Fachhochschule Jena University of Applied Sciences Jena	Fachbereich Elektrotechnik Laborpraktikum Grundlagen der Elektrotechnik	Versuch 6

Wechselstromnetzwerke

Seminargruppe:	092 ET	Datum:	19. 10. 2010
Praktikumsgruppe:	2	**Testat:**	
Teilnehmer:	Michael Goldbach Jürgen Döffinger		ges.: ... Unterschrift

Literatur

|1| Führer, A. u. a.:
Grundlagen der Elektrotechnik, Bd. 2
München: Hanser Verlag 1990

|2| Weißgerber, W.:
Elektrotechnik für Ingenieure, Teil 2
Braunschweig: Vieweg Verlag 1991

|3| Grafe u.a.:Grundlagen der Elektrotechnik"
Band 2, Verlag Technik

Erforderliche Begriffe

Ohmscher Widerstand, Kapazität, Induktivität, Zweipol, Reaktanz, komplexer Scheinwiderstand, Impedanz, symbolische Methode der Wechselstromtechnik, komplexe Ebene, Zeiger, reelle Rechnung, komplexe Rechnung, Ortskurve,

1 Versuchsvorbereitung

1. Geben Sie die allgemeine Gleichungen eines komplexen Scheinwiderstandes in arithmetischer, trigonometrischer und Exponentialform an!
   Reflektieren Sie im Hinblick auf messtechnische Verifikationen mögliche Umrechnungen!

2. Eine reale Induktivität kann für hinreichend kleine Frequenzen als Reihenschaltung von Widerstand und idealer Induktivität aufgefasst werden.
   - Erarbeiten Sie stichpunktartig einen Ablauf für die messtechnische Ermittlung des ohmschen Widerstandes und der Induktivität einer realen Spule.
   - Formulieren Sie die Gleichung zur Berechnung der Induktivität einer Spule unter Berücksichtigung des Verlustwiderstandes!
   - Welche der notwendigen Komponenten der Gleichung sind messtechnisch zu ermitteln und wie werden diese gemessen?

3. Charakterisieren Sie den Ortskurvenbegriff (in Relation zum Zeigerdiagramm)!
   Wiederholen Sie
   - die Vorgehensweise bei der Inversion von Ortskurven (Inversionssätze).
   - die Festlegung der Maßstäbe von reeller und imaginärer Achse,
   - die Maßstabsfestlegung für Leitwerts- und Widerstandsortskurve,
   - Anwendungen zur Notwendigkeit der Inversionen von Ortskurven,

4. Skizzieren Sie die Impedanz- und die Admittanzortskurve für jeweils eine RL-Reihen- und eine RC-Parallelschaltung!

5. Geben Sie die U-Ortskurve für RC-Reihenschaltungen für konstante Gesamtspannung an! Begründen Sie den Verlauf anhand der Sachverhalte an signifikanten Punkten!
   Geben Sie die I-Ortskurve für RC-Parallelschaltungen für konstanten Gesamtstrom an! Begründen Sie den Verlauf anhand der Sachverhalte an signifikanten Punkten!

6. Eine Parallelschaltung aus R = 10kΩ und C = 0,1µF soll an einer konstanten Spannung mit veränderlicher Frequenz (50Hz, 100Hz, 250Hz und 500Hz) betrieben werden.
   - Zeichnen Sie die Ortskurve der Leitwerte auf Basis berechneter Werte!
   - Invertieren Sie die Leitwertsortskurve und zeichnen Sie die Widerstandsortskurve!
   - Tragen Sie den Zeiger für f = 250Hz ein und bestimmen Sie R_r und X_{Lr} graphisch!
   - Kontrollieren Sie das Ergebnis mathematisch!
   - Wie ist eine zusätzliche Reiheninduktivität in der Impedanzortskurve zu berücksichtigen und wie verläuft diese qualitativ (Skizze)?

2 Versuchsdurchführung

1. **Bestimmung der Ersatzkomponenten einer Spule**
   Ermitteln Sie für die Spule mit 1000 Windungen:
   - den Gleichstromwiderstand durch Strom- Spannungs-Messung,
   - den Blindwiderstand durch Strom- Spannungs-Messung bei f = 100Hz und f = 10kHz!

   Bestimmen Sie die Induktivität der Spule

   a) unter Vernachlässigung des Gleichstromwiderstandes mittels Näherung $X_L = \frac{|U|}{|I|}$

   b) unter Berücksichtigung des Gleichstromwiderstandes $|Z| = \frac{|U|}{|I|}$

   Stellen Sie die vier Ergebnisse tabellarisch gegenüber und diskutieren Sie die Ergebnisse!

2. **R-L-Reihenschaltung**
   Bauen Sie eine Reihenschaltung mit R = 47Ω und der Spule mit 1000 Wdg. auf. Realisieren Sie eine Konstantspannungsspeisung mit |U| = 2V!
   - Messen Sie |I| und φ bei den angegebenen Frequenzen und berechnen Sie |Z|! Tragen Sie die Werte in die Tabelle 1 ein!

f/Hz	|U|/V	|I|/mA	φ/°	|Z|/Ω	X_L/Ω graphisch	X_L/Ω berechnet	$\|U_R\|$/V	$\|U_L\|$/V
250	2	28,66	23,4	69,80	26	+ 27,72	1,86	0,80
500	2	26,90	41,4	74,35	49	+ 49,20	1,50	1,34
1000	2	15,9	57,6	125,8	105	+ 105,50	1,08	1,68

$\sin\varphi = \frac{X}{Z}$

$\sin\varphi \cdot Z = X$

Tabelle 1

Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm der Widerstände!
- Ermitteln Sie aus diesem Diagramm graphisch X_L für alle drei Frequenzen! (Beachten Sie den Widerstand der Spule!)
- Kontrollieren Sie die Ergebnisse für X_L mathematisch!

Entwickeln Sie aus den ermittelten Werten das Zeigerdiagramm der Spannungen, wenn eine konstante Spannung mit |U| = 2V an der Schaltung anliegt!
- Bestimmen Sie graphisch $|U_R|$ und $|U_L|$ für alle drei Frequenzen!
- Tragen Sie alle Werte in Tabelle 1 ein!
- Auf welchen geometrischen Figuren verlauft die Zeigerspitze bei |U| und |Z|?
- Wie würde die Spitze von |U| bei |I| = const. verlaufen? Begründen Sie Ihre Überlegungen!

3. **R-C-Parallelschaltung**
   Bauen Sie eine Parallelschaltung mit R = 10kΩ und C = 0,1µF auf!
   Realisieren Sie eine Konstantspannungsspeisung mit |U| = 2V!
   Messen Sie $|I_R|$ und $|I_C|$ bei den angegebenen Frequenzen und berechnen Sie G und $|B_C|$!
   Tragen Sie die Werte in die Tabelle 2 ein!

f/Hz	|U|/V	I_R/mA	I_C/mA	G/µS	B_C/µS	|Z|/Ω	φ/°
50	2	0,200	0,067	100,00	33,5	9500	18.5
100	2	0,206	0,135	103,00	67,5	8400	34.0
250	2	0,207	0,337	103,50	168,5	5300	59.0
500	2	0,207	0,672	103,50	336,0	3000	73.0

Tabelle 2

$G = \frac{I_R}{U}$

$B_C = \frac{I_C}{U}$

Zeichnen Sie die Ortskurve der Leitwerte für die angegebenen Frequenzen (mm-Papier, A4)!
Invertieren Sie die Ortskurve und bestimmen Sie |Z| und φ für die angegebenen Frequenzen!
Tragen Sie die Werte in die Tabelle 2 ein!

Ermitteln Sie graphisch R_r und X_{Lr} für f = 100Hz!
Kontrollieren Sie die Ergebnisse mathematisch! Vergleichen Sie die Ergebnisse!

4. **Gemischte komplexe Schaltung**
   Schalten Sie die Spulen mit 1000Wdg. und 500Wdg. so zusammen, dass sich auf dem geschlossenen Eisenkern die maximale Induktivität ergibt!
   - Ermitteln Sie messtechnisch die Induktivität L bei einer Frequenz von f = 1kHz!
   - Berechnen Sie daraus X_L für die Frequenzen 50Hz, 100Hz, 250Hz und 500Hz.
   - Tragen Sie die Werte für X_L in die Widerstandsortskurve der R-C-Parallelschaltung ein, und
   - zeichnen Sie den Verlauf der Ortskurve der Gesamtschaltung!

   Schalten Sie die Induktivität in Reihe zur R-C-Parallelschaltung von R = 10kΩ und C = 0,1µF!
   Bestimmen Sie durch Messung für die Frequenzen 50Hz, 100Hz, 250Hz, 500Hz und 750Hz die Spannung |U|, den Strom |I| und den Phasenwinkel φ der Gesamtschaltung!

   Hinweise:
   - Zur Phasenmessung schalten Sie einen Widerstand von R = 1kΩ in Reihe!
   - Bestimmen Sie die Frequenz, bei der |Z| reell wird und tragen Sie diesen Wert auf der Abszisse ein!
   - Verwenden Sie für die Ortskurve ein gesondertes Blatt!
   - Beachten Sie das Vorzeichen des Phasenwinkels φ !
   - Geben Sie die Grenzwerte für $0Hz \leq f \leq \infty$ an und begründen Sie Ihre Aussagen!
   - Ordnen Sie die Ergebnisse aus der Ortskurve in diese Überlegungen ein!

1.1 Scheinwiderstand (Impedanz) $Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}$

$\underline{Z} = Re\{\underline{Z}\} + j\,Im\{\underline{Z}\} = R + jX$ ← Blindwiderstand

Wirkwiderstand

$\underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + X^2}\; e^{j \arctan \frac{X}{R}}$

$\underline{Z} = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi)$

$R = Z \cdot \cos\varphi \qquad X = Z \cdot \sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{X}{R}$

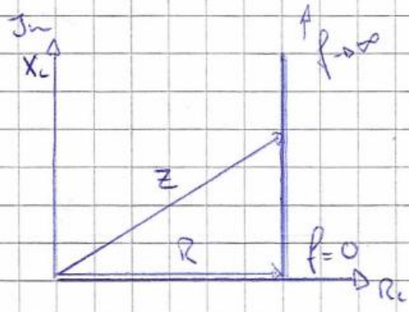
Quadrant	I	II, III	IV
$\varphi =$	$\arctan\left(\frac{X}{R}\right)$	$\arctan\left(\frac{X}{R}\right) + \pi$	$\arctan\left(\frac{X}{R}\right) + 2\pi$

1.4.

Impedanz RL-Reihenschaltung

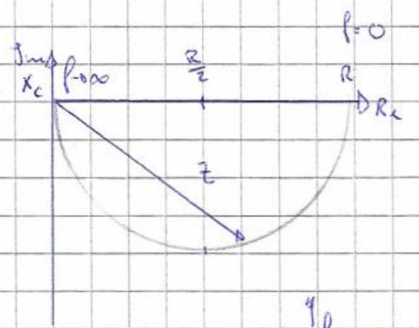
$(\underline{Z} = R + j\omega L)$

$\Rightarrow (\underline{Z} = R + j2\pi f L)$



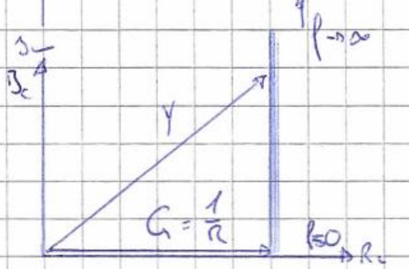
Impedanz RC-Parallelsch.

$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j2\pi f C}$



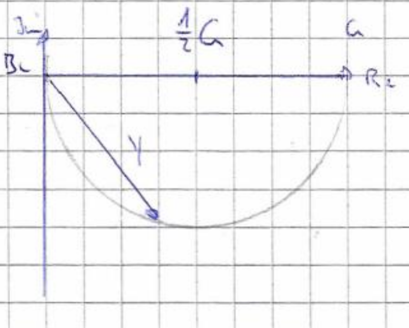
Admittanz RC-Parallelschaltung

$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j2\pi f C$



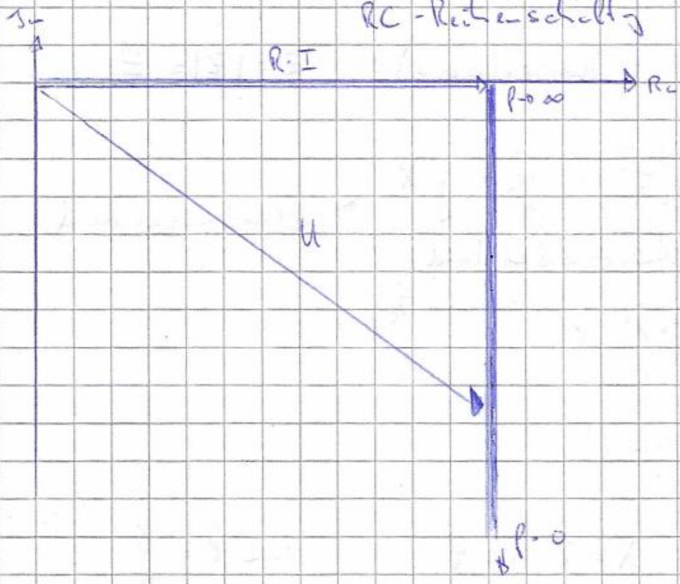
Admittanz RL-Reihenschaltung

$\underline{Y} = \frac{1}{R + j2\pi f L}$



1.5.

RC-Reihenschaltung || U-Ortskurve

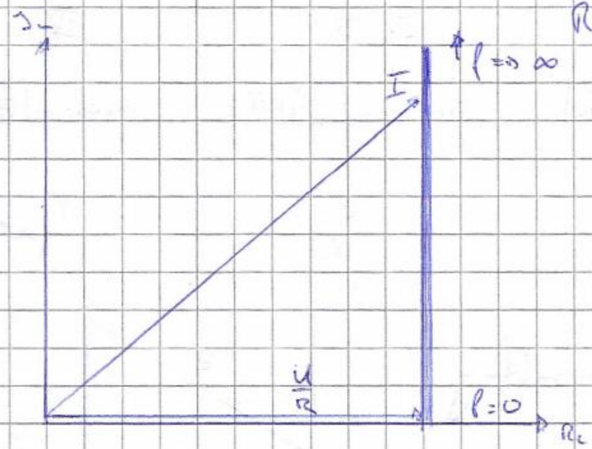


$$U = I \cdot \left(R + j\left(-\frac{1}{2\pi f C}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi f C} \xrightarrow{f\to 0} -\infty$$

$$-\frac{1}{2\pi f C} \xrightarrow{f\to \infty} 0$$

RC-Parallelschaltung || I-Ortskurve



$$I = U\left(\frac{1}{R} + j\omega C\right)$$

$$2\pi f C \xrightarrow{f\to 0} 0$$

$$2\pi f C \xrightarrow{f\to \infty} \infty$$

1.2.

Zur Ermittlung des ohmschen Widerstandes der Spule ist eine Strom- Spannungsmessung mit Gleichspannung durchzuführen.

$$R = \frac{U}{I}$$

Diese Messung ist dann mit einer Wechsel-spannung zu wiederholen. Die Frequenz sollte nicht all zu hoch gewählt werden und im kHz-MHz - Bereich liegen.

$$Z = \frac{U}{I}$$

Aus beiden Messungen lässt sich nun die Induktivität der Spule wie folgt ermitteln.

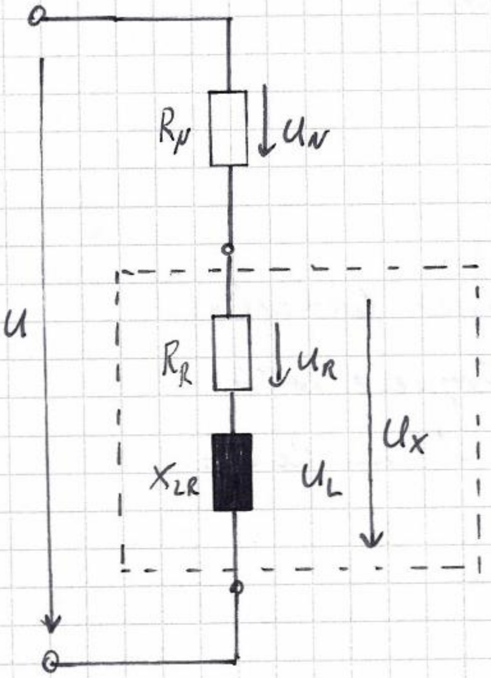
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} \rightsquigarrow \mid X_L = \omega L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$\omega L = \sqrt{Z^2 - R^2} \quad \mid \omega = 2\pi f$$

$$2\pi f L = \sqrt{Z^2 - R^2}$$

$$L = \frac{\sqrt{Z^2 - R^2}}{2\pi f}$$

Zur Berechnung der Induktivität unter Berücksichtigung des Verlustwiderstandes kann wie folgt vorgegangen werden.



Für die links zu sehende Reihenschaltung gilt folgende Beziehung:

$$\frac{U_N}{U_X} = \frac{R_N}{R_X}$$

$$Z_X = R_N \cdot \frac{U_X}{U_N}$$

Daraus ergibt sich, mit den Winkelfunktionen folgende Gleichungen:

$$U_R = U_X \cdot \cos\varphi \qquad U_L = U_X \cdot \sin\varphi$$

$$R_R = Z_X \cdot \cos\varphi \qquad X_{LR} = Z_X \cdot \sin\varphi$$

Unter Einbeziehung der Spannungen ergeben sich für den Blind- und Verlustwiderstand:

$$X_{LR} = R_N \cdot \frac{U_X}{U_N} \cdot \sin\varphi \qquad R_R = R_N \cdot \frac{U_X}{U_N} \cdot \cos\varphi$$

Der Phasenverschiebungswinkel lässt sich mithilfe des Cosinussatzes ermitteln:

$$U^2 = U_N^2 + U_X^2 - 2 \cdot U_N \cdot U_X \cdot \cos\alpha$$

Mit $\cos\alpha = \cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$ ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{U^2 - U_N^2 - U_X^2}{2 \cdot U_N \cdot U_X}$$

Somit kann L wie folgt ermittelt werden.

$$X_{LR} = R_N \cdot \frac{U_x}{U_N} \cdot \sin\varphi \qquad | \; X_{LR} = \omega L = 2\pi f L$$

$$2\pi f L = R_N \cdot \frac{U_x}{U_N} \cdot \sin\varphi$$

$$L = \frac{R_N \cdot U_x}{2\pi f \cdot U_N} \cdot \sin\varphi \qquad | \; \varphi = \arccos\left(\frac{U^2 - U_N^2 - U_x^2}{2 \cdot U_N \cdot U_x}\right)$$

$$\underline{\underline{L = \frac{R_N \cdot U_x}{2\pi f \cdot U_N} \cdot \sin\left[\arccos\left(\frac{U^2 - U_N^2 - U_x^2}{2 \cdot U_N \cdot U_x}\right)\right]}}$$

Bei der Messung wie zuvor beschrieben ist zu beachten, dass die Spannungsmesser einen sehr hohen Innenwiderstand aufweisen, um die Verfälschung des Messergebnisses so gering wie möglich zu halten.

1.3.

Ein Zeigerdiagramm zeigt die elektrischen Verhältnisse an einem Bauelement oder einer Schaltung bei konstanten Größen (z.B. f, R, L, C) an. Variert man einen der Parameter, beschreibt die Zeigespitze der betrachteten komplexen Funktion (z.B. $\underline{Z}$, $\underline{Y}$) eine Ortskurve in der Gauß'schen Ebene.

Ist bei Ortskurven eine quantitative Aussage gewünscht, sind reelle und imaginäre Achse im gleichen Maßstab zu skalieren, damit die Winkelbeziehung zwischen den Zeigern oder zu den Achsen erhalten bleiben.

Bei der Inversion einer komplexen Größe ergibt:

- eine Gerade, die durch den Nullpunkt geht, wieder eine Gerade die durch den Nullpunkt geht
- eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht, einen Kreis, der den Nullpunkt berührt
- ein Kreis, der nicht durch den Nullpunkt geht, wieder einen Kreis, der nicht durch den Nullpunkt geht
- ein Kreis, der durch den Nullpunkt geht, eine Gerade, die nicht durch den Nullpunkt geht
- eine Halbgerade, die parallel zu einer Koordinatenachse verläuft, einen Halbkreis in der gegenüberliegenden Halbebene, wobei sein Mittelpunkt auf

der Achse liegt, auf der die Halbgerade senkrecht steht.

Abbildungseigenschaften bei der Inversion von Ortskurven?

- Bei der Inversion geht das Maximum von $\underline{Z}$ in das Minimum von $\underline{Y}$ über bzw. umgekehrt.

- Die Ortskurvenpunkte auf der reellen Achse werden bei der Inversion in Kurvenpunkte auf der reellen Achse abgebildet.

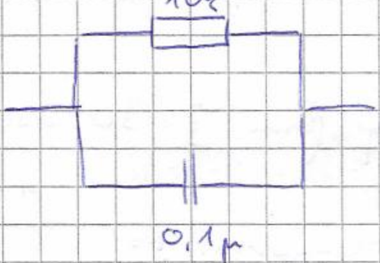
- Der unendlich ferne Punkt wird in den Nullpunkt abgebildet.

- Bei $\omega = 0$ und $\omega \Rightarrow \infty$ haben die Ortskurven entweder einen senkrechten oder einen tangentialen Verlauf zu den Achsen des Koordinatensystems.

- Die Beträge der Schnittwinkel der Ausgangs- und der invertierten Ortskurve mit den Koordinatenachsen sind gleich.

- Sind ausschließlich die passiven und konstanten Elemente R, L und C vorhanden, ist der Drehsinn der Ortskurve der komplexen Funktion von ω i.a. rechtsdrehend.

1.6.



$f_1 = 50\,Hz$

$f_2 = 100\,Hz$

$f_3 = 250\,Hz$

$f_4 = 500\,Hz$

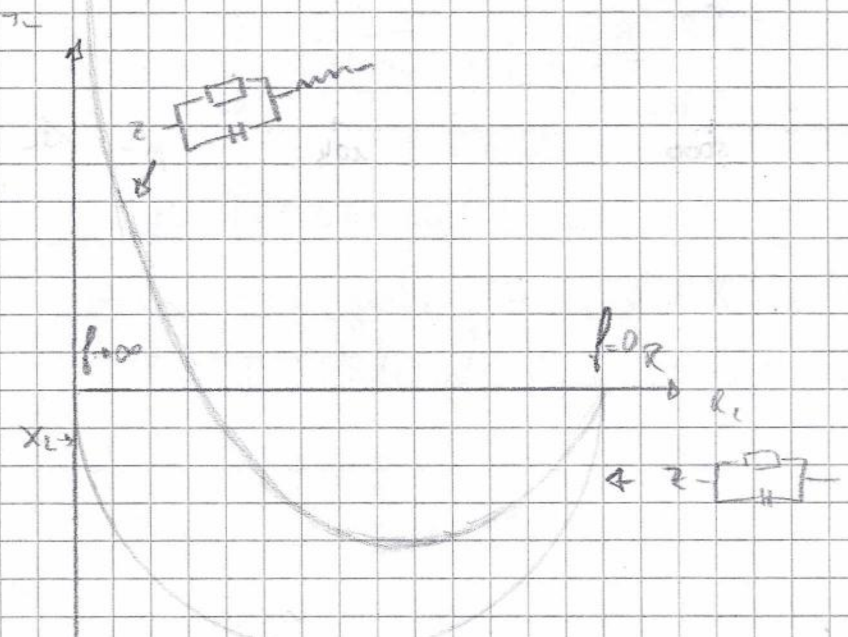
$$\underline{Y} = G + jB = \frac{1}{R} + j2\pi f C$$

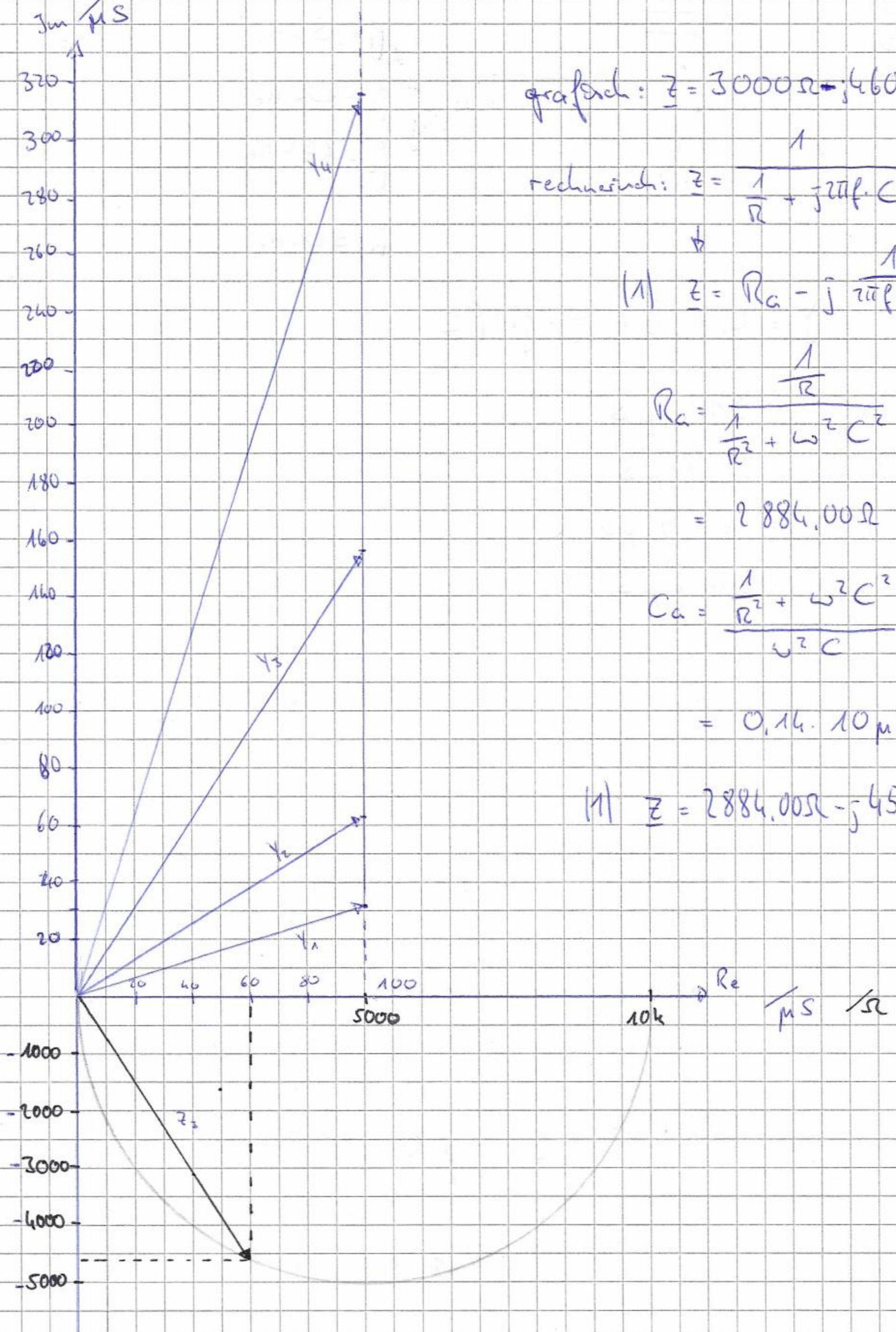
$\mathrm{Im}\{\underline{Y}_1\} = 31{,}4\ \mu S$

$\mathrm{Im}\{\underline{Y}_2\} = 62{,}8\ \mu S$

$\mathrm{Im}\{\underline{Y}_3\} = 157{,}1\ \mu S$

$\mathrm{Im}\{\underline{Y}_4\} = 314{,}6\ \mu S$





grafisch: $\underline{Z} = 3000\,\Omega - j4600\,\Omega$

rechnerisch: $\underline{Z} = \dfrac{1}{\frac{1}{R} + j2\pi f \cdot C}$

$\Downarrow$

(1) $\underline{Z} = R_a - j\,\dfrac{1}{2\pi f C_a}$

$$R_a = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}$$

$$= 2\,884{,}00\,\Omega$$

$$C_a = \frac{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2}{\omega^2 C}$$

$$= 0{,}14 \cdot 10\,\mu\Omega$$

(1) $\underline{Z} = 2884{,}00\,\Omega - j4547{,}28\,\Omega$

2.1.

DC $U_{DC} = 2V$ $I_{DC} = 112 mA$

$R = \frac{U_{DC}}{I_{DC}} = 17,86 \Omega$

AC	$f = 100 Hz$	$f = 10 kHz$
U	$1,88 V$	$2,1 V$
I	$88,76 mA$	$1,89 mA$
$\frac{U}{I}$	$21,18 \Omega$	$1111,11 \Omega$
a) L_{X_L}	$0,034 H$	$17,68 mH$
b) $L_{\lvert Z \rvert}$	$18,12 mH$	$17,68 mH$

a) $X_L = \frac{|U|}{|I|} = 2\pi f L \rightarrow L = \frac{X_L}{2\pi f}$

b) $|Z| = \frac{|U|}{|I|} = \sqrt{R^2 + X_L^2} \rightarrow L = \frac{\sqrt{|Z|^2 - R^2}}{2\pi f}$

$L_{|Z|}$ für $f = 100 Hz$ und L_{X_L} wie $L_{|Z|}$ für $f = 10 kHz$ sind nahezu gleich. Für große f kann also X_L als $|Z|$ angenommen werden, da Blindwiderstand viel größer als R.

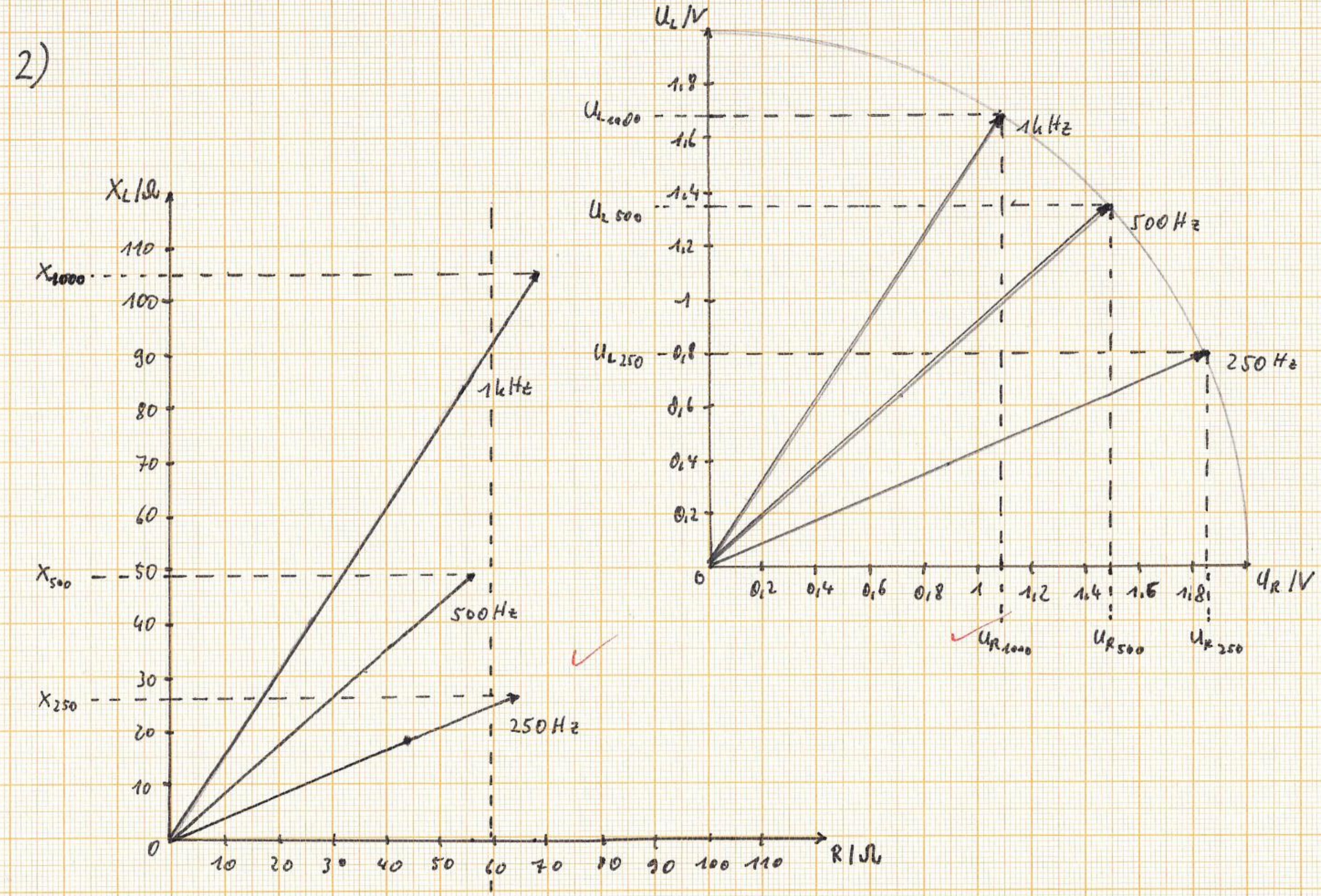
2.2.

Bei $|Z|$ ergibt sich eine Senkrechte parallel zur y-Achse (zum Blindwiderstand).

Bei $|U|$ ergibt sich ein (Viertel-) Kreis dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Radius $|U|$ beträgt.

Bei konstantem Strom ändert sich $|U|$. Es entsteht eine senkrechte Gerade parallel zur y-Achse (Blindspannungsachse).

2)



ermittelter Wert für R_{gesamt}. $R_{gesamt} - R = R_L = 60\,\Omega - 47\,\Omega = 13\,\Omega$

2.3. R_r von 100 Hz = f grafisch ermittelt: $R_r = 7k\Omega$

$X_L = X_C$ von $f = 100 Hz$ grafisch ermittelt: $X_C = -4,6\,\Omega$

Hieraus $|Z|$ errechnet → $8376,15\,\Omega$

Vergleich mit $|Z|$ grafisch → $8400\,\Omega$

2.4.

Bei $f = 1kHz$ gemessen $U = 2V$, $I = 302,84\,\mu A$.

Erkenntnis aus 2.1. → f ist hoch so kann X_L als $|Z|$ angenommen werden.

$$X_L = \frac{U}{I} = 6604,15\,\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{2\pi f} = 1,05\,H$$

$$X_L = 2\pi f L$$

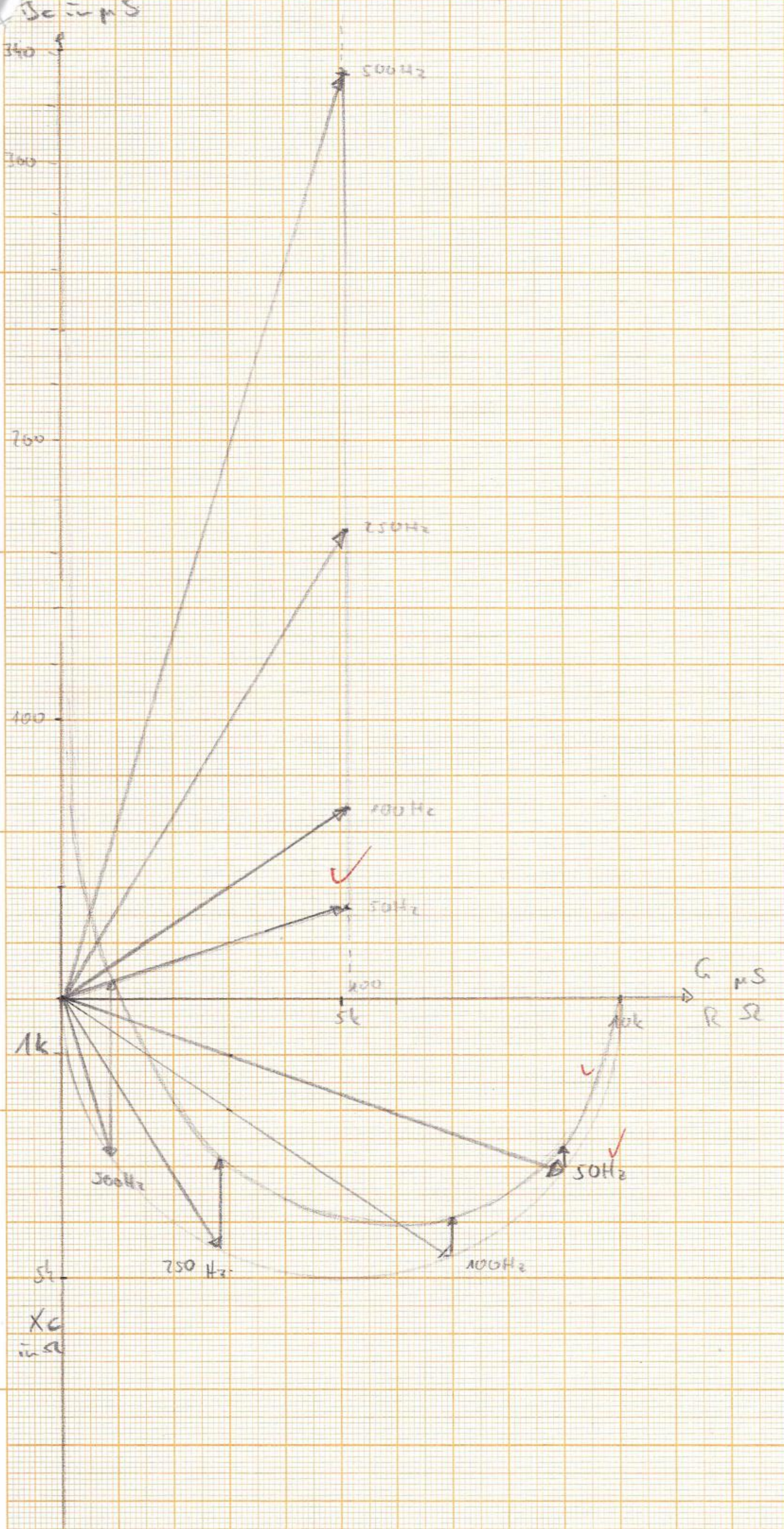
$f = 50 Hz$ → $X_L = 329,87\,\Omega$

$f = 100 Hz$ → $X_L = 659,73\,\Omega$

$f = 250 Hz$ → $X_L = 1649,34\,\Omega$

$f = 500 Hz$ → $X_L = 3298,67\,\Omega$

X_L wird senkrecht auf RC-Kennlinie angetragen



B_C in µS
340
300
200
100
500 Hz
250 Hz
100 Hz
50 Hz
400
G µS
R Ω
5k
10k
1k
500 Hz
250 Hz
100 Hz
50 Hz
5k
X_C in Ω