Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsexperiment

Es wird zunächst ein *Zufallsexperiment* betrachtet, also ein Experiment mit zufälligem Ausgang, das eine diskrete Menge von möglichen Ergebnissen, die *Ergebnismenge* $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ liefert. Ein Beispiel für ein solches Zufallsexperiment ist das Würfeln, die Ergebnismenge ist dann die Menge der möglichen Würfelergebnisse: $\mathbf{A} = \{1, 2, \ldots, 6\}$. Wenn bei der Durchführung des Experimentes ein bestimmtes Ergebnis A_i eintritt, spricht man von einem *Ereignis*, beim Würfeln ist beispielsweise das Eintreten des Würfelergebnisses "6" ein Ereignis. Ereignisse können auch als Vereinigung mehrerer möglicher Ergebnisse definiert werden: Das Ereignis "gerade Zahl" tritt ein, wenn ein Ergebnis aus der Menge der Ergebnisse $\{2, 4, 6\}$ eintritt. Zur Unterscheidung werden Ereignisse wie das Auftreten des Würfelergebnisses "6" als *Elementarereignisse* bezeichnet. Elementarereignisse sind dadurch gekennzeichnet, daß sie immer paarweise unvereinbar (disjunkt) sind.

Ereignis

Elementarereignis

relative Häufigkeit

Führt man das Experiment N-mal durch und tritt dabei das Ergebnis A_ν n_ν-mal auf, dann ist die *relative Häufigkeit* dieses Ereignisses gegeben durch:

$$h(A_\nu) = \frac{n_\nu}{N}.$$

Offensichtlich gilt

$$0 \leq h(A_\nu) \leq 1.$$

sicheres Ereignis

Die Vereinigung aller Ergebnisse nennt man das *sichere Ereignis* $S = \cup_\nu A_\nu$. Für die Häufigkeit des sicheren Ereignisses gilt offenbar:

$$h(\cup_\nu A_\nu) = h(S) = 1.$$

Beim Experiment "Würfeln" würde das sichere Ereignis lauten: $S = \cup_\nu A_\nu = \{1, \ldots, 6\}$ ("irgendeine ganze Zahl von 1 bis 6").

Analog zum sicheren Ereignis nennt man ein Ereignis, das mit relativer Häufigkeit Null eintritt, das *unmögliche Ereignis*. Beim Würfeln wäre z.B. das Ereignis "Eine Zahl größer 6 oder kleiner 1" ein unmögliches Ereignis.

unmögliches Ereignis

Es wird nun die relative Häufigkeit zweier unvereinbarer Ereignisse $A_\mu \cup A_\nu$ betrachtet, etwa der Ereignisse "1" oder "3" beim Würfeln. Die Häufigkeit, mit der eines der beiden Ergebnisse eintritt, entspricht offensichtlich der Summe der Häufigkeiten der beiden einzelnen Ereignisse und damit deren relativen Häufigkeiten:

$$h(A_\mu \cup A_\nu) = \frac{n_\mu + n_\nu}{N} = h(A_\mu) + h(A_\nu).$$

Aus diesen Beobachtungen hat man den Begriff *Wahrscheinlichkeit* in Anlehnung an die relative Häufigkeit geprägt. Da man die Wahrscheinlichkeit mathematisch nicht als Grenzwert der Häufigkeit rechtfertigen kann – man kann wegen der Zufälligkeit der Ereignisse nicht beweisen, daß sich ab einer bestimmten Anzahl von Versuchen die Ergebnishäufigkeiten nicht ändern – wählt man eine *axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit*, die auf ihrer Zweckmäßigkeit gründet. Wahrscheinlichkeit wird den Ereignissen A_ν als ein Maß zugeordnet mit Eigenschaften, die denen der relativen Häufigkeiten entsprechen:

Wahrscheinlichkeit

axiomatische Definition

Definition Wahrscheinlichkeit

1. *Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A_ν gilt*

$$0 \leq P(A_\nu) \leq 1.$$

2. *Für das sichere Ereignis S, d.h. die Vereinigung aller möglichen Ereignisse, gilt:*

$$P(S) = P(\cup_\nu A_\nu) = 1.$$

3. *Für disjunkte (unvereinbare) Ereignisse A_μ und A_ν gilt:*

$$P(A_\mu \cup A_\nu) = P(A_\mu) + P(A_\nu).$$

Das Problem, die Wahrscheinlichkeiten $P(A_\nu)$ für reale Ereignisse A_ν anzugeben, bleibt bei der axiomatischen Definition der Wahrscheinlichkeit ausgeklammert. Den Übergang von der relativen

Gesetz der großen Zahlen

Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit $P(A_\nu)$ beschreibt das *Gesetz der großen Zahlen*, das für die Differenz zwischen der relativen Häufigkeit eines Ereignisses nach N Experimenten $h_N(A_\nu)$ und der Wahrscheinlichkeit $P(A_\nu)$ angibt:

$$\lim_{N\to\infty} P\left(|P(A_\nu) - h_N(A_\nu)| \le \epsilon\right) = 1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit kleiner als eine beliebig kleine Schranke ϵ ist, konvergiert also für wachsendes N gegen Eins.

gleichwahrscheinliche Ereignisse

Bei n *disjunkten gleichwahrscheinlichen Ereignissen* A_ν läßt sich die Wahrscheinlichkeit direkt durch eine Plausibilitätsbetrachtung ermitteln: Da die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich Eins sein muß, ist die Wahrscheinlichkeit eines der gleichwahrscheinlichen Ereignisse $P(A_\nu) = 1/n$.

bedingte Wahrscheinlichkeit, a priori-/ a posteriori Wahrscheinlichkeit

Hängt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit der anderer Ereignisse zusammen, dann kann man sie in Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten der bedingenden Ereignisse formulieren. Die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis B unter der Bedingung, daß ein Ergebnis A mit $P(A) > 0$ eingetreten ist, wird als ***bedingte Wahrscheinlichkeit*** oder ***a-posteriori Wahrscheinlichkeit*** $P(B|A)$ bezeichnet (im Gegensatz zur ***a priori–Wahrscheinlichkeit*** $P(B)$) und berechnet sich gemäß

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

wobei $P(A \cap B)$ die Verbundwahrscheinlichkeit ("A und B") ist. Als Beispiel sei wieder ein Würfelexperiment angeführt: Bezeichnet B das Würfelereignis "4" und A das Ereignis "gerade Zahl", dann ist $P(B|A) = (1/6)/(1/2) = 1/3$. Der Zusammenhang zwischen der a priori-Wahrscheinlichkeit $P(B)$ und der a posteriori-Wahrscheinlichkeit $P(B|A_\nu)$ wird auch durch den *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* hergestellt. Für ein beliebiges Ereignis B und eine Menge paarweise disjunkter Ereignisse A_ν mit $P(\bigcup_\nu A_\nu) = 1$ gilt:

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = \sum_\nu P(B|A_\nu) \cdot P(A_\nu).$$

Formuliert man aus (1.161) eine zweite Gleichung, indem man die Ereignisse A und B vertauscht, und löst jeweils nach der Verbundwahrscheinlichkeit auf, dann erhält man

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Daraus ergibt sich mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Gl. 1.162) der *Bayessche Satz*:

Bayes'scher Satz

$$P(A_\nu|B) = \frac{P(B|A_\nu) \cdot P(A_\nu)}{\sum_\nu P(B|A_\nu) \cdot P(A_\nu)}.$$

Als Sonderfall ist die ***statistische Unabhängigkeit*** zweier Ereignisse anzusehen: Zwei Ereignisse werden als statistisch unabhängig bezeichnet, wenn die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$ gleich der *a priori*-Wahrscheinlichkeit ist, $P(B|A) = P(B)$, das bedingende Ereignis A also keinen Einfluß auf $P(B)$ hat. Dann wird aus (1.163):

statistische Unabhängigkeit

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Zufallsvariable, Verteilung und Dichte

Für die mathematische Behandlung von Zufallsexperimenten ist die Abbildung der Ergebnisse auf Zahlen notwendig. Zu diesem Zweck werden Zufallsvariablen eingeführt:

Definition *Eine Zufallsvariable (ZV) ist eine Zahl* $\mathbf{x}$, *die dem Ergebnis eines Zufallsexperiments zugeordnet wird, also eine Funktion des Zufallsergebnisses.*

Zufallsvariable

Den Wert x_i einer Zufallsvariable für ein bestimmtes Ergebnis A_i nennt man auch die *Realisierung der Zufallsvariablen* $\mathbf{x}$. Man unterscheidet *diskrete Zufallsvariablen*, also solche, die nur diskrete Werte annehmen können, und *kontinuierliche Zufallsvariablen*, die beliebige Werte in einem Intervall annehmen können. Beschreibt man beispielsweise das Ergebnis eines Münzwurfs mit der Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und ordnet den Seiten (Wappen bzw. Zahl) die Werte $x_1 = 1, x_2 = -1$ zu, dann handelt es sich um eine diskrete Zufallsvariable. Als Beispiel für eine kontinuierliche Zufallsvariable mag der tatsächliche Ohm'sche Widerstandswert eines elektrischen Widerstands dienen. Bei Normierung auf den Nennwert würde der Wert der Zufallsvariable x_i bei Widerständen mit bis zu 1% Abweichung vom Nennwert (1-prozentigen Widerständen) im Intervall $[0,99; 1,01]$ liegen.

diskrete/ kontinuierliche ZV

Die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Zufallsvariable $\mathbf{x}$ einen Wert kleiner x annimmt, wird als *Wahrscheinlichkeitsverteilung* (auch: Verteilung, Verteilungsfunktion) $F_\mathbf{x}(x)$ bezeichnet:

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_\mathbf{x}(x) = P(\mathbf{x} \leq x).$$

Betrachtet man beispielsweise ein Würfelexperiment und definiert als Zufallsvariable $\mathbf{x}$ das Zehnfache des Würfelergebnisses, dann ergibt sich die in Abb. 1.14a, dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_\mathbf{x}(x)$. Eine mögliche Wahrscheinlichkeitsverteilung einer kontinuierlichen ZV, die nur Werte im Intervall $[0,99; 1,01]$ annehmen kann (1-prozentige Widerstände), ist in Abb. 1.14b, gezeigt.

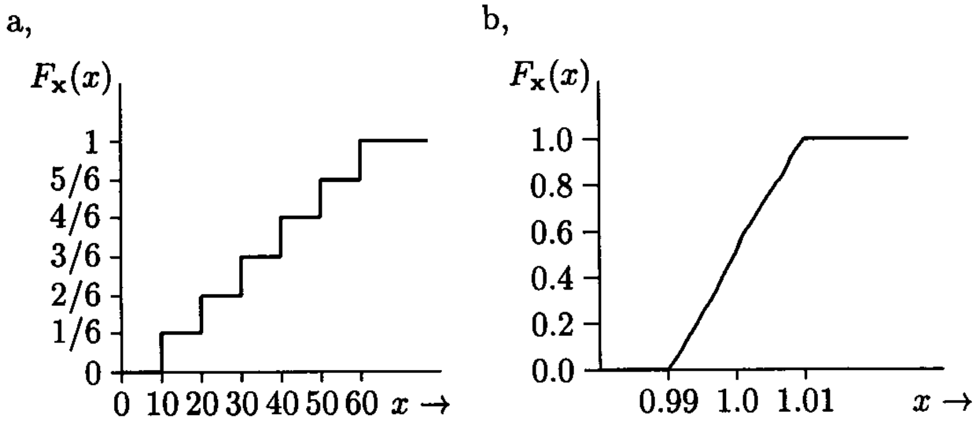


Abbildung 1.14 Wahrscheinlichkeitsverteilungen bei diskreten (a,) und kontinuierlichen (b,) ZVn

Da $F_\mathbf{x}(x)$ eine Wahrscheinlichkeit ist, gilt

$$0 \leq F_\mathbf{x}(x) \leq 1,$$

und damit bei reellen Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ auch

$$F_\mathbf{x}(-\infty) = 0 \quad \text{und} \quad F_\mathbf{x}(\infty) = 1.$$

Außerdem ist $F_\mathbf{x}(x)$ eine monoton steigende Funktion, so daß gilt:

$$F_\mathbf{x}(x_2) \geq F_\mathbf{x}(x_1) \quad \text{falls} \quad x_2 > x_1.$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Wert der ZV $\mathbf{x}$ zwischen x_1 und $x_2 > x_1$ liegt, läßt sich direkt aus der Verteilung, nämlich aus der Differenz $F_\mathbf{x}(x_2) - F_\mathbf{x}(x_1)$ ablesen:

$$P(x_1 < \mathbf{x} \leq x_2) = F_\mathbf{x}(x_2) - F_\mathbf{x}(x_1).$$

Bei diskreten Zufallsvariablen ergibt sich für $F_\mathbf{x}(x)$ stets eine Treppenfunktion, wobei die Sprunghöhe an einer Stelle x_0 der Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{x} = x_0)$ entspricht (vgl. Abb. 1.14a).

Wahrscheinlichkeitsdichte

Als *Wahrscheinlichkeitsdichte* (oft auch: *Verteilungsdichte*) $f_\mathbf{x}(x)$ wird die Ableitung der Verteilung $F_\mathbf{x}(x)$ eingeführt:

$$f_\mathbf{x}(x) = \frac{\mathrm{d}F_\mathbf{x}(x)}{\mathrm{d}x},$$

oder in integraler Form:

$$F_\mathbf{x}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\mathbf{x}(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Da $F_\mathbf{x}(x)$ monoton steigt, kann $f_\mathbf{x}(x)$ nicht negativ werden

$$f_\mathbf{x}(x) \geq 0,$$

und aus der Definition der Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt, dass $F_x(\infty) = 1$ ist :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{x}}(\xi)\mathrm{d}\xi = 1.$$

Die Dichte diskreter Zufallsvariablen wird durch die Ableitung der Treppenfunktion zu einer Summe von Dirac–Impulsen, wobei deren Gewichte den Auftrittswahrscheinlichkeiten der zugehörigen Werte $P(\mathbf{x} = x_i) := P(x_i)$ der Zufallsvariablen entsprechen:

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \sum_i P(x_i) \cdot \delta(x - x_i).$$

In Abb. 1.15 sind die Wahrscheinlichkeitsdichten zu den Verteilungen in Abb. 1.14 dargestellt.

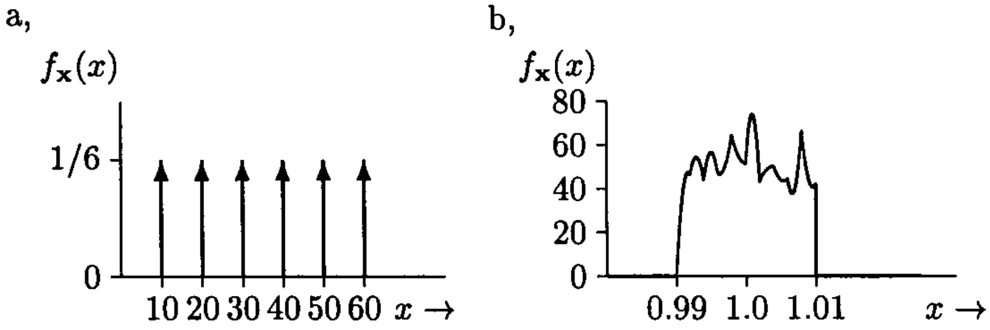


Abbildung 1.15 Beispiele zu Wahrscheinlichkeitsdichten bei diskreten und kontinuierlichen Zufallsvariablen

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wert einer Zufallsvariablen zwischen x_1 und $x_2 > x_1$ liegt, läßt sich bei der Dichte durch Integration über das Intervall $(x_1, x_2]$ der Dichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ ermitteln. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Zufallsvariable $\mathbf{x}$ genau einen Wert x_0 annimmt, immer Null, wenn nicht die Dichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ bei $x = x_0$ einen Dirac–Impuls aufweist.

Einige Verteilungen und Dichten

Binomialverteilung. Eine (diskrete) Zufallsvariable $\mathbf{x}$ ist binomialverteilt, wenn für seine $N+1$ möglichen Werte $k = 0, ..., N$ gilt:

$$P(\mathbf{x} = k) = \binom{N}{k} p^k \cdot (1-p)^{N-k} \text{ mit } 0 < p < 1.$$

Für den linearen Mittelwert und die Varianz gilt:

$$m_{\mathbf{x}} = n \cdot p \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\mathbf{x}}^2 = n \cdot p(1-p).$$

Gleichverteilung. Bei einer *gleichverteilten diskreten Zufallsvariable* treten alle Ereignisse gleich häufig ein. Sind N Ereignisse möglich, ist die Auftrittswahrscheinlichkeit für jedes Ereignis $1/N$. Die Verteilung $F_{\mathbf{x}}(x)$ ist entsprechend eine Treppenfunktion mit

gleichverteilte diskrete ZV

gleichen Stufenhöhen und die Dichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ eine Summe von N Dirac–Impulsen mit dem Gewicht $1/N$. (Vgl. Würfelexperiment).

gleichverteilte kontinuierliche ZV

Eine in einem Intervall ***gleichverteilte kontinuierliche Zufallsvariable*** ist dadurch gekennzeichnet, daß in diesem Intervall die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ eine positive Konstante ist, deren Wert dem Inversen der Intervallbreite entspricht. Entsprechend nimmt die Verteilung $F_{\mathbf{x}}(x)$ in diesem Intervall linear zu. Ist die Zufallsvariable $\mathbf{x}$ im Intervall $-\Delta < x \leq \Delta$ gleichverteilt, dann gilt (vgl. Abb. 1.16):

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & \text{für } -\Delta < x \leq \Delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$F_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -\Delta \\ \frac{1}{2\Delta}(x+\Delta) & \text{für } -\Delta < x \leq \Delta \\ 1 & \text{für } x > \Delta \end{cases}.$$

Normalverteilung (Gauß-Verteilung). Eine normalverteilte oder Gauß-verteilte kontinuierliche Zufallsvariable wird durch ihre Dichte geschlossen beschrieben:

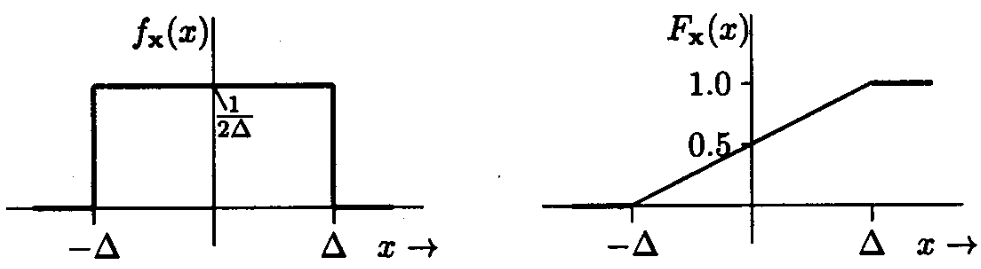
$$f_{\mathbf{x}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{\mathbf{x}}} e^{-(x-m_{\mathbf{x}})^2/2\sigma_{\mathbf{x}}^2}.$$

Parameter der Normalverteilung sind der lineare Mittelwert $m_{\mathbf{x}}$ und die Streuung $\sigma_{\mathbf{x}}$

Gaußsches Fehlerintegral

Das Integral über die Dichte, also die Verteilung $F_{\mathbf{x}}(x)$, wird als *Gaußsches Fehlerintegral* – in der Regel auf $m_{\mathbf{x}} = 0, \sigma_{\mathbf{x}} = 1$ normiert – in Tabellen niedergelegt, z.B. [1.1]. Unterschiedliche Integrationsgrenzen führen zu verschiedenenen Bezeichnungen, z.B. erf, erfc.

Abbildung 1.16
Dichte und Vertei-
lung einer gleich-
verteilten
kontinuierlichen
ZV



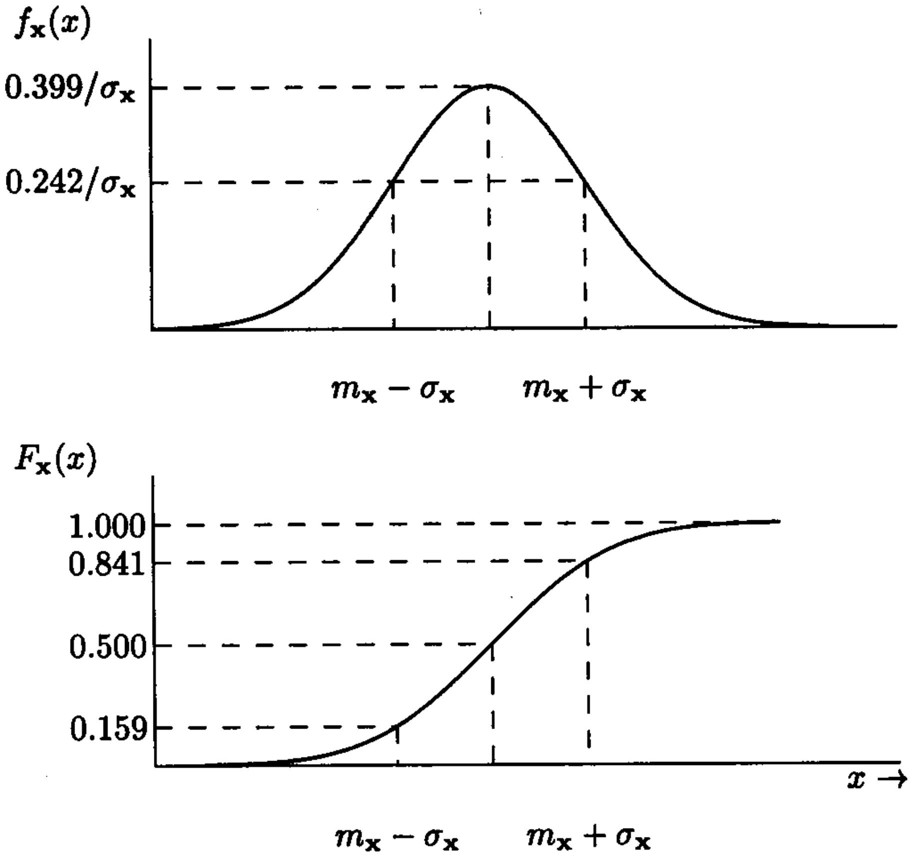


Abbildung 1.17 Dichte und Verteilung einer normalverteilten kontinuierlichen ZV

Die Bedeutung der Normalverteilung leitet sich unter anderem aus dem *zentralen Grenzwertsatz* ab, der besagt, daß die Wahrscheinkeitsverteilung einer Summe von N statistisch unabhängigen Zufallsvariablen im allgemeinen für wachsendes N einer Gauß-Verteilung zustrebt.

zentraler Grenzwertsatz

Mehrdimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen und -dichten

Analog zur eindimensionalen Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathbf{x}}(x)$ bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathbf{x}}(x)$ werden für mehrere Zufallsvariablen sogenannte Verbundverteilungen und Verbunddichten definiert (auch: gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung bzw. gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte). Es wird hier nur der zweidimensionale Fall betrachtet, für höherdimensionale Verteilungen und Dichten gilt Entsprechendes.

Verbundereignis

Verbundverteilung

Ausgangspunkt sind sogenannte *Verbundereignisse*, also Ereignisse, die durch das gemeinsame Eintreten mehrerer Ereignisse bestimmt werden. Die *Verbundverteilung* (gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung) für zwei Zufallsvariablen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ wird aus der Wahrscheinlichkeit abgeleitet, daß gleichzeitig $\mathbf{x} \leq x$ und $\mathbf{y} \leq y$ eintreten:

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = P(\mathbf{x} \leq x \cap \mathbf{y} \leq y).$$

Die Verbundverteilung hat alle Eigenschaften einer eindimensionalen Verteilung: Wenn man beispielsweise die Variable x festhält, dann erhält man eine Funktion, die bei Variation von y zwischen $-\infty$ und $+\infty$ monoton steigt und Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Da dies für alle Werte von x erfüllt ist und auch bei Vertauschung von x und y gilt, ist $F_{\mathbf{xy}}(x, y)$ stets monoton steigend in x und y mit Werten zwischen 0 und 1.

Verbunddichte

Die *Verbunddichte* (gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte) wird durch partielle Ableitung aus der Verteilung gewonnen:

$$f_{\mathbf{xy}}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathbf{xy}}(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Als Umkehrbeziehung gilt entsprechend:

$$F_{\mathbf{xy}}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{\mathbf{xy}}(\xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta.$$

Auch die Verbunddichte verhält sich wie eine eindimensionale Dichte, wenn man eine Variable festhält und die andere variiert. Sie ist entsprechend überall nichtnegativ und für das Integral gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(\xi, \eta) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = 1.$$

Randdichte

Die Einzeldichten $f_{\mathbf{x}}(x), f_{\mathbf{y}}(y)$ ergeben sich als sogenannte *Randdichten* dadurch, daß man eine Variable festhält und die andere integriert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(x, \eta) \mathrm{d}\eta &= f_{\mathbf{x}}(x), \\ \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{xy}}(\xi, y) \mathrm{d}\xi &= f_{\mathbf{y}}(y). \end{aligned}$$

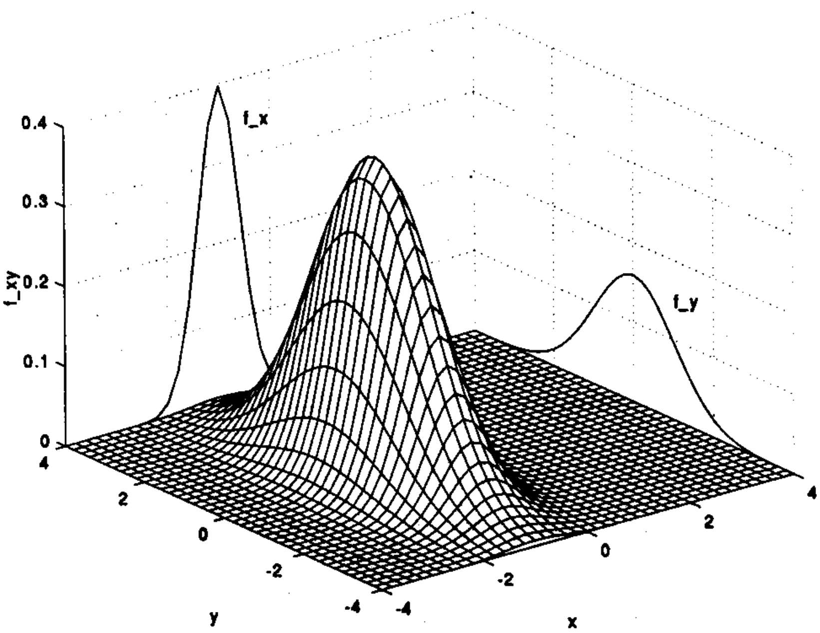


Abbildung 1.18 Beispiel für eine zweidimensionale Verbunddichte $f_{\mathbf{xy}}(x, y)$ mit Randdichten $f_{\mathbf{x}}(x)$, $f_{\mathbf{y}}(y)$

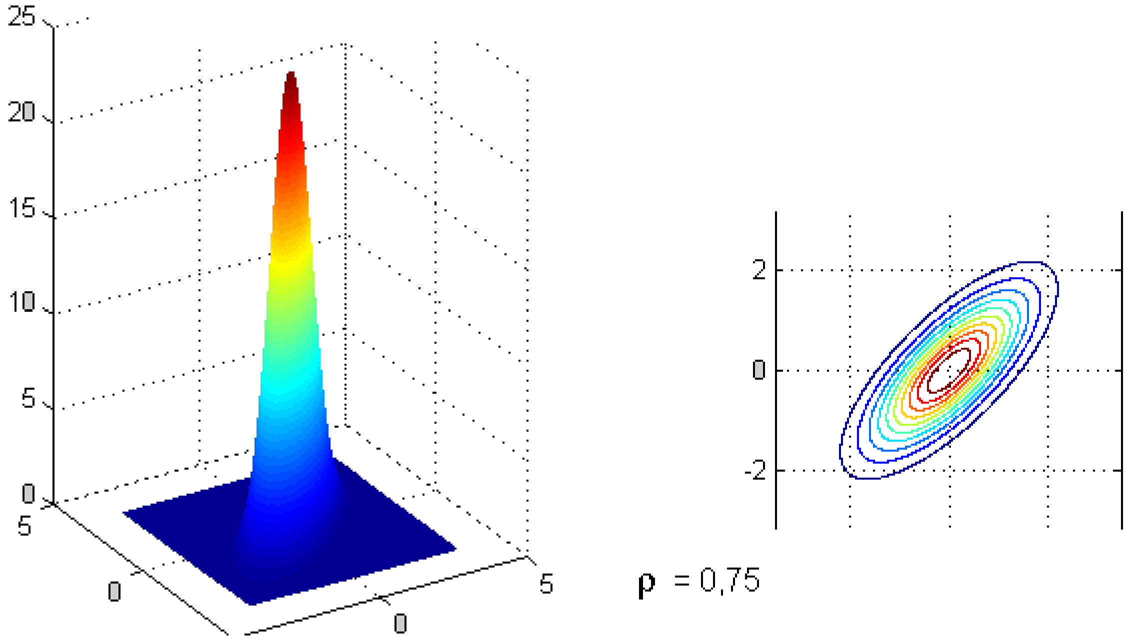
Gaußsche Verbundzufallsvariablen

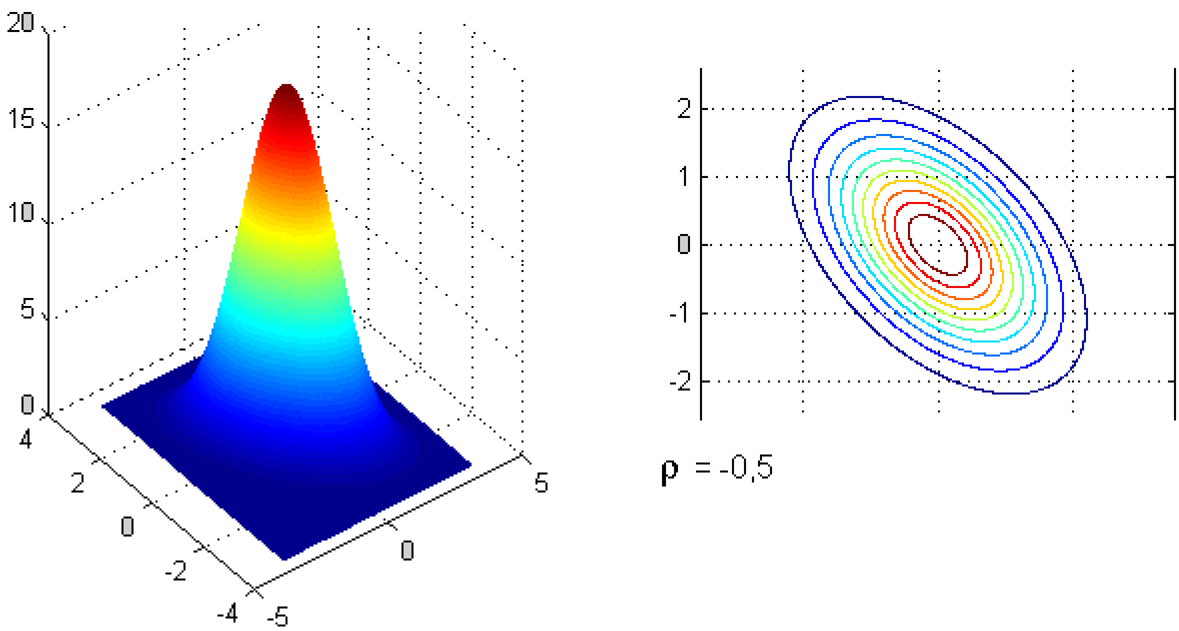
Zu den Gaußschen Verbundzufallsvariablen X und Y gehört die Verbunddichte

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}-\frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\right]\right\}$$

mit σ_1^2 und σ_2^2 und m_1 und m_2, den Varianzen und Mittelwerten der Prozesse und dem Korrelationskoeffizienten ρ.





Mehrfachfunktionen die von mehreren Zufallsvariablen abhängen

Es seien X und Y gegebene Zufallsvariable. Dann können durch die Gleichungen

$$Z = g(X,Y),$$
$$W = h(X,Y)$$

neue Zufallsvariablen definiert werden, aus denen sich die Verbundverteilungen durch Einsetzen in die Definitionen direkt berechnen lassen. Besitzt das Gleichungssystem

$$z = g(x,y),$$
$$w = h(x,y)$$

abzählbar Lösungen $\{x_i, y_i\}$ und die Jacobi-Matrix des Gleichungssystems

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}$$

für diese Werte eine von Null verschiedene Determinante, können wir schreiben

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_i \frac{f(x_i, y_i)}{\left|\det J(x_i, y_i)\right|} .$$

Beispiel:
Die Zeiger einer Sinus- und einer Cosinusschwingung gleicher Frequenz stehen senkrecht aufeinander und können geometrisch addiert werden. Wir wollen annehmen das Amplituden der beiden Schwingungen unabhängig voneinander sind und einer mittelwertfreien Normalverteilung mit der Varianz σ genügen. Wir wollen daraus die Verbundverteilung von Betrag und Phase des Summenzeigers berechnen.

Da statistische Unabhängigkeit von X und Y gilt folgt

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

Für den Betrag gilt $V = \sqrt{X^2 + Y^2}$ und für die Phase $\Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

Mit diesen Ausdrücken ergibt sich für g, h und J

$$g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad h(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ \text{und}\ J(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{bmatrix}$$

und $$\left|\det J(x,y)\right|=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Das Gleichungssystem $v=\sqrt{x^2+y^2}, J=h(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ besitz nur die

Lösung $$x=v\cdot\cos(J),\ y=v\cdot\sin(J)\ .$$

Einsetzen diese Ausdrücke in die Verbundverteilunsdichte von V und Θ ergibt

$$f_{V,\Theta}(v,J)=v\cdot\ f_{X,Y}(v\cdot\cos(J),v\cdot\sin(J))$$

$$=\frac{1}{2ps^2}e^{-\frac{v^2}{2s^2}}\quad \text{mit}\quad v\geq 0, 0\leq J<2p$$

Zur Bestimmung der Randdichten müssen wir $f_{v\Theta}$ jeweils über den Bereich der anderen Variablen integrieren.

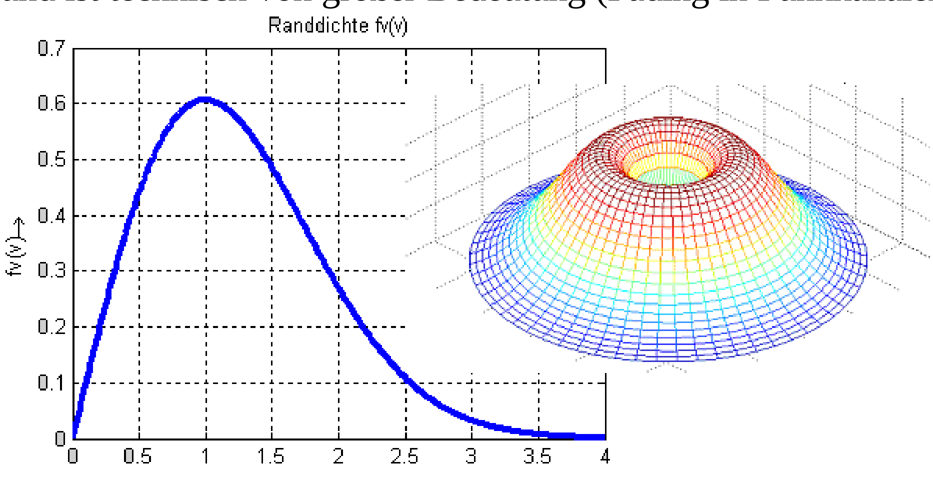
$$f_\Theta(J)=\int_0^\infty f_{V,\Theta}(v,J)\cdot dv=\frac{1}{2p}\int_0^\infty\frac{v}{s^2}e^{-\frac{v}{2s^2}}\cdot dv$$

$$=\frac{1}{2p}\left[-e^{-\frac{v^2}{2s^2}}\right]_0^\infty=\frac{1}{2p},\qquad 0\leq J<2p$$

Der Winkel ist über das Intervall $[0,2p]$ gleichmäßig verteilt.

$$f_V(v)=\int_0^{2p}f_{V,\Theta}(v,J)\cdot dv=\frac{v}{s^2}e^{-\frac{v^2}{2s^2}}\quad \text{mit}\quad v\geq 0\ .$$

Diese Dichtefunktion wird als ***Rayleigh'sche Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*** bezeichnet und ist technisch von großer Bedeutung (Fading in Funkkanälen)



Erwartungswerte:

Erwartungswerte, Momente

Nicht immer sind zur Beschreibung von Zufallsvariablen die Verteilungen bzw. Dichten notwendig, oft zieht man kompaktere Größen, sogenannte *Erwartungswerte* oder *Momente* vor, die als Mittelwerte über der Menge der Zufallsergebnisse aufzufassen sind. Allgemein lautet der Erwartungswert zu einer Funktion $g(\mathbf{x})$ der Zufallsvariablen $\mathbf{x}$:

$$E\{g(\mathbf{x})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x.$$

Von besonderer Bedeutung ist die Linearität (vgl. Gl. 1.7) des Erwartungswertoperators, die praktisch immer die Vertauschung mit anderen linearen Operatoren wie etwa Fourier–Transformation und Faltung erlaubt. Durch spezielle Wahl der Funktion $g(\mathbf{x})$ definiert man verschiedene besondere Erwartungswerte:

Linearer Mittelwert (1. Moment) $m_{\mathbf{x}}$ oder $m_{\mathbf{x}}^{(1)}$: Mit $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ wird

$$m_{\mathbf{x}}^{(1)} = m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x.$$

Für diskrete Zufallsvariablen wird das Integral über die Dirac–Impulse $\delta(x - x_i)$ zur Summe, und die Gewichte an den Stellen x_i entsprechen den Auftrittswahrscheinlichkeiten $P(\mathbf{x} = x_i) := P(x_i)$:

$$m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\} = \sum_i x_i \cdot P(x_i).$$

mittelwertfrei

Ist der lineare Mittelwert $m_{\mathbf{x}} = 0$, so wird die Zufallsvariable $\mathbf{x}$ als *mittelwertfrei* bezeichnet.

Quadratischer Mittelwert (2. Moment) $m_{\mathbf{x}}^{(2)}$: Mit $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2$ ergibt sich

$$m_{\mathbf{x}}^{(2)} = E\{\mathbf{x}^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x.$$

Für diskrete Dichten gilt

$$m_{\mathbf{x}}^{(2)} = \sum_i x_i^2 \cdot P(x_i).$$

Der quadratische Mittelwert wird oft als mittlere Leistung interpretiert.

Varianz (2. zentrales Moment) $\sigma_{\mathbf{x}}^2$: Sie beschreibt die mittlere quadratische Abweichung vom linearen Mittelwert $m_{\mathbf{x}}^{(1)}$ und ergibt sich aus $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^2$:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = E\left\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\mathbf{x}})^2 \, f_{\mathbf{x}}(x)\mathrm{d}x.$$

Für diskrete Dichten gilt:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_i (x_i - m_{\mathbf{x}})^2 P(x_i).$$

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt die Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}^2 &= E\left\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})^2\right\} = E\left\{\mathbf{x}^2\right\} - 2m_{\mathbf{x}}E\left\{\mathbf{x}\right\} + m_{\mathbf{x}}^2 = \\ &= m_{\mathbf{x}}^{(2)} - m_{\mathbf{x}}^2. \end{aligned}$$

Die *Streuung* $\sigma_{\mathbf{x}}$ (*root mean square (RMS) value*) entspricht der positiven Wurzel der Varianz: Streuung

$$\sigma_{\mathbf{x}} = +\sqrt{\sigma_{\mathbf{x}}^2}.$$

Erwartungswerte lassen sich auch für *Funktionen mehrerer Zufallsvariablen* $g(\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_N)$ angeben

$$E\left\{g(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_1, \ldots, x_N) f_{\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_N}(x_1, \ldots, x_N)\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N,$$

wobei $f_{\mathbf{x}_1 \cdots \mathbf{x}_N}(x_1, \ldots, x_N)$ die oben eingeführte Verbunddichte der N Zufallsvariablen $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N$ ist.

Kovarianz $C_{\mathbf{xy}}$: Sie beschreibt den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{xy}} &= E\left\{(\mathbf{x} - m_{\mathbf{x}})(\mathbf{y} - m_{\mathbf{y}})\right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\mathbf{x}})(y - m_{\mathbf{y}}) \, f_{\mathbf{xy}}(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Für diskrete Zufallsvariablen lautet die Kovarianz

$$
\begin{aligned}
C_{\mathbf{xy}} &= E\left\{(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-m_{\mathbf{y}})\right\} = \\
&= \sum_i \sum_j (x_i - m_{\mathbf{x}})(y_j - m_{\mathbf{y}}) \cdot P(x_i, y_j).
\end{aligned}
$$

Multipliziert man unter dem Erwartungswert aus und berücksichtigt $m_{\mathbf{x}} = E\{\mathbf{x}\}$ und $m_{\mathbf{y}} = E\{\mathbf{y}\}$, dann ergibt sich

$$E\left\{(\mathbf{x}-m_{\mathbf{x}})(\mathbf{y}-m_{\mathbf{y}})\right\} = E\{\mathbf{xy}\} - E\{\mathbf{x}\} \cdot E\{\mathbf{y}\}.$$

Unkorreliertheit

Zwei Zufallsvariablen werden dann als *unkorreliert* bezeichnet, wenn die Kovarianz gleich Null ist:

$$C_{\mathbf{xy}} = 0 \Longleftrightarrow E\{\mathbf{xy}\} = E\{\mathbf{x}\} \cdot E\{\mathbf{y}\}.$$

Durch Einsetzen der Bedingung für die statistische Unabhängigkeit (1.187) in (1.198) verifiziert man, daß statistisch unabhängige Zufallsvariablen immer unkorreliert sind. Umgekehrt folgt aus der Unkorreliertheit nicht die statistische Unabhängigkeit:

$$f_{\mathbf{xy}}(x,y) = f_{\mathbf{x}}(x) \cdot f_{\mathbf{y}}(y) \Longrightarrow E\{\mathbf{xy}\} = E\{\mathbf{x}\} \cdot E\{\mathbf{y}\}$$

Korrelations-koeffizient

Durch Normierung auf die jeweiligen Streuungen ergibt sich aus der Kovarianz der *Korrelationskoeffizient* $c_{\mathbf{xy}}$:

$$c_{\mathbf{xy}} = \frac{C_{\mathbf{xy}}}{\sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}}} \text{ mit } \quad -1 \le c_{\mathbf{xy}} \le 1.$$

Bei unkorrelierten Zufallsvariablen ist $c_{\mathbf{xy}} = 0$. Der Maximalwert der Korrelation ist $|c_{\mathbf{xy}}| = 1$. Die Korrelation dient als Maß für einen statistischen Zusammenhang oft zur Überprüfung möglicher Kausalzusammenhänge, kann diese aber nicht begründen.

Orthogonalität

Eine weitere Eigenschaft zur Charakterisierung des statistischen Zusammenhangs ist die *Orthogonalität*:

$$E\{\mathbf{xy}\} = 0.$$

Offensichtlich sind zwei Zufallsvariablen immer orthogonal, wenn sie unkorreliert sind und eine davon mittelwertfrei ist.