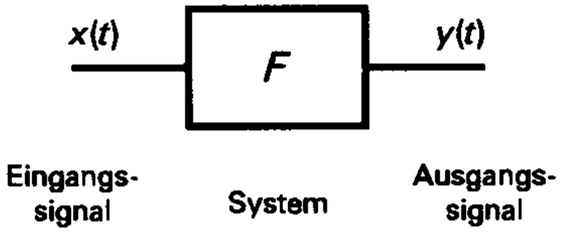
Einführung in die Nachrichtentechnik

Teil II

Nachrichtentechnische Grundlagen

Nachrichtentechnische Grundlagen

Signale und Systeme



System im Zeitbereich

Allgemeiner Fall:

$$y(t) = Tr\{x(t)\}$$

Linearität:

Mit $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ und $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

gilt immer auch $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) \to a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Zeitinvarianz:

Mit $x(t) \rightarrow x(t-t_0)$

gilt immer auch $y(t) \to y(t - t_0)$

Gedächtnis:

Bei einem System ohne Gedächtnis ist $y(t_0)$ nur von $x(t_0)$ abhängig. Hat das System Gedächtnis so haben auch Werte von x(t) für $t < t_0$ auf $y(t_0)$ Einfluß.

Kausalität:

Ein System ist kausal, wenn nur zurückliegende und gegenwärtige Eingangssignale Einfluß auf das momentane Ausgangssignal haben. Reagiert ein System auf ein Signal, bevor dieses am Eingang auftritt sprechen wir von akausalem Verhalten. Solche Systeme sind physikalisch unreal aber manchmal mathematisch bequemer zu beschreiben.

Stabilität:

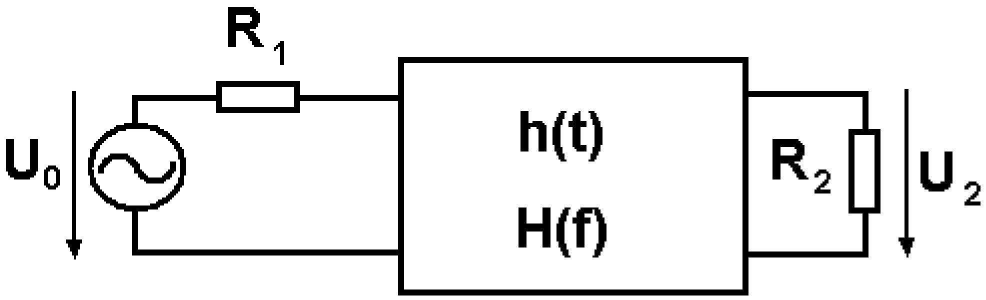
BIBO-Stabilität bedeutet, ***bounded input – bounded output,*** das heißt

mit $|x(t)| \leq M < \infty \forall t$

gilt auch $|y(t)| \leq N < \infty \forall t$.

Übertragungsverhalten eines Zweitores

$$y = x(t) * h(t); y = u_2, x = \frac{1}{2} u_0, u_2(t) = \frac{1}{2} \cdot u_0(t) * h(t)$$



$$U_2(f) = \frac{1}{2} \cdot U_0(f) \cdot H(f)$$

Definition:

$$H(f) = 2 \cdot \frac{U_2(f)}{U_0(f)}, h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2pft} \cdot dt$$

Mit dieser Definition folgt

$$\frac{P_2(f)}{P_{1\max}(f)} = \frac{\frac{|U_2(f)|^2}{R_2}}{\frac{|U_0(f)|^2}{4 \cdot R_1}} = |H(f)|^2 \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

speziell mit $R_1 = R_2 = R$ gilt der einfache Zusammenhang

$$\frac{P_2(f)}{P_{1\max}(f)} = \frac{\frac{|U_2(f)|^2}{R}}{\frac{|U_0(f)|^2}{4 \cdot R}} = |H(f)|^2$$

Dämpfungsfunktion:

$$D(f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0(f)}{U_2(f)} = \frac{1}{H(f)}$$

Übertragungsmaß:

Mit $\qquad H(f) = |H(f)| \cdot e^{j \arg\{H(f)\}}$

folgt $\qquad g(f) = a(f) + jb(f) = \ln\{D(f)\} = -\ln\{H(f)\}$

die Betriebsdämpfung $\quad a(f) = -\ln\{|H(f)|\}$, gemessen in N (Neper)

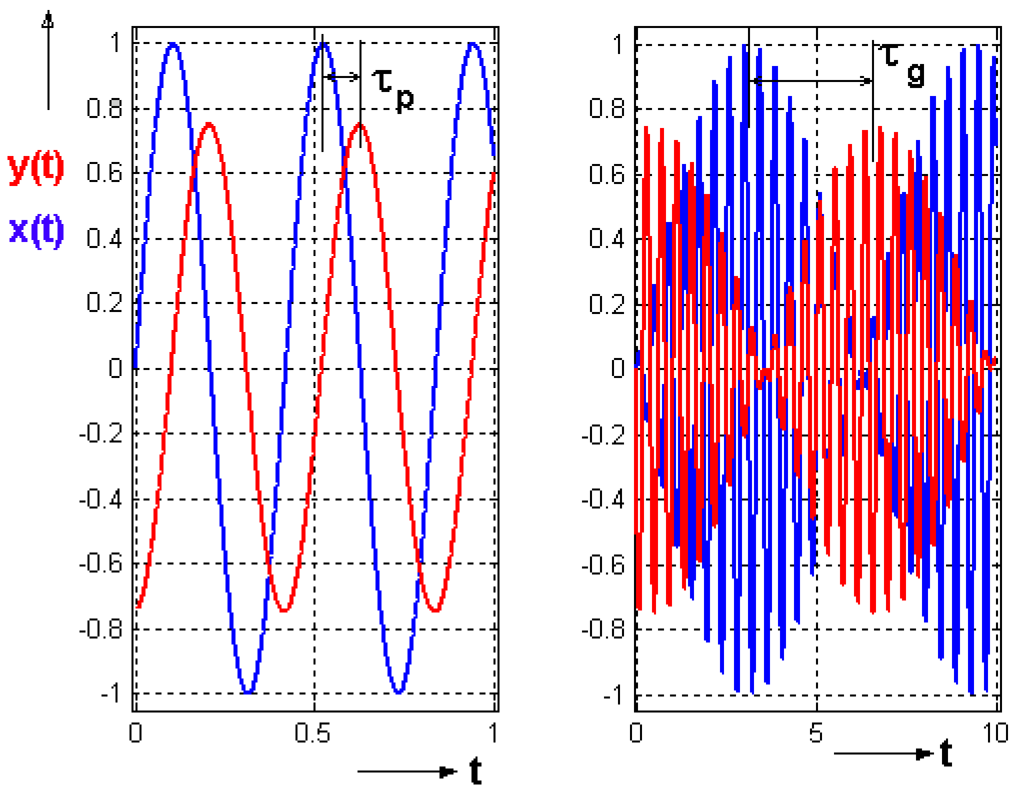
$\qquad a(f) = -20 \cdot \lg\{|H(f)|\}$, gemessen in dB (dezi Bel)

und

die Betriebsphase $\quad b(f) = -\arg\{H(f)\} = -j(f)$ im Bogenmaß

Phasen- und Gruppenlaufzeit:

$$t_{ph}(f) = -\frac{j(f)}{2 \cdot p \cdot f} \qquad \text{bzw.} \qquad t_{ph}(f) = -\frac{1}{2 \cdot p} \cdot \frac{dj(f)}{df}$$



Logarithmierte Verhältnisgrößen

Logarithmierte Verhältnisgrößen zu Basis e

Wird die Basis e benutz, werden die Verhältnisgrößen mit der (pseudo-) Einheit „Neper" gekennzeichnet. DAS Neper wird nur für Spannungs- oder Stromverhältnisse eingesetzt.

$$A = \ln\left(\frac{F_1}{F_2}\right)N$$

Diese Größen werden nur noch selten benutzt, da Messgeräte für Dämpfungen oder Verstärkungen immer in dB (Dezibel) geeicht sind.

Logarithmierte Verhältnisgrößen zu Basis 10

Wird die Basis 10 benutz, werden die Verhältnisgrößen mit der (pseudo-) Einheit „Bel" gekennzeichnet. Da das Bel (B) aber praktisch eine zu große Einheit ist nimmt man ein Zehntel dieses Maßes, das „Dezibel" (dB) zur Grundeinheit. Sie werden immer für die Beschreibung von Leistungsverhältnissen eingesetzt.

$$A = 10\lg\left(\frac{P_1}{P_2}\right)dB\,.$$

Natürlich ist es möglich, Leistungen durch Ströme oder Spannungen auszudrücken und

$$A = 10\lg\left(\frac{U_1^2}{U_2^2}\cdot\frac{R_2}{R_1}\right)dB \quad \text{oder} \quad A = 10\lg\left(\frac{I_1^2}{I_2^2}\cdot\frac{R_1}{R_2}\right)dB \quad \text{zu schreiben.}$$

Für den wichtigen Fall, dass $R_1 = R_2 = R$ gilt, wird daraus einfach

$$A = 20\lg\left(\frac{U_1}{U_2}\right)dB \quad \text{oder} \quad A = 20\lg\left(\frac{I_1}{I_2}\right)dB\,.$$

Für die Umrechnung von Neper in Dezibel und umgekehrt gilt dann

$$1N = 20\lg(e)dB = 8{,}686dB \quad \text{und} \quad 1dB = \frac{1}{20\cdot\lg(e)}N = 0{,}115N\,.$$

Verwendung logarithmierter Verhältnisgrößen in der Praxis

Der Bezeichnung „dB" können noch Zeichen hinzugefügt werden, die nähere Informationen enthalten, z. B. über die Bezugsgröße. In der Nachrichtentechnik sind folgende Pegel von besonderer Bedeutung:

Absolute Pegel

- dBm – Leistungspegel, bezogen auf 1 mW (entspricht 0,775 V an 600 Ω)

$$\begin{aligned} 0\text{ dBm} &\mathrel{\hat{=}} 1\text{ mW}\\ 30\text{ dBm} &\mathrel{\hat{=}} 1\text{ W}\\ -30\text{ dBm} &\mathrel{\hat{=}} 1\,\mu\text{W}\end{aligned}$$

- dBW – Leistungspegel, bezogen auf 1 W
- dBu – Spannungspegel, bezogen auf 0,775 V
- dBV – Spannungspegel, bezogen auf 1 V
- dBµV – Spannungspegel, bezogen auf 1 µV

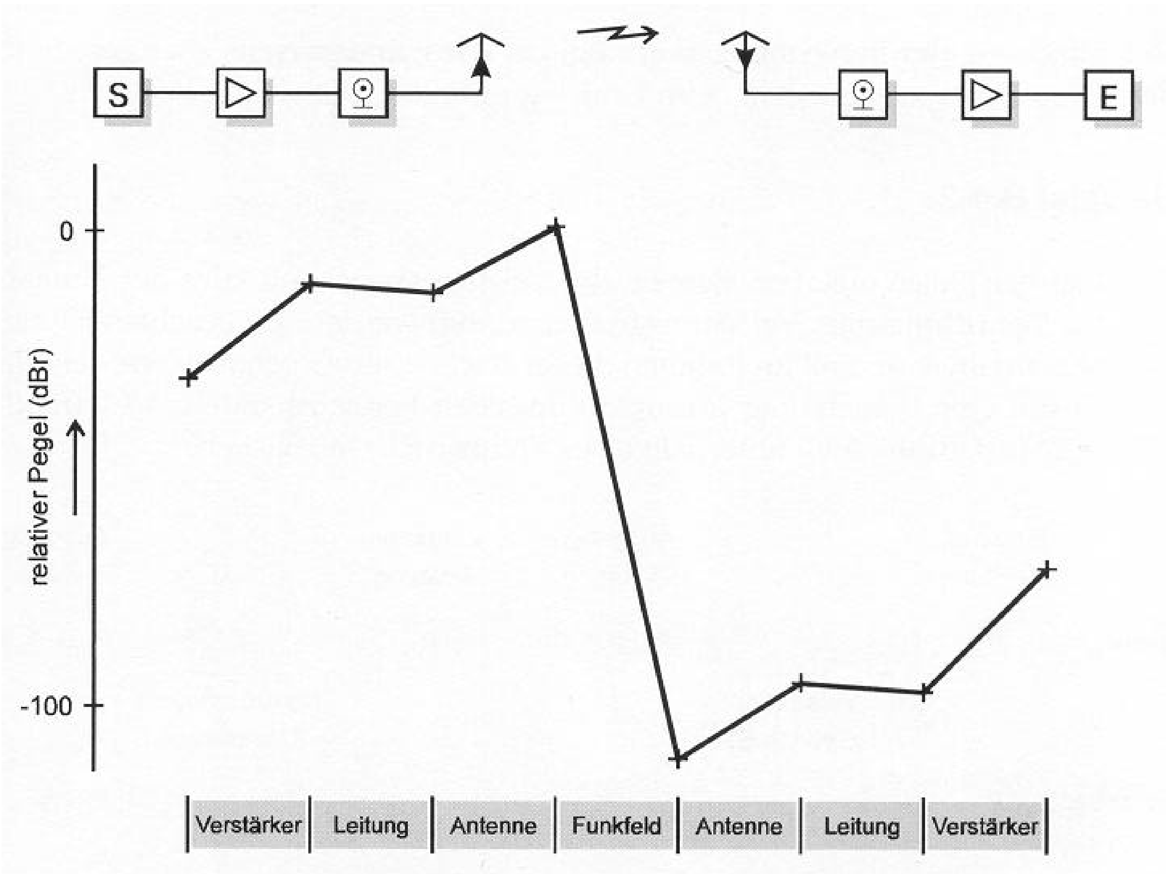
$$0\ \text{dB}\mu\text{V} \;\hat{=}\; 1\ \mu\text{V}$$
$$60\ \text{dB}\mu\text{V} \;\hat{=}\; 1\ \text{mV}$$
$$-60\ \text{dB}\mu\text{V} \;\hat{=}\; 1\ \text{nV}$$

- dBK – „Temperaturpegel“, bezogen auf 1 K
- dBHz – „Frequenzpegel“, bezogen auf 1 Hz

Relative Pegel

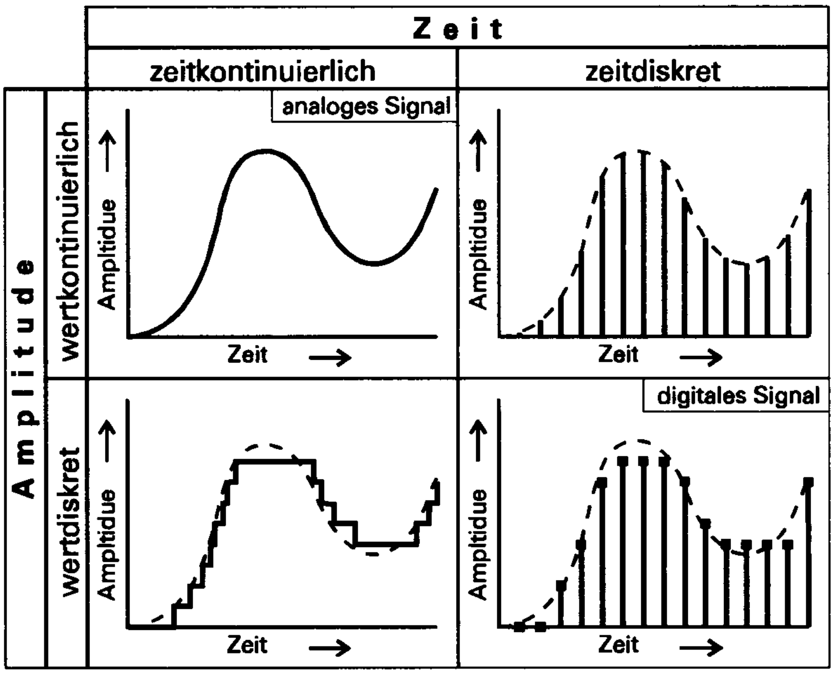
- dBr – charakterisiert die betrachtete Stelle eines Übertragungssystems – Bezugspunkt ist in der Übertragungstechnik oft der Anfang der Fernleitung
- dBc – bezogen auf den Träger (*Carrier*) des Signals

Beispiel

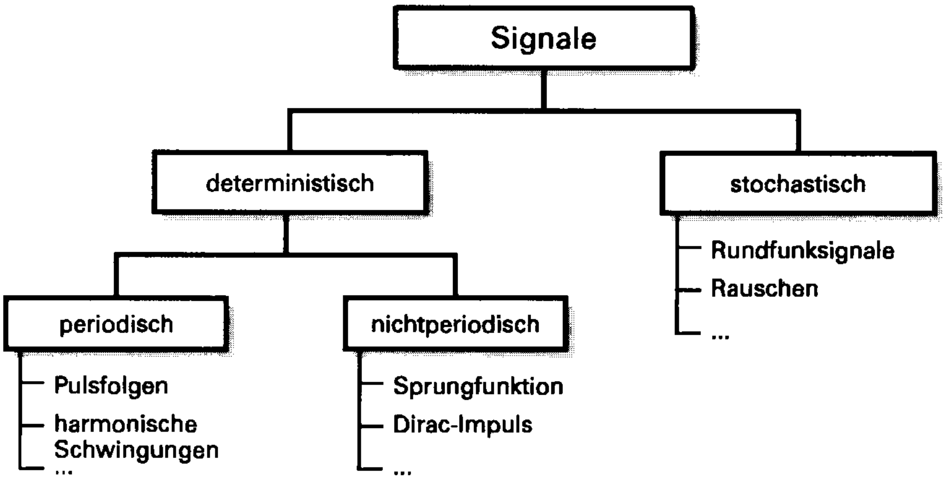


Verlauf des relativen Pegels im Verlauf einer Übertragungsstrecke

Signalklassifizierungen



Zeitfunktionen – kontinuierlich / diskret



Deterministische und stochastische Signale

Leistungs- und Energiesignale:

Ausgangspunkt sind (mittlere) Leistung und (Gesamt-)Energie eines Signals

$$P = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} s^2(t)dt \qquad \text{und} \qquad E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$$

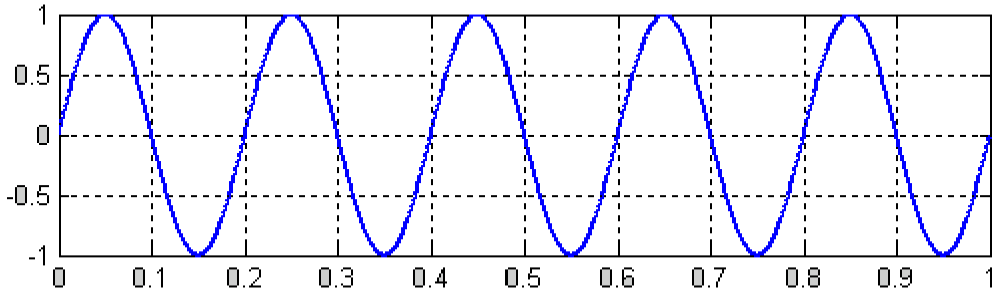
Signale für die gilt: $P \leq M < \infty$ nennt man ***Leistungssignale.***

Ist P = 1 sprechen wir von einem normierten Leistungssignal.

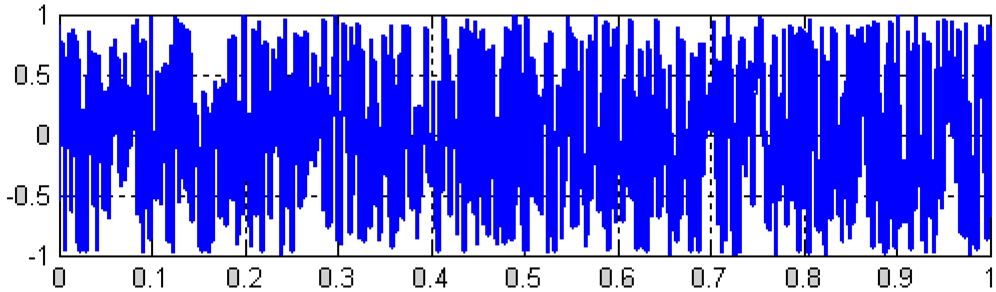
Signale für die gilt: $E \leq N < \infty$ nennt man ***Energiesignale.***

Beispiele:
Leistungssignale: periodische Signale, stochastische Signale

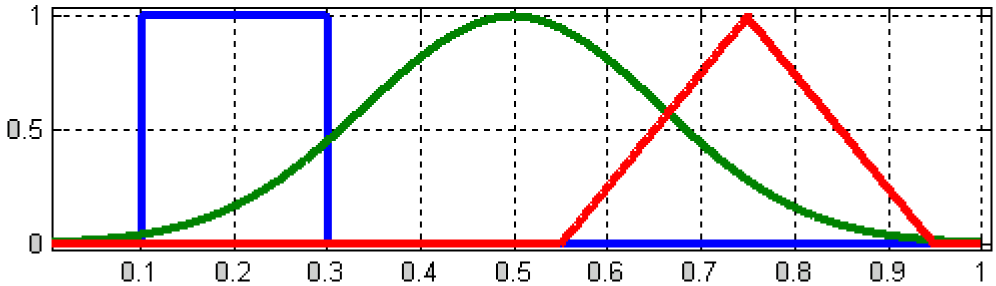
P = 0.5



P = 1/3



Energiesignale: verschiedene Impulse endlicher Amplitude und Dauer



Autokorrelationsfunktion und das Leistung- und Energiedichtespektrum:

Für die Übertragung von Nachrichtensignalen ist die spektrale Verteilung der Energie bzw. der Leistung ein entscheidendes Merkmal. Aussagen darüber lassen sich mit Hilfe der Fourieranalyse der Autokorrelationsfunktion gewinnen.

Energiesignale

Die Autokorrelatiosfunktion (AKF)

$$R_{ss}^{(E)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot s(t+t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t-t) \cdot s(t) \cdot dt$$

mit
$$R_{ss}^{(E)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\, s(t)\,|^2 \cdot dt = E_s$$

und
$$R_{ss}^{(E)}(-t) = R_{ss}^{(E)*}(t)\,.$$

Die Fouriertransformation von R_{ss} liefert uns das Energiedichtespektrum $\Phi_{ss}(f)$ des Impulses.

$$\Phi_{ss}^{(E)}(f) = |\, S(f)\,|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}^{(E)}(t) \cdot e^{-j2ptt} dt \,, \qquad \left[\Phi^{(E)}\right] = \frac{Ws}{Hz}$$

und es gilt
$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}^{(E)}(f) df \quad .$$

Leistungssignalesignale

Die Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$R_{ss}^{(P)}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \cdot s(t+t) \cdot dt$$

mit
$$R_{ss}^{(P)}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |\, s(t)\,|^2 \cdot dt = P_s$$

und
$$R_{ss}^{(P)}(-t) = R_{ss}^{(P)*}(t) \quad .$$

Die Fouriertransformation von R_{ss} liefert uns das Leistungsdichtespektrum $\Phi_{ss}(f)$ des Impulses.

$$\Phi^{(P)}(f) = |\, S(f)\,|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R_{ss}(t) \cdot e^{-j2ptt} dt \,, \qquad \left[\Phi^{(P)}\right] = \frac{W}{Hz}$$

und es gilt
$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(P)}(f) df \quad .$$

Handelt es sich bei dem Leistungssignal um ein deterministisches periodisches Signal, können wir mit der Fourierreihe arbeiten:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk2pf_0t} \qquad \text{mit} \qquad c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s(t) \cdot e^{-jk2pf_0t} dt \; .$$

Damit gilt

$$R_{ss}^{(P)}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_k c_k^* \cdot e^{-j2pf_0kt} \cdot \sum_j c_j \cdot e^{j2pf_0j(t+t)} \right] \cdot dt$$

mit $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} c_k^* \cdot e^{-j2pf_0kt} \cdot c_j \cdot e^{j2pf_0j(t+t)} dt = \begin{matrix} j = k, | c_k |^2 \cdot e^{j2pkf_0t} \\ j \neq k, 0 \end{matrix}$

ergibt sich
$$R_{ss}^{(P)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2 \cdot e^{j2pf_0kt}$$

Aus diesem Ausdruck kann man die Linien des Leistungsdichtespektrums (die Fouriertransformierte)direkt ablesen:

$$\Phi^{(P)}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2 \cdot d(f - kf_0) \; .$$

Die (mittlere) Leistung P des Signals berechnet sich als Summe aller Linienleistungen:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} s^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} | c_k |^2 \; .$$

Im Gegensatz zum Linienspektrum des periodischen Leistungssignals liegt bei den impulsförmigen Energiesignalen ein kontinuierliches Amplitudendichtespektrum vor:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-jk2pf_0t} dt \; .$$

Dessen Betragsquadrat stellt das Energiedichtespektrum dar:

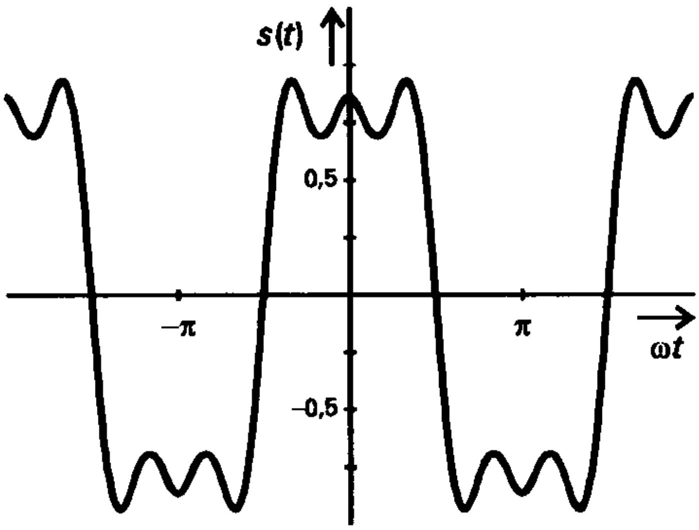
$$\Phi^{(E)}(f) = S(f) \cdot S^*(f) = | S(f) |^2 \; .$$

Die Gesamtenergie E des Signals berechnet sich zu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df \,.$$

Beispiel für ein Leistungssignal:

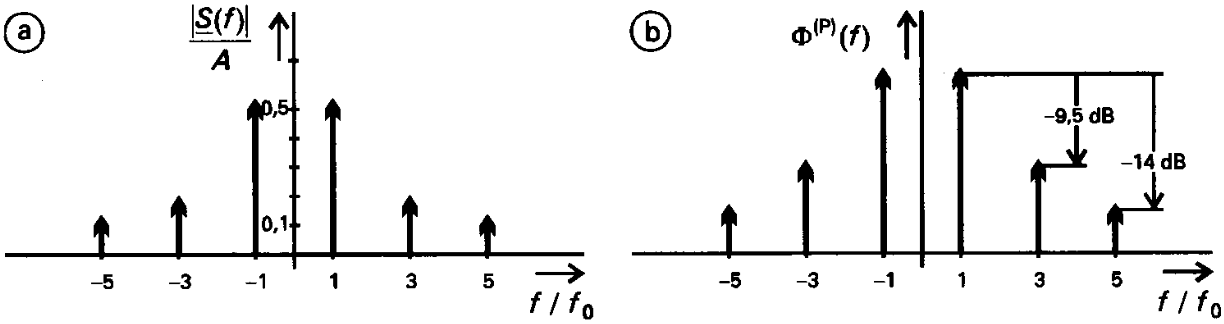
$$s(t) = A \cdot \left\{ \cos(w_0 t) - \frac{1}{3}\cos(3w_0 t) + \frac{1}{5}\cos(5w_0 t) \right\}$$



Zeitverlauf des Signals s(t)

Die Linienamplituden sind:

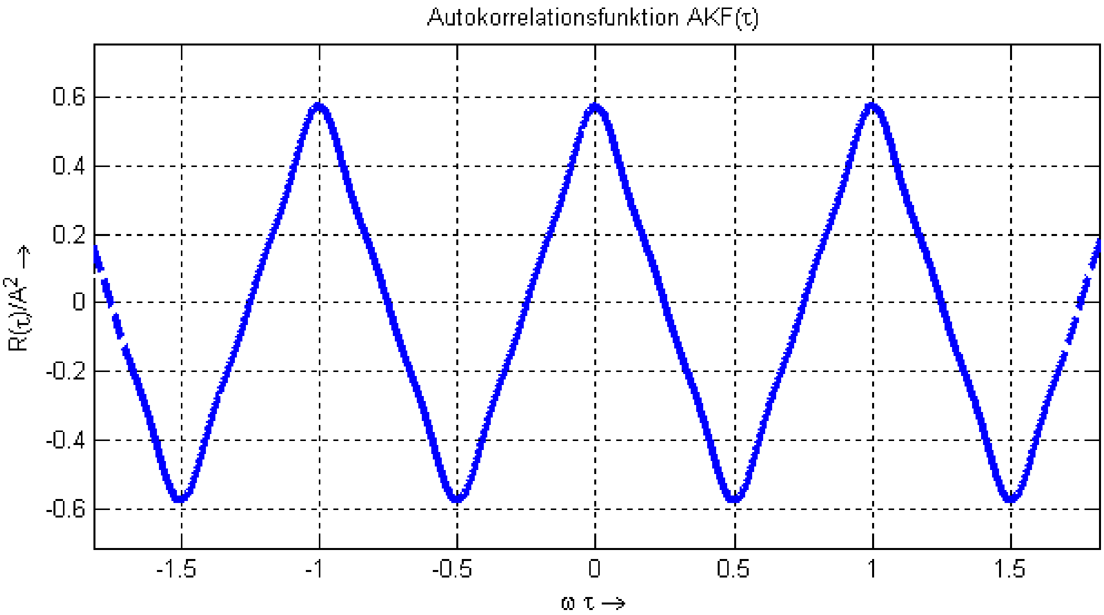
$$c_1 = c_{-1} = \frac{A}{2}, c_3 = c_{-3} = -\frac{A}{6}, c_5 = c_{-5} = \frac{A}{10}, c_k = 0 sonst \,.$$



Amplitudenspektrum (a) sowie (logarithmisches) Leistungsdichtespektrum (b) des Signals s(t)

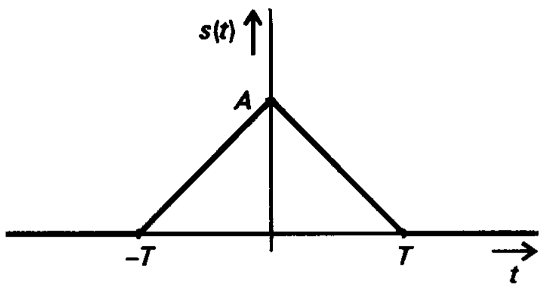
Die zugehörige AKF lautet

$$R(t) = \frac{A^2}{2} \cdot \left\{ \cos(w_0 t) + \frac{1}{9}\cos(3w_0 t) + \frac{1}{25}\cos(5w_0 t) \right\}$$

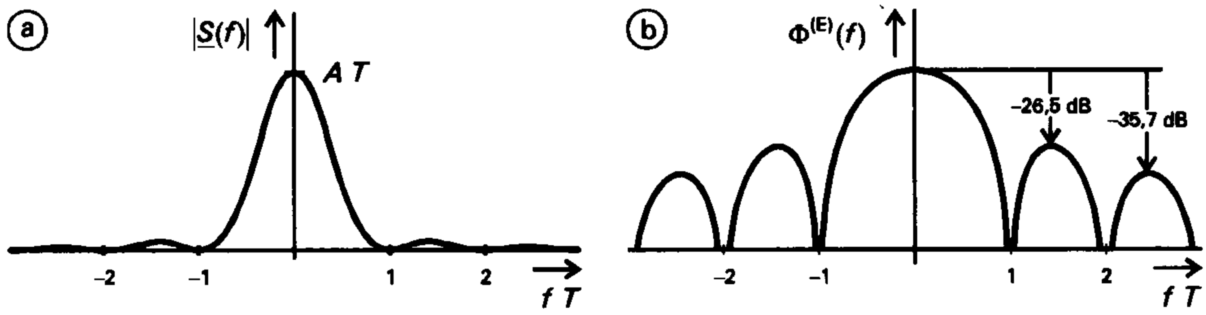


Als Energiesignal untersuchen wir den Dreiecksimpuls s(t) = Λ(t/T) der Dauer von 2T.

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - \frac{|t|}{T}), |t| \leq T \\ 0, sonst \end{cases}$$



$\underline{S}(f) = \mathrm{FT}\{s(t)\} = AT\,\mathrm{si}^2(\pi f T)$ $\quad\quad$ $\Phi^{(E)}(f) = |\underline{S}(f)|^2 = A^2T^2\,\mathrm{si}^4(\pi f T)$

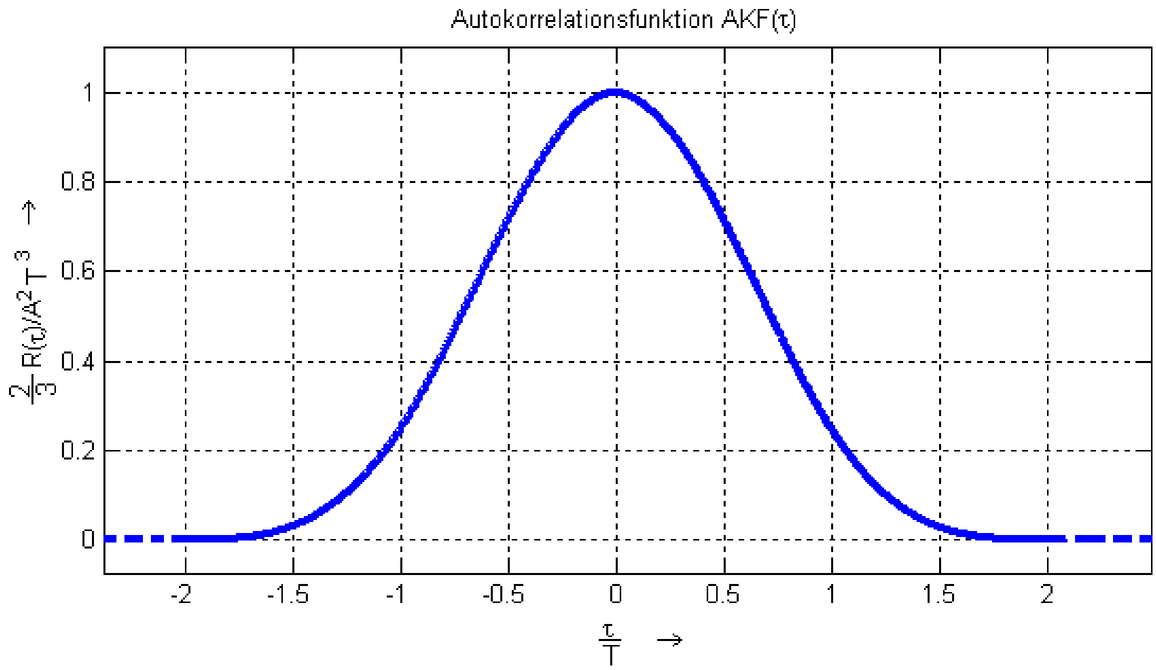


Amplitudenspektrum (a) sowie (logarithmisches) Energiedichtespektrum (b) des Signals $s(t)$

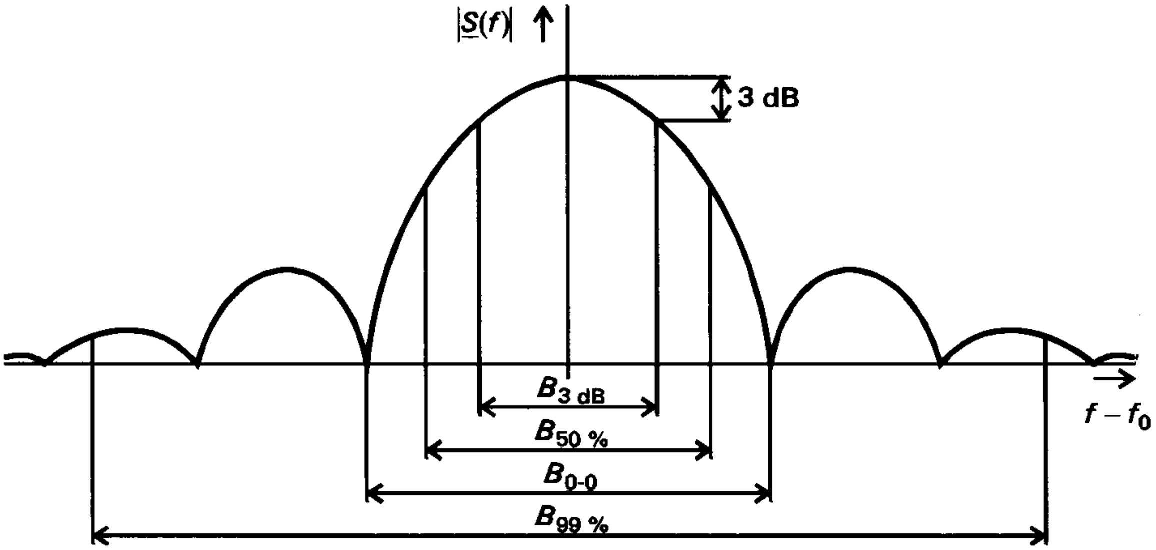
Die Energie des Signals bestimmt sich zu

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 \cdot df = \frac{2}{3} A^2 T^3 ,$$

und für die AKF gilt



Die Bandbreite eines Signals:



Zur Definition der Bandbreite

Anhand des (mit logarithmischer Ordinate dargestellten) Leistungsdichtespektrums in Abb. werden hier die verbreitetsten Bandbreitedefinitionen vorgestellt, wobei f_0 die Mittenfrequenz bezeichnen soll.

$B_{3\,\mathrm{dB}}$ Abstand zwischen den Frequenzen, bei denen die Leistungsdichte um 3 dB gegenüber dem Maximalwert abgefallen ist.

$B_{50\,\%}$ Bandbreite, innerhalb derer 50 % des gesamten Leistungsinhalts des Signals enthalten ist (auch $B_{0,5}$).

$B_{0\text{-}0}$ Abstand zwischen den ersten Nullstellen im Spektrum.

$B_{99\,\%}$ Bandbreite, innerhalb derer 99 % des gesamten Leistungsinhalts des Signals enthalten ist (auch $B_{0,99}$).