cos(\omega t) + 1.552 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

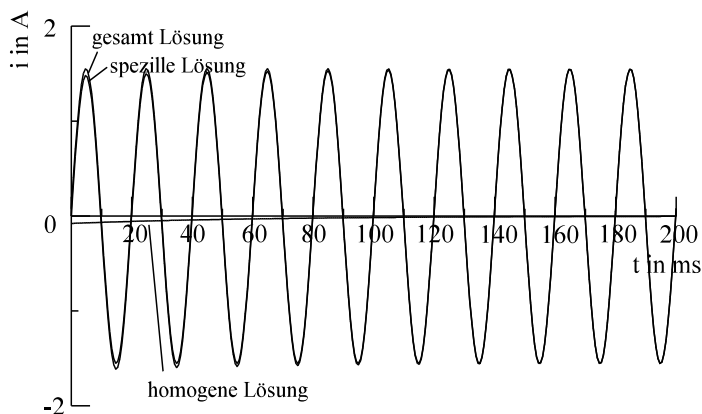


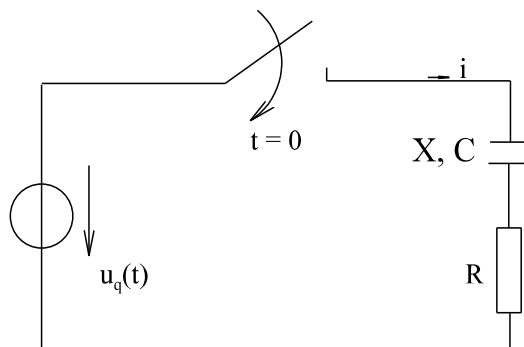
Bild EG1033E: Einschalten im Maximum der Spannung

Fazit aus oberen Beispiel:

Das Einschalten einer Induktivität im Spannungsmaximum (Beispiel, Teil b) ist unproblematisch und führt zu keinen erhöhten Strömen.

Das Einschalten einer linearen Induktivität im Spannungsnulldurchgang (Beispiel, Teil a) führt im ungünstigsten Fall zum doppelten Einschaltstrom. Der doppelte Strom wäre über kurze Zeit zu verkraften. Da aber gut ausgenutzte Geräte bei Flussdichten von 1 T betrieben werden, befindet man sich bei doppelter Flussdichte im stark nichtlinearen Bereich der MKL. Hier ohne Nachweis: Aufgrund der nichtlinearen DGL können Einschaltströme bis zum 20 fachen des Nennstromes für kurze Zeit auftreten.

10.3.4. Beispiel: Einschalten R, C



gegeben:

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$C = 10 \mu\text{F}$$

$$X = -318.5 \Omega$$

$$R = 1 \Omega$$

$$\text{a) } u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \cos(\omega t)$$

$$\text{b) } u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \sin(\omega t)$$

Bild EG1035A

Teillösung a

A) homogene Lösung:

$$i_{\text{hom}} = C_1 * e^{-t/T} \quad T = R * C = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} * 10 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 10 \mu\text{s}$$

B) spezielle Lösung:

$$u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \cos(\omega t)$$

$$\hat{u}_q = \sqrt{2} * 220 \text{ V}$$

$$\hat{i}_{\text{-sp}} = \frac{\underline{u}_q}{\underline{Z}} = \frac{\sqrt{2} * 220 \text{ V}}{(1 - j318.3) \Omega} = 0.0031 \text{ A} + j0.9775 \text{ A}$$

$$i_{\text{sp}} = 0.0031 \text{ A} * \cos(\omega t) - 0.9775 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

C) gesamte Lösung:

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{sp}} = C_1 * e^{-t/T} + 0.0031 \text{ A} * \cos(\omega t) - 0.9775 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

D) Integrationskonstanten bestimmen:

$$i(t=0) = \frac{u_q(t=0)}{R} = \frac{\sqrt{2} * 220 \text{ V}}{1 \Omega} = C_1 + 0.0031 \text{ A}$$

$$\Rightarrow C_1 = 311.1 \text{ A}$$

$$i(t) = 311.1 \text{ A} * e^{-t/10 \mu\text{s}} + 0.0031 \text{ A} * \cos\left(2\pi \frac{t}{20 \text{ ms}}\right) - 0.9775 \text{ A} * \sin\left(2\pi \frac{t}{20 \text{ ms}}\right)$$

Teillösung b

A) homogene Lösung:

$$i_{\text{hom}} = C_1 * e^{-t/T} \quad T = R * C = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}} * 10 * 10^{-6} \frac{\text{As}}{\text{V}} = 10 \mu\text{s}$$

B) spezielle Lösung:

$$u_q(t) = \sqrt{2} * 220 \text{ V} * \sin(\omega t)$$

$$\hat{u}_q = -j\sqrt{2} * 220 \text{ V}$$

$$\hat{i}_{\text{-sp}} = \frac{\underline{u}_q}{\underline{Z}} = \frac{-j220 \text{ V} * \sqrt{2}}{(1 - j318.3) \Omega} = 0.9775 \text{ A} - j0.0031 \text{ A}$$

$$i_{\text{sp}} = 0.9775 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.0031 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

C) gesamte Lösung:

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{sp}} = C_1 * e^{-t/T} + 0.9775 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.0031 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

D) Integrationskonstanten bestimmen:

$$i(t=0) = \frac{u_q(t=0)}{R} = 0 = C_1 + 0.9775 \text{ A}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0.9775 \text{ A}$$

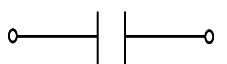
$$i(t) = -0.9775 \text{ A} * e^{-t/10\mu\text{s}} + 0.9775 \text{ A} * \cos\left(2\pi \frac{t}{20 \text{ ms}}\right) + 0.0031 \text{ A} * \sin\left(2\pi \frac{t}{20 \text{ ms}}\right)$$

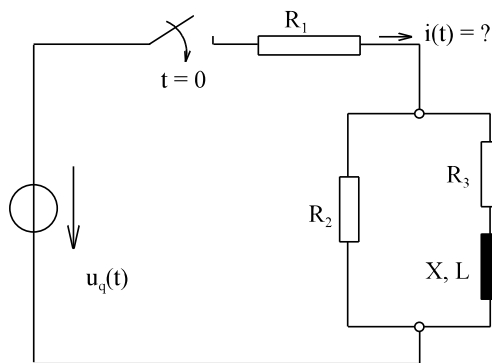
Kommentar:

Das Einschalten einer Kapazität im Spannungsmaximum ergibt nach Teillösung a einen kurzen hohen Stromimpuls. Dieses ist im Spannungsnulldurchgang nach Teillösung b nicht der Fall.

10.3.5. Optimales Einschalten

 im Spannungsmaximum

 im Spannungsnulldurchgang

10.3.6. Aufgabe zu Abschnitt 10.3**Aufgabe 10.3.A**

Der Strom $i(t)$ ist zu berechnen.

$$R_1 = 13.5 \Omega$$

$$R_2 = 45 \Omega$$

$$R_3 = 5 \Omega$$

$$X = 20 \Omega$$

$$u_q(t) = 220 \text{ V} * \sqrt{2} * \cos(\omega t + 30^\circ)$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

10.4. Mehrere Quellen im Kreis

Schema

A) homogene Lösung:

Da die Anregung nur den inhomogenen Teil der DGL betrifft, besteht kein Unterschied zu den bisher Erwähnten.

B) spezielle Lösung:

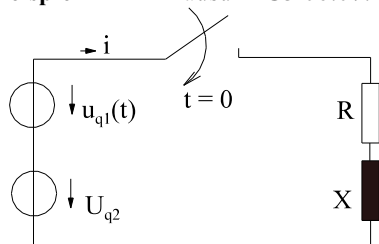
Bei einem linearen Netzwerk können die Wirkungen jeder Quelle überlagert werden, somit können auch die speziellen Lösungen jeder Quelle einzeln berechnet werden und anschließend zur vollständigen speziellen Lösung addiert werden.

Wechselstrom: komplexe Methode anwenden
Gleichstrom: Zustand für $t \rightarrow \infty$ auswerten

C) homogene und vollständige spezielle Lösung addieren

D) Anfangsbedingung(en) zur Bestimmung der Integrationskonstante(n) auswerten.

Beispiel 1 Klausur EG3 06.07.1995, SS1995, Aufgabe 4



$R = 20 \Omega$
 $X = 20 \Omega$
 $u_{q1}(t) = 50 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$
 $U_{q2} = 100 \text{ V}$
 $f = 50 \text{ Hz}$

Bei der dargestellten Anordnung wird der Schalter zur Zeit $t = 0$ geschlossen. Der Strom $i(t)$ ist zu berechnen.

Lösungsweg:

A) Homogene Lösung

$$i_{\text{hom}} = K_1 \cdot e^{-t/T}$$

$$T = \frac{L}{R} = \frac{X}{2\pi \cdot f \cdot R} = \frac{20 \Omega}{2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} \cdot 20 \Omega} = 3.183 \text{ ms}$$

B1) Spezielle Lösung 1

$$\hat{i}_{\text{spe1}} = \frac{\hat{u}_{q1}}{Z} = \frac{50 \text{ V} \angle 0^\circ}{20 \Omega + 20 \Omega} = \frac{50 \text{ V} \angle 0^\circ}{\sqrt{2} \cdot 20 \Omega \angle 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot 1.25 \text{ A} \angle -45^\circ = 1.768 \text{ A} \angle -45^\circ = 1.25 \text{ A} - j1.25 \text{ A}$$

$$i_{\text{spe1}}(t) = 1.25 \text{ A} \cdot \cos(\omega t) + 1.25 \text{ A} \cdot \sin(\omega t)$$

B2) Spezielle Lösung 2

$t \rightarrow \infty$ Auswirkung U_{q2}

$$i_{\text{spe2}} = \frac{U_{q2}}{R} = \frac{100 \text{ V}}{20 \Omega} = 5 \text{ A}$$

Gesamte Lösung

$$i(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{spe1}} + i_{\text{spe2}}$$

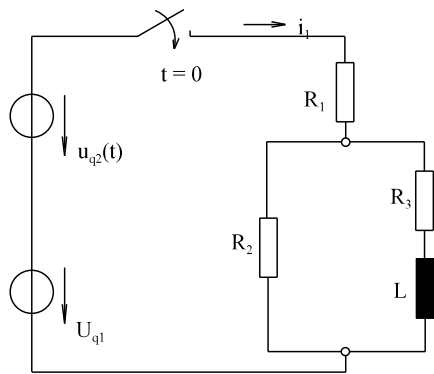
$$i(t) = K_1 \cdot e^{-t/T} + 1.25 \text{ A} \cdot \cos(\omega t) + 1.25 \text{ A} \cdot \sin(\omega t) + 5 \text{ A}$$

$$i(t=0) = 0 = K_1 + 1.25 \text{ A} + 5 \text{ A} \quad \Rightarrow$$

$$K_1 = -6.25 \text{ A}$$

$$i(t) = -6.25 \text{ A} \cdot e^{-t/3.183 \text{ ms}} + 1.25 \text{ A} \cdot \cos(\omega t) + 1.25 \text{ A} \cdot \sin(\omega t) + 5 \text{ A}$$

Beispiel 2



gegeben: Anordnung nach Bild EG1042A

$$R_1 = 20 \, \Omega$$

$$R_2 = 30 \, \Omega$$

$$R_3 = 50 \, \Omega$$

$$L = 0.31 \, \text{H}$$

$$U_{q1} = 155 \, \text{V}$$

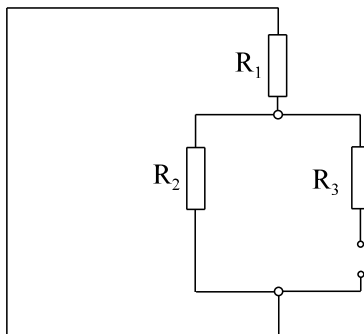
$$u_{q2}(t) = 200 \, \text{V} \cdot \cos(\omega t)$$

$$f = 50 \, \text{Hz}$$

gesucht: $i_1(t)$

Bild EG1042A

homogene Lösung:



$$R^* = R_3 + R_1 \parallel R_2 = 50 \, \Omega + \frac{20 \, \Omega \cdot 30 \, \Omega}{20 \, \Omega + 30 \, \Omega} = 62 \, \Omega$$

$$T = \frac{L}{R^*} = \frac{0.31 \, \text{H}}{62 \, \Omega} = 5 \, \text{ms}$$

$$i_{\text{hom}} = c_1 \cdot e^{-t/T} = c_1 \cdot e^{-t/5\text{ms}}$$

EG1042B:

ESB für Zeitkonstante

Spezielle Lösung von U_{q1}

Für $t \rightarrow \infty$ hat L keinen Einfluss mehr ($u_L = 0$). Für $t \rightarrow \infty$ wirkt L für die Gleichquelle wie ein Kurzschluss.

$$i_{\text{sp1}} = \frac{U_{q1}}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = \frac{155 \, \text{V}}{20 \, \Omega + \frac{30 \, \Omega \cdot 50 \, \Omega}{30 \, \Omega + 50 \, \Omega}} = 4 \, \text{A}$$

Spezielle Lösung von $u_{q2}(t)$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L = 50 \, \Omega + j 2\pi \cdot 50 \, \text{s}^{-1} \cdot 0.31 \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = (50 + j 97.39) \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot R_2}{\underline{Z}_3 + R_2} = \frac{\underline{Z}_3 \cdot 30 \, \Omega}{\underline{Z}_3 + 30 \, \Omega} = (25.47 + j 5.52) \, \Omega$$

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R_1 + \underline{Z}_{23} = 20 \, \Omega + \underline{Z}_{23} = (45.47 + j 5.52) \, \Omega$$

$$\hat{u}_{q2} = 200 \, \text{V}$$

$$\hat{i}_{\text{sp2}} = \frac{\hat{u}_{q2}}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = \frac{200 \, \text{V}}{\underline{Z}_{\text{ges}}} = (4.33 - j 0.53) \, \text{A}$$

$$i_{\text{sp2}}(t) = 4.33 \, \text{A} \cdot \cos(\omega t) + 0.53 \, \text{A} \cdot \sin(\omega t)$$

Gesamte Lösung

$$i_1(t) = i_{\text{hom}} + i_{\text{sp1}} + i_{\text{sp2}} = c_1 \cdot e^{-t/5\text{ms}} + 4 \, \text{A} + 4.33 \, \text{A} \cdot \cos(\omega t) + 0.53 \, \text{A} \cdot \sin(\omega t)$$

Anfangsbedingung auswerten

Für $t = 0$ gilt: $i_3(t=0)$. Somit kann für $t = 0$ der Zweig 3 als offen angesehen werden:

$$i_1(t=0) = \frac{U_{q1} + u_{q2}(t=0)}{R_1 + R_2} = \frac{155 \, \text{V} + 200 \, \text{V}}{20 \, \Omega + 30 \, \Omega} = 7.1 \, \text{A}$$

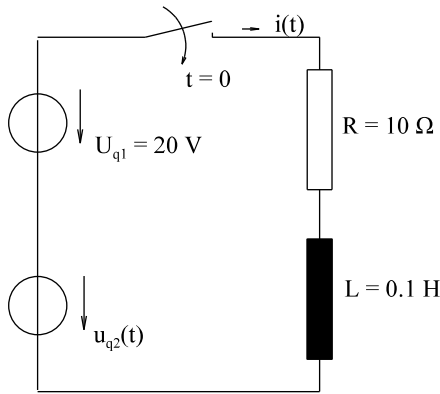
$$i_1(t=0) = c_1 + 4 \, \text{A} + 4.33 \, \text{A} = 7.1$$

$$c_1 = 7.1 \, \text{A} + 4 \, \text{A} - 4.33 \, \text{A} = -1.23 \, \text{A}$$

$$i(t) = -1.23 \, \text{A} \cdot e^{-t/5\text{ms}} + 4 \, \text{A} + 4.33 \, \text{A} \cdot \cos(\omega t) + 0.53 \, \text{A} \cdot \sin(\omega t)$$

Aufgaben zu Abschnitt 10.4

Aufgabe 10.4.A (Klausur EG3 03.07.1998, SS1998, Aufgabe 4)

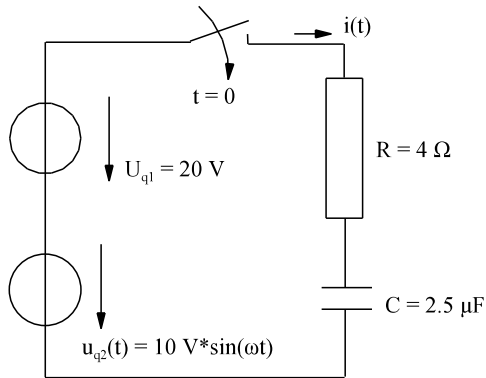


$$u_{a2}(t) = 50 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$$

$$f = \frac{100 \text{ Hz}}{2\pi}$$

Berechnen Sie den Strom $i(t)$.

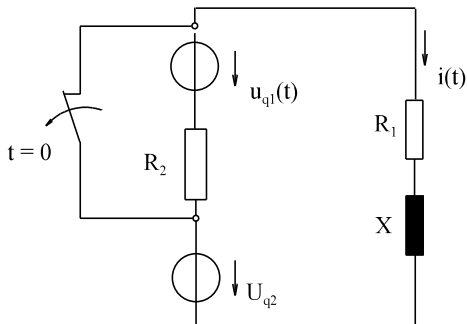
Aufgabe 10.4.B (Klausur EG3 18.01.2002, WS2001/2002, Aufgabe 1)



$$f = \frac{100 \text{ kHz}}{2\pi}$$

Bei der dargestellten Anordnung wird bei $t = 0$ der Schalter geschlossen. Der Strom $i(t)$ ist zu berechnen. Zum Zeitpunkt des Einschaltens ist der Kondensator entladen.

Aufgabe 10.4.C



Für das dargestellte Netzwerk soll der Strom $i(t)$ berechnet werden.

$$U_{a2} = 150 \text{ V}$$

$$u_{q1} = 220 \text{ V} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t)$$

$$R_1 = 50 \text{ Ohm}$$

$$R_2 = 100 \text{ Ohm}$$

$$X = 120 \text{ Ohm}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

10.5. Netzwerke mit mehreren L und C

Bei entladenen Energiespeichern kann mit Laplace transformierten Widerständen gerechnet werden, siehe u.a. Abschnitt 10.2.5.3.

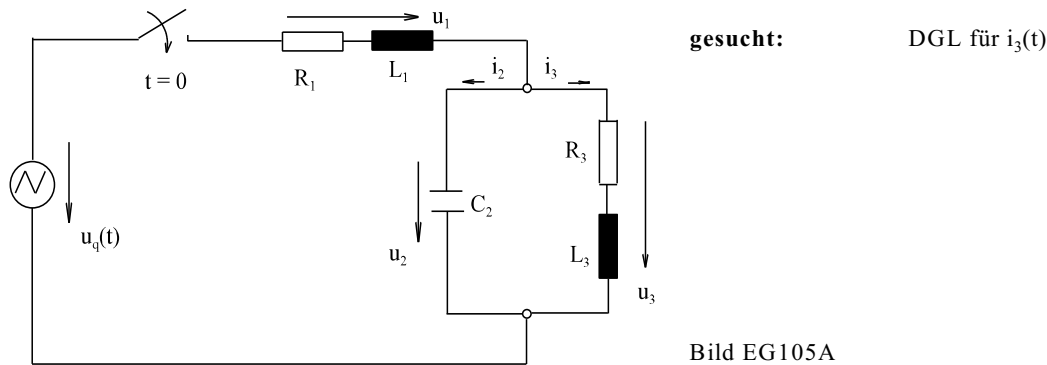
Im Zeitbereich kann die spezielle Lösung nach den schon bekannten Verfahren bestimmt werden:

Gleichstrom: Zustand für $t \rightarrow \infty$ auswerten
Wechselstrom: komplexe Methode anwenden

Die homogenen Lösung muss durch Aufstellen der DGL ermittelt werden. Zwei Möglichkeiten bieten sich an:

- Maschen- und Knotenanalyse (siehe Kap. 10.2.5.1)
- rekursives Einsetzen der gewählten Variable (siehe unteres Beispiel und Kap. 10.2.5.2)

Beispiel:



Lösungsweg:

$$u_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} + R_3 \cdot i_3$$

$$i_2 = C_2 \cdot \frac{du_2}{dt} = C_2 \cdot \frac{du_3}{dt}$$

$$\frac{du_3}{dt} = L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R_3 \cdot \frac{di_3}{dt}$$

$$i_2 = C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{di_3}{dt}$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3$$

$$u_1 = R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} \quad \frac{di_1}{dt} = C_2 \cdot L_3 \frac{d^3 i_3}{dt^3} + C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{di_3}{dt}$$

$$u_1 = R_1 \cdot \left[C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 \right] + L_1 \cdot \left[C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^3 i_3}{dt^3} + C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{di_3}{dt} \right]$$

$$u_1 = R_1 \cdot C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{di_3}{dt} + R_1 \cdot i_3 + L_1 \cdot C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^3 i_3}{dt^3} + L_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + L_1 \cdot \frac{di_3}{dt}$$

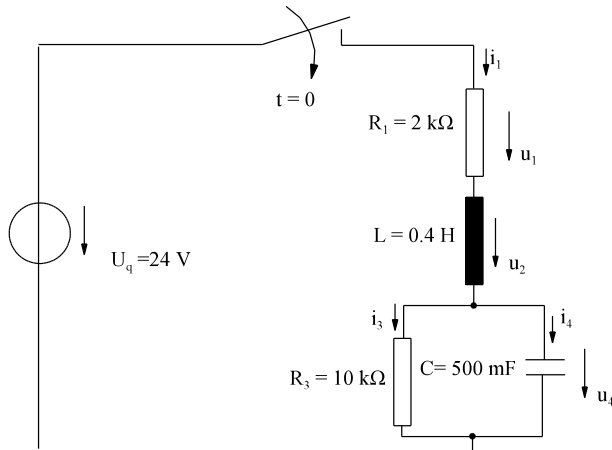
$$U_q = u_1 + u_3$$

$$U_q = R_1 \cdot C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{di_3}{dt} + R_1 \cdot i_3 + L_1 \cdot C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^3 i_3}{dt^3} + L_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot \frac{d^2 i_3}{dt^2} + L_1 \cdot \frac{di_3}{dt} + L_3 \cdot \frac{di_3}{dt} + R_3 \cdot i_3$$

$$U_q = L_1 \cdot C_2 \cdot L_3 \cdot \frac{d^3 i_3}{dt^3} + (R_1 \cdot C_2 \cdot L_3 + L_1 \cdot C_2 \cdot R_3) \frac{d^2 i_3}{dt^2} + (R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 + L_1 + L_3) \frac{di_3}{dt} + (R_3 + R_1) i_3$$

Aufgaben zu Abschnitt 10.5

Aufgabe 10.5.A



- Stellen Sie die DGL für u_4 in allgemeiner Form im Zeitbereich auf.
Es wird empfohlen, mit u_4 zu beginnen und alle anderen Größen in Abhängigkeit von u_4 zu berechnen. Dabei sind alle Maschen und Knotengleichungen wie der Zusammenhang zwischen u und i an L , C und R auszuwerten.
- Lösen Sie die DGL im Zeitbereich.
- Bestimmen Sie $u_4(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Es wird empfohlen, mit Laplace-Transformierten Widerständen zu arbeiten. Die eleganteste Methode berücksichtigt Spannungsteiler und Zuhaltmethode.

Ergebnisse zu Kap. 9.3

Aufgabe 9.3.A

$$\Theta = 2500 \text{ A} \quad \Lambda = 0.785 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \quad R_m = 1.274 \cdot 10^9 \frac{\text{A}}{\text{Vs}}$$

$$\Phi = 1.963 \cdot 10^{-6} \text{ Vs} \quad B = 6.248 \text{ mT} \quad H = 4971 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Aufgabe 9.3.B

$$N = 636.4 \cdot 10^3$$

Aufgabe 9.3.C

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -11 \text{ A} \quad s_3 = 7 \text{ A} \quad s_4 = -11 \text{ A}$$

Aufgabe 9.3.D

$$\Theta_1 = 200 \text{ A} \quad \Theta_2 = 80 \text{ A}$$

$$s_1 = 0 \quad s_2 = 280 \text{ A} \quad s_3 = -200 \text{ A} \quad s_4 = -120 \text{ A}$$

Ergebnisse zu Kap. 9.5

Aufgabe 9.5.A

$$\text{a) } B_{\text{Luft}} = 0.174 \text{ T} \quad \text{b) } B_3 = 0.697 \text{ T}$$

$$\text{c) } V_1 = 1.7 \text{ A} \quad V_2 = 4.4 \text{ A} \quad V_3 = 11.1 \text{ A}$$

$$V_4 = 4.4 \text{ A} \quad V_5 = 1.1 \text{ A} \quad V_{\text{Luft}} = 277.3 \text{ A}$$

$$\text{d) } \Theta = 300 \text{ A}$$

Aufgabe 9.5.B

$$I = 86.1 \text{ mA}$$

Aufgabe 9.5.C

a)	$H_{Luft} = 318.2 \cdot 10^3 \frac{A}{m}$	b)	$V_{Luft} = 636 A$		
c)	$\Phi = 16 \cdot 10^{-4} Vs$	d)	$\Phi_1 = 1.6 \cdot 10^{-4} Vs$		
e)	$B_{Luft} = B_1 = B_5 = 0.4 T$	$B_2 = B_4 = 0.8 T$	$B_3 = 1.6 T$		
f)	$H_1 = H_5 = 127.3 \frac{A}{m}$	$H_2 = H_4 = 254.6 \frac{A}{m}$	$H_3 = 509.1 \frac{A}{m}$		
g)	$V_1 = 3.8 A$	$V_2 = 10.2 A$	$V_3 = 25.5 A$	$V_4 = 10.2 A$	$V_5 = 2.5 A$
h)	$\Theta = 688.2 A$				
i)	$I = 86.0 mA$				

Aufgabe 9.5.D

$V_1 = 120 A$	$V_2 = V_3 = 30 A$	
$B_1 = 1.257 \frac{Vs}{m^2}$	$B_2 = 0.314 \frac{Vs}{m^2}$	$B_3 = 0.943 \frac{Vs}{m^2}$

Aufgabe 9.5.E:

$\Phi_1 = 1.015 \cdot 10^{-3} Vs$	$B_1 = +1.692 T$	$V_1 = 246.8 A$	$H_1 = 747.9 A/m$
$\Phi_2 = -0.5351 \cdot 10^{-3} Vs$	$B_2 = -0.8918 T$	$V_2 = -43.02 A$	$H_2 = -394.7 A/m$
$\Phi_3 = -0.4799 \cdot 10^{-3} Vs$	$B_3 = -0.800 T$	$V_3 = -116.2 A$	$H_3 = -353.2 A/m$
	$B_4 = B_2$	$V_4 = -710.1 A$	$H_4 = -710.1 \cdot 10^3 A/m$
	$B_5 = B_3$	$V_5 = -636.8 A$	$H_5 = -636.8 \cdot 10^3 A/m$

Ergebnisse zu Kap. 9.6

Aufgabe 9.6.1A	$I = 1.88 A$	
Aufgabe 9.6.1B	$I = 0.75 A$	
Aufgabe 9.6.1C	$I = 2.15 A$	
Aufgabe 9.6.2A	$B = 1.40 T$	
Aufgabe 9.6.2B	$H = 6500 A/m$	$B = 1.69 T$

Ergebnisse zu Kap. 9.7

Aufgabe 9.7.A	$A_D = 4.667 cm^2$	$l_D = 1.45 cm$
----------------------	--------------------	-----------------

Ergebnisse zu Kap. 9.8

Aufgabe 9.8.2.A	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.54 mT \\ 0 \end{pmatrix}$
------------------------	--

Aufgabe 9.8.2.B

$r_1 = \sqrt{2} \cdot 0.15 m$	$r_2 = \sqrt{2} \cdot 0.05 m$	$H_1 = 15.01 A/m$	$H_2 = 45.02 A/m$
$H = 30.01 A/m$			

Aufgabe 9.8.2.C

a)	$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.347 \\ 0.5212 \end{pmatrix} mT$	$ B = 1.444 mT$	$\varphi_B = 158.84^\circ$
b)	$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.4921 \\ -3.526 \end{pmatrix} mT$	$ B = 3.561 mT$	$\varphi_B = 262.06^\circ$
c)	$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4029 \\ -0.2360 \end{pmatrix} mT$	$ B = 0.467 mT$	$\varphi_B = -30.36^\circ$
d)	$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6426 \\ -1.2186 \end{pmatrix} mT$	$ B = 1.378 mT$	$\varphi_B = -62.20^\circ$

Aufgabe 9.8.7A

$B = 13 \text{ mT}$

Ergebnisse zu Kap. 9.9**Aufgabe 9.9.1.A**

$u(t) = -u_{\text{ind}}(t) = -\hat{u} \cdot \sin(\omega t) \quad \hat{u} = 10.8 \text{ V}$

Aufgabe 9.9.1.B

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Aufgabe 9.9.1.C

a) $|U| = 0.675 \text{ V}$

b) $U = 0.675 \text{ V}$

Aufgabe 9.9.2.A

$u_{\text{ind}} = -330 \text{ V} \cdot \cos(314 \text{ s}^{-1} \cdot t)$

Aufgabe 9.9.2.B

$u(t) = 588 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$

Aufgabe 9.9.2.C

Bereich 1: $0 \leq t \leq 50 \text{ ms}$ $u = -36 \text{ V}$

Bereich 2: $50 \text{ ms} \leq t \leq 150 \text{ ms}$ $u = 18 \text{ V}$

Bereich 3: $150 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$ $u = 0$

Ergebnisse zu Kap. 9.10**Aufgabe 9.10.1.A**

$L = 19.9 \text{ H}$

Aufgabe 9.10.1.B

$L = 2.78 \text{ H}$

Aufgabe 9.10.3.A

$u_2(t) = +25.27 \text{ V} \cdot \cos(\omega t)$

Aufgabe 9.10.3.B

a) $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 4.190 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A}$

$\Lambda_3 = 12.57 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A}$

$\Lambda_{23} = 16.75 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A}$

$\Lambda_{\text{ges}} = 3.352 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/A} = \Lambda_{1\text{ges}} = \Lambda_{2\text{ges}}$

b) $\Phi_1 = 2.682 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \cos(\omega t)$

$\Phi_2 = 0.6705 \cdot 10^{-4} \text{ Vs} \cdot \cos(\omega t)$

c) $u_2 = -18.96 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

d) $L_1 = 2.145 \text{ H}$

$L_2 = 2.715 \text{ H}$

$M = 0.6034 \text{ H}$

e) $u_1 = -67.40 \text{ V} \cdot \sin(\omega t)$

Aufgabe 9.10.4.A

$L_{\text{ges}} = 20.1 \text{ H}$

Aufgabe 9.10.4.B

$L_{\text{ges}} = 1.6 \text{ H}$

Aufgabe 9.10.4.C

a) $L = 700 \text{ mH}$

b) $L = 300 \text{ mH}$

c) $L = 166.7$

d) $L = 71.4 \text{ mH}$

Aufgabe 9.10.4.D

$M = 87.5 \text{ mH}$

Aufgabe 9.10.5.A

$L = 8.33 \text{ } \mu\text{H}$

Aufgabe 9.10.6.A

$R_{\text{L}} = 0.8120 \text{ m}\Omega$

$R_{\text{L}} = 3.61 \text{ m}\Omega$

Aufgabe 9.11.A

a) $W_{\text{m}} = 0.0405 \text{ Ws}$

b) $W_{\text{m}} = 0.648 \text{ Ws}$

c) und d) $W_{\text{m}} = 0.8 \text{ Ws}$

Aufgabe 9.12.A

$W_{\text{VH}} = 0.640 \text{ WS}$

$P_{\text{VH}} = 32 \text{ W}$

Aufgabe 9.13.A

$F = 1.280 \text{ N}$

Aufgabe 9.13.B	$F = 75 \text{ N}$	
Aufgabe 9.13.C	$F = 559 \text{ N}$	
Aufgabe 9.14.A $P_K = 1 \text{ } \Omega$	$Z_K = 2.3 \text{ } \Omega$	$X_K = 2.07 \text{ } \Omega$
Aufgabe 9.14.B $I_1 = 3.125 \text{ A}$	$I_2 = 25 \text{ A}$	$U_2 = 37.5 \text{ V}$
Aufgabe 9.14.C	$I_1 = 102.9 \text{ mA}$	$U_2 = 10.29 \text{ V}$
Aufgabe 9.16.A	$H_{l2} = H_{l1} = 200 \text{ A/m}$	$H_{n2} = 600 * 10^3 \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Aufgabe 9.16.B	$B_{n2} = B_{n1} = 0.5 \text{ T}$	$B_{l2} = 1 \text{ mT}$
Aufgabe 9.17.A $H_y = -50 \frac{\text{A}}{\text{m}^2} * y$		
Aufgabe 9.17.B	$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
Aufgabe 9.17.C	$\vec{J} = \begin{pmatrix} 300 \text{ A/m}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	
Aufgabe 9.17.D	$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0.05 \text{ T} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} * \sin(\omega t)$	

Ergebnisse zu Kap. 10

Aufgabe 10.2.5A	$i(t) = 5.5 \text{ mA} + 4.5 \text{ mA} * e^{-t/2.75\text{ms}}$
Aufgabe 10.2.5.B	$u_2(t) = 18 \text{ V} * e^{-t/3\text{ms}}$
Aufgabe 10.2.5.C	$u_4(t) = 12 \text{ V} + 18 \text{ V} * e^{-t/0.6\text{ms}}$
Aufgabe 10.2.5.D	$i(t) = 4 \text{ A} + (10 \text{ A} - 4 \text{ A}) * e^{-t/T}$ $i(t) = 4 \text{ A} + 6 \text{ A} * e^{-t/50\text{ms}}$
Aufgabe 10.2.5.E	$i(t) = 144 \text{ mA} + 56 \text{ mA} * e^{-t/0.58\text{ms}}$
Aufgabe 10.2.5.F	
Bereich 1 für $0 \leq t \leq 4 \text{ ms}$	$i(t) = 5.5 \text{ A} * (1 - e^{-t/5\text{ms}})$
Bereich 2 für $t \geq 4 \text{ ms}$	$u_L(t) = -182 \text{ V} * e^{-\frac{t-4\text{ms}}{1.667\text{ms}}}$
$u_L(t = 2t_2) = -16.5 \text{ V}$	

Aufgabe 10.2.5.GBerechnung für Abschnitt 1: $0 \leq t \leq 200 \mu\text{s}$

$$u_C(t) = 5.556V * \left(1 - e^{-t/94.44\mu\text{s}}\right)$$

Berechnung für Abschnitt 2: $t \geq 200 \mu\text{s}$

$$u_C(t) = 4.887V * e^{-\frac{t-200\mu\text{s}}{150\mu\text{s}}}$$

$$u_C(t = 2t_2) = 1.288V$$

Aufgabe 10.2.5.HBereich 1 für: $0 \leq t \leq 0.8 \text{ ms}$

$$u_{R1}(t) = 30V * e^{-t/0.5\text{ms}}$$

Bereich 2 für: $t \geq 0.8 \text{ ms}$

$$u_R(t) = -7.98V * e^{-\frac{t-0.8\text{ms}}{1.5\text{ms}}}$$

$$u_{R2}(t = 2t_1) = -4.68V$$

Aufgabe 10.2.6.A

$$u_C(t) = 10V * \left[1 - e^{-t * 10^5 \text{ s}^{-1}} * \left[\cos(0.5 * 10^5 \text{ s}^{-1} * t) + 2 * \sin(0.5 * 10^5 \text{ s}^{-1} * t)\right]\right]$$

$$T = 1 / (10^5 \text{ s}^{-1}) = 10 \mu\text{s}$$

Dämpfungszeitkonstante

$$\omega = 0.5 * 10^5 \text{ s}^{-1}$$

f = 7.95 kHz, Frequenz der gedämpften Schwingung

$$T_p = 1 / f = 126 \mu\text{s}$$

Periodendauer

$$u_C(t) = 10V * \left[1 - e^{-t/T} * \left[\cos(\omega t) + 2 * \sin(\omega t)\right]\right]$$

Aufgabe 10.2.6.B

$$i(t) = 1.563 \text{ mA} * \left[e^{-t * 400 \text{ s}^{-1}} - e^{-t * 3600 \text{ s}^{-1}}\right]$$

$$i(t) = 1.563 \text{ mA} * \left[e^{-t/2.5 \text{ ms}} - e^{-t/0.2777 \text{ ms}}\right]$$

Aufgabe 10.3.A

$$i(t) = -6.75 \text{ A} * e^{-t/4.139 \text{ ms}} + 11.36 \text{ A} * \cos(\omega t) + 0.12 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

Aufgabe 10.4.A

$$i(t) = 0.5 \text{ A} * e^{-t/10 \text{ ms}} + 2 \text{ A} - 2.5 \text{ A} * \cos(\omega t) + 2.5 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

Aufgabe 10.4.B

$$i(t) = 3.75 \text{ A} * e^{-t/10 \mu\text{s}} + 1.25 \text{ A} * \cos(\omega t) + 1.25 \text{ A} * \sin(\omega t)$$

Aufgabe 10.4.C

$$i(t) = 0.735 \text{ A} * e^{-t/2.55 \text{ ms}} + 1.265 \text{ A} * \cos(\omega t) + 1.0125 \text{ A} * \sin(\omega t) + 1 \text{ A}$$

Aufgabe 10.5.A

$$\text{a) } \frac{d^2 u_4}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{C * R_3}\right) * \frac{du_4}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{R_3 * L * C} * u_4 = U_q$$

$$\text{b) } u_4(t) = 20 \text{ V} - 39.81 \text{ V} * e^{-t/0.5787 \text{ ms}} + 19.81 \text{ V} * e^{-t/0.2880 \text{ ms}}$$

$$\text{c) } u_4(t) = 20 \text{ V} - 39.82 \text{ V} * e^{-t/0.5787 \text{ ms}} + 19.82 \text{ V} * e^{-t/0.2880 \text{ ms}}$$