6 Zeitverhalten linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder und Kennwertermittlung

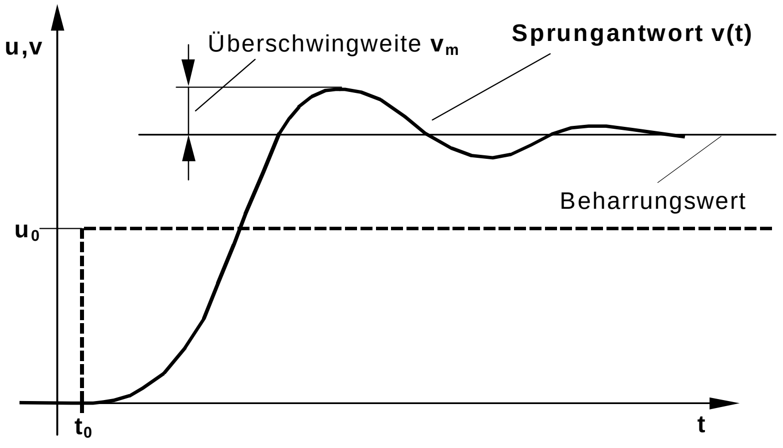
6.1 Kennfunktionen im Zeitbereich

Kennfunktionen im Zeitbereich sind Reaktionen der Ausgangsgröße auf spezielle Eingangsgrößen.

Das Übertragungsverhalten linearer zeitinvarianter Systeme wird durch Kennfunktionen vollständig beschrieben.

Die Übergangsfunktion **h(t)** ist eine wichtige Kennfunktion, sie ist die bezogene Sprungantwort.
Die Gewichtsfunktion **g(t)** ist ebenfalls eine Kennfunktion, sie ist die bezogene Impulsantwort.

6.1.1 Sprungantwort, Übergangsfunktion



Die Sprungantwort ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsgröße **v(t)** eines Übertragungsgliedes nach einer sprungförmigen Änderung der Eingangsgröße **u(t)**.

Wird die Sprungantwort durch die Höhe $\mathbf{u_0}$ des Sprungs der Eingangsgröße **u(t)** geteilt, das bedeutet, auf den Einheitssprung **1(t)** bezogen, dann ergibt sich aus der Sprungantwort **v(t)** die Übergangsfunktion **h(t)** des Systems.

Für lineare zeitinvariante Übertragungsglieder wird im Wirkungsplan in den Blöcken oft der symbolische Verlauf der Übergangsfunktion zur Kennzeichnung des Verhaltens eingetragen.

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

6.1.2 Impulsantwort, Gewichtsfunktion

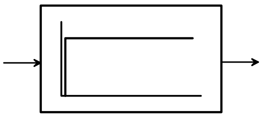
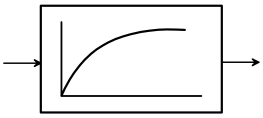
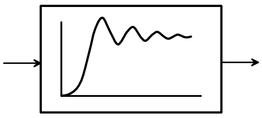
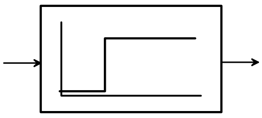
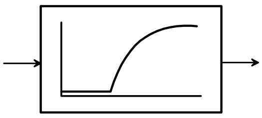
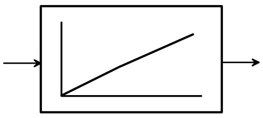
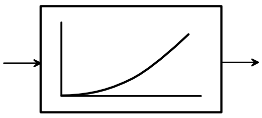
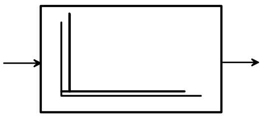
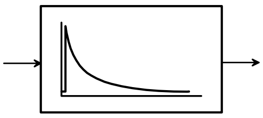
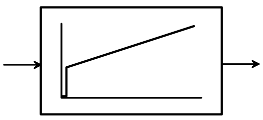
Wird kier nicht behandelt

6.2 Systemgleichungen wichtiger Systeme

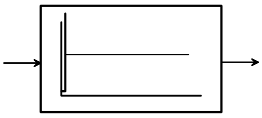
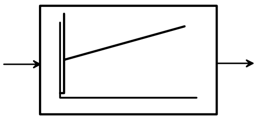
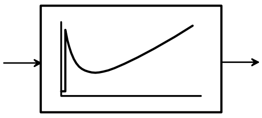
Bezeichnung	Systemgleichung (DGL mit konstanten Koeffizienten)
P	$v(t) = K_P \cdot u(t)$
P-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \cdot u(t)$
P-T_2 $0 < D < 1$	$T_0 \cdot \ddot{v}(t) + 2 \cdot D \cdot T_0 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \cdot u(t)$
T_t	$v(t) = K_P \cdot u(t - T_t)$
P-T_1-T_t	$T \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \cdot u(t - T_t)$
I	$v(t) = K_I \cdot \int_0^t u(\tau)\, d\tau$
I-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_I \int_0^t x(\tau)\, d\tau$
D	$v(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$
D-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_D \cdot \dot{u}(t)$
PI	$v(t) = K_P \cdot u(t) + K_I \int_0^t u(\tau)\, d\tau = K_P \left(u(t) + \frac{1}{T_N\, I} \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right)$ mit: $T_N = \frac{K_P}{K_I}$ als Nachlaufzeit
PI-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \left(u(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right)$
PD	$v(t) = K_P \cdot u(t) + K_P \cdot \dot{u}(t) = K_P \left(u(t) + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$ mit: $T_V = \frac{K_D}{K_P}$ als Vorlaufzeit
PD-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \left(x(t) + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$
PID	$v(t) = K_P \left(u(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t u(\tau)\, d\tau + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$
PID-T_1	$T_1 \cdot \dot{v}(t) + v(t) = K_P \left(u(t) + \frac{1}{T_N} \int_0^t u(\tau)\, d\tau + T_V \cdot \dot{u}(t) \right)$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

6.3 Symbole und Übergangsfunktionen h(t) wichtiger Systeme

	Symbol	Übergangsfunktion h(t)
P		$K_P \cdot \varepsilon(t)$
P-T_1		$K_P \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \varepsilon(t)$
P-T_2 0 < D < 1		$K_p \left(1 - e^{-D\omega_0 t} \left\{ \cos\left(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t\right) + \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\sqrt{1-D^2}\,\omega_0 t\right) \right\}\right) \cdot \varepsilon(t)$ mit: $\omega_0 = 1/T_0$
T_t		$K_P \cdot \varepsilon(t - T_t)$
P-T_1-T_t		$K_P \cdot \left(1 - e^{-\frac{(t-T_t)}{T_1}}\right) \cdot \varepsilon(t - T_t)$
I		$K_I \cdot t \cdot \varepsilon(t) = \frac{t}{T_I} \cdot \varepsilon(t) \quad \text{mit}: T_I = \frac{1}{K_I}$ als Integrierzeit
I-T_1		$\left(\frac{t}{T_I} + \frac{T_1}{T_I}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - 1\right)\right) \cdot \varepsilon(t)$
D		$K_D \cdot \delta(t)$
D-T_1		$\frac{K_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \varepsilon(t)$
PI		$K_P \left(1 + \frac{t}{T_N}\right) \cdot \varepsilon(t)$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

	Symbol	Übergangsfunktion h(t)
PD		$K_P \cdot \left(\varepsilon(t) + T_V \cdot \delta(t)\right)$
PID		$K_P \cdot \left(1 + \frac{t}{T_N} + T_V \cdot \delta(t)\right) \cdot \varepsilon(t)$
PID-T_1		$\frac{K_p}{T_V}\left(t + T_N - T_1 - \left(T_N - T_1 - \frac{T_N \cdot T_V}{T_1}\right) e^{-\frac{t}{T_1}}\right) \cdot \varepsilon(t)$

6.4 Kennwertermittlung

Abbildung 6-1 Quelle[1]

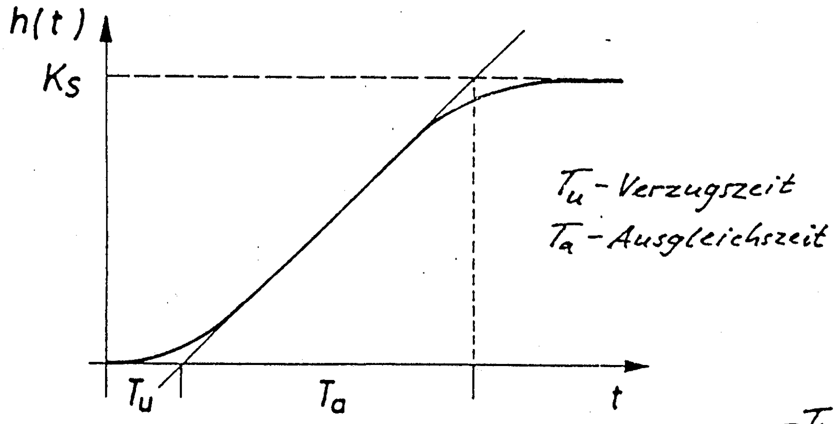
[1] nicht bekannt

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation von Regelstrecken höherer Ordnung, deren Übergangsfunktion h(t) experimentell aufgenommen vorliegt

Stetig lineare, nichtschwingende, proportionale Regelstrecke mit Verzögerungen n-ter Ordnung

Wendetangentenverfahren



Approximation durch P_1T_t-Strecke : $G(p) = \frac{K_S \cdot e^{-pT_t}}{1+pT}$

Einfache Form: - $T_u \rightarrow T_t$

- $T_a \rightarrow T$

- $$\boxed{h(t) = \begin{cases} 0 \\ K_S[1-e^{-(t-T_t)/T}] \end{cases}} \quad \begin{matrix} \text{für } t < T_t \\ \text{für } t \geq T_t \end{matrix}$$

Bessere Form: - Wahl zweier Punkte $P_1(T_1/h_1)$; $P_2(T_2/h_2)$, für die die Approximation genau sein soll.

- Berechnung

$$T = (T_2-T_1)/\ln[(1-h_1/K_s)/(1-h_2/K_s)]$$

$$T_t = T_1 + T\cdot\ln(1-h_1/K_s)$$

$$= T_2 + T\cdot\ln(1-h_2/K_s)$$

- h(t) s.o.

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $P_{n,N}$-Strecke mit gleichen Zeitkonstanten (günstig für $T_a/T_u < 9{,}65$)

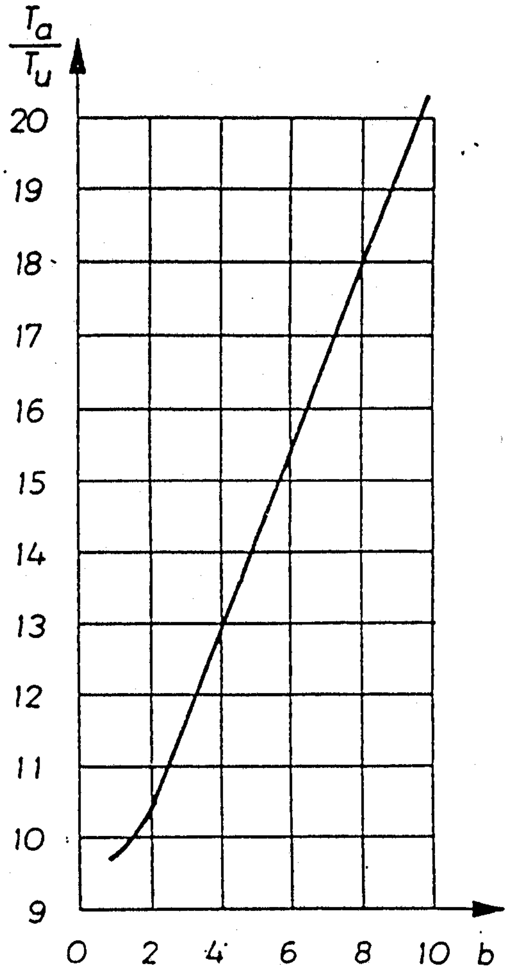
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_a/T_u	∞	9,65	4,59	3,13	2,44	2,03	1,75	1,56	1,41	1,29
T_a/T	1	2,72	3,69	4,46	5,12	5,70	6,23	6,71	7,16	7,59

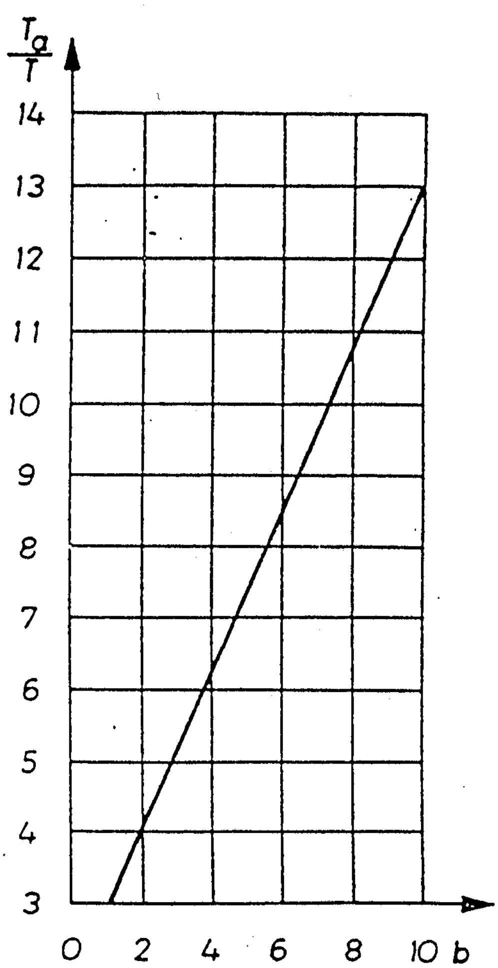
- $T_a/T_u \longrightarrow n$
- $n\,;\,T_a/T \longrightarrow T$
- $$\boxed{h(t) = K_s \left[1 - e^{-t/T} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{T}\right)^k\right]}$$

$$G(p) = \frac{K_s}{(1+pT)^n}$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $P_{2,N}$-Strecke mit verschiedenen Zeitkonstanten (günstig für $T_a/T_u \geq 9{,}65$)





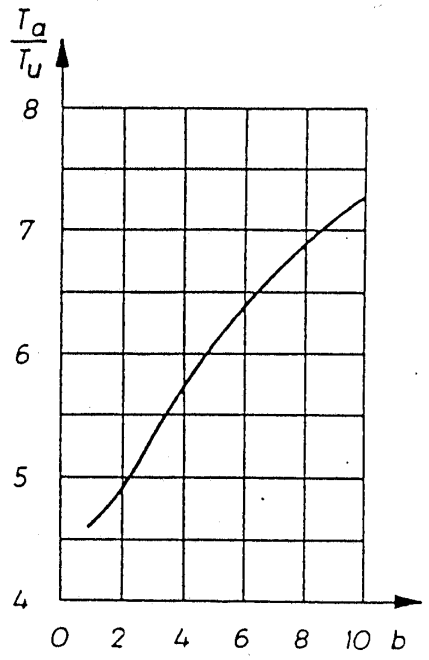
- $T_a/T_u \longrightarrow b$
- $b;\ T_a/T \longrightarrow T$

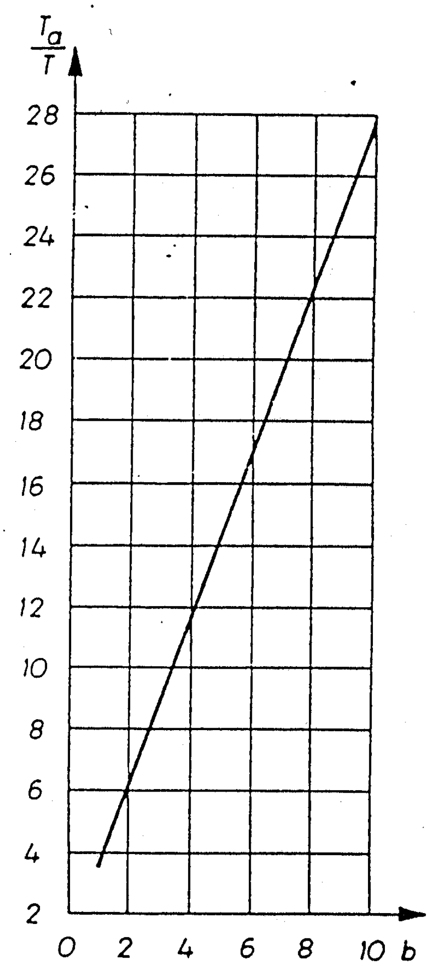
$$G(p) = \frac{K_s}{(1+p\underbrace{T}_{T_1})(1+p\underbrace{bT}_{T_2})}$$

- $$\boxed{h(t) = K_s\left[1 - \frac{b}{b-1}\cdot e^{-t/bT} + \frac{1}{b-1}\cdot e^{-t/T}\right]}$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $P_{3,N}$-Strecke mit zwei verschiedenen Zeitkonstanten





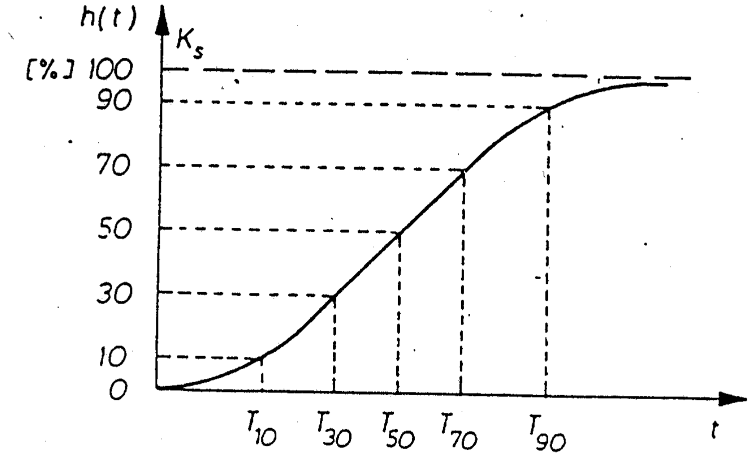
- $T_a / T_u \longrightarrow b$
- $b;\ T_a / T \longrightarrow T$

$$G(p) = \frac{K_s}{(1+pT)(1+p\,bT)^2}$$

- $$\boxed{h(t) = K_s \left\{ 1 - \frac{e^{-t/T}}{(b-1)^2} - \left[\frac{b(b-2)}{(b-1)^2} + \frac{t/T}{b-1} \right] \cdot e^{-t/bT} \right\}}$$

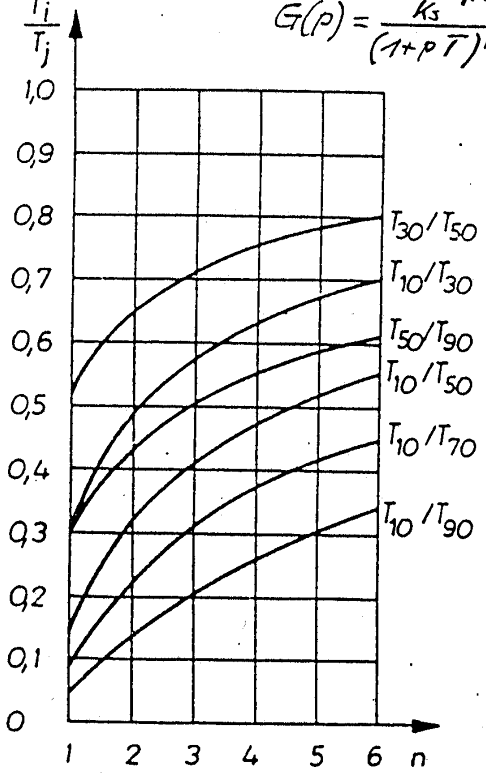
Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

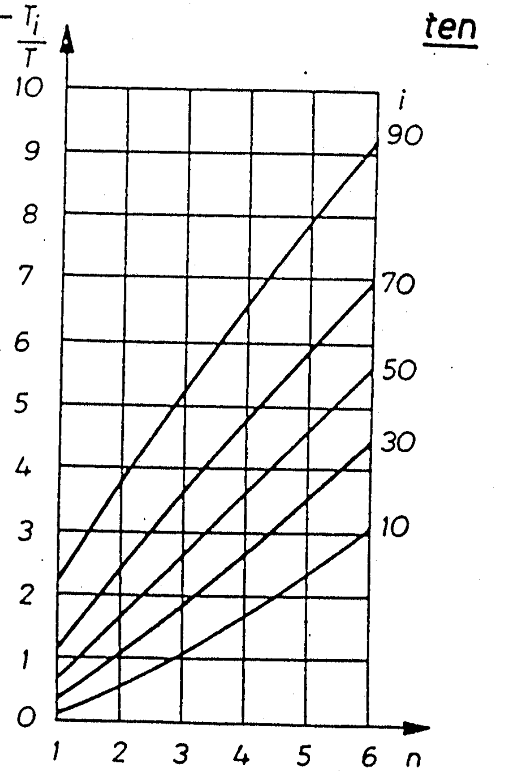
Zeitprozentkennwertverfahren



Approximation durch $P_{n,N}$-Strecke mit gleichen Zeitkonstanten

$$G(p) = \frac{K_s}{(1+pT)^n}$$





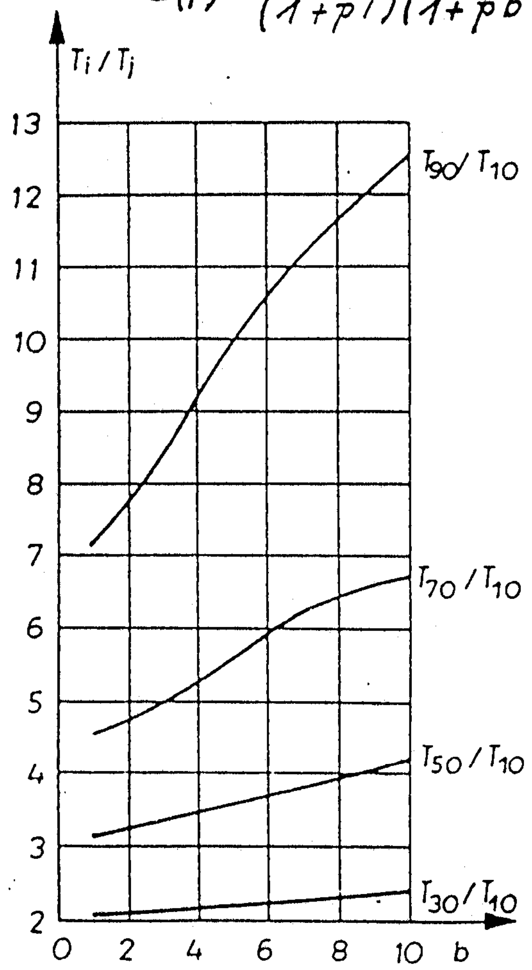
- $T_i / T_j \longrightarrow n$
- $n;\ T_i / T \longrightarrow T$

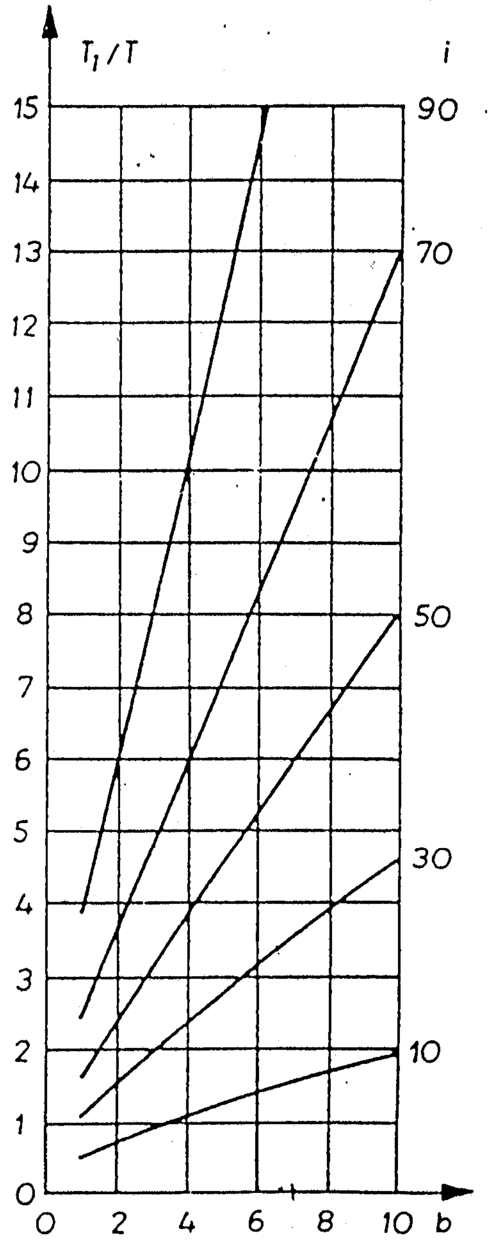
$$\boxed{h(t) = K_s \left[1 - e^{-t/T} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{T}\right)^k \right]}$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $P_{2,N}$-Strecke mit verschiedenen Zeitkonstanten

$$G(p) = \frac{K_s}{(1+pT)(1+pbT)}$$





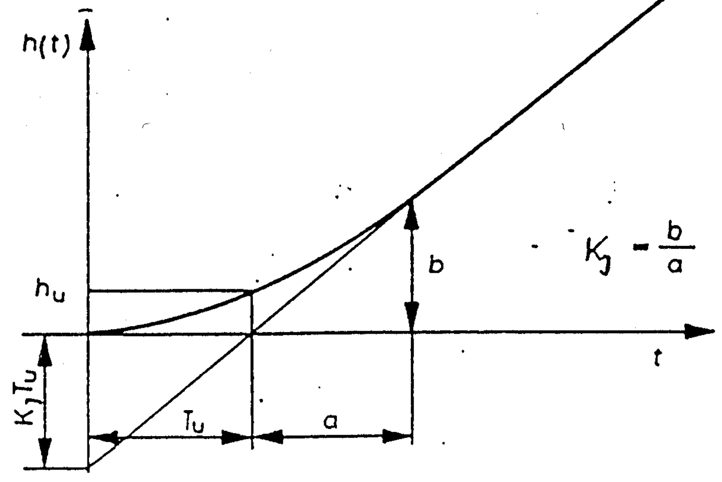
- $T_i / T_j \longrightarrow b$
- $b;\ T_i / T \longrightarrow T$

- $$\boxed{h(t) = K_s \left[1 - \frac{b}{b-1} e^{-t/bT} + \frac{1}{b-1} e^{-t/T} \right]}$$

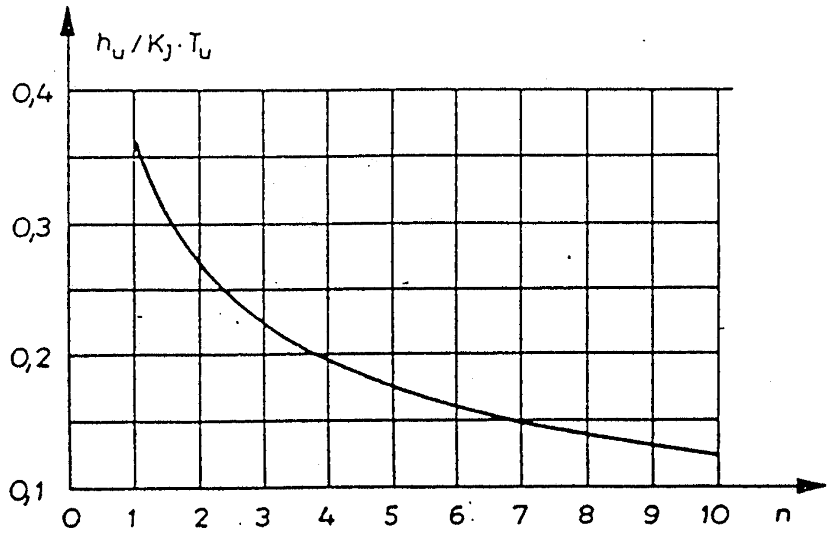
Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Stetig lineare, nichtschwingende, einfachintegrale Regelstrecken mit Verzögerungen n-ter Ordnung

Asymptotenverfahren



Approximation durch $J_{n,N}$-Strecke mit gleichen Zeitkonstanten



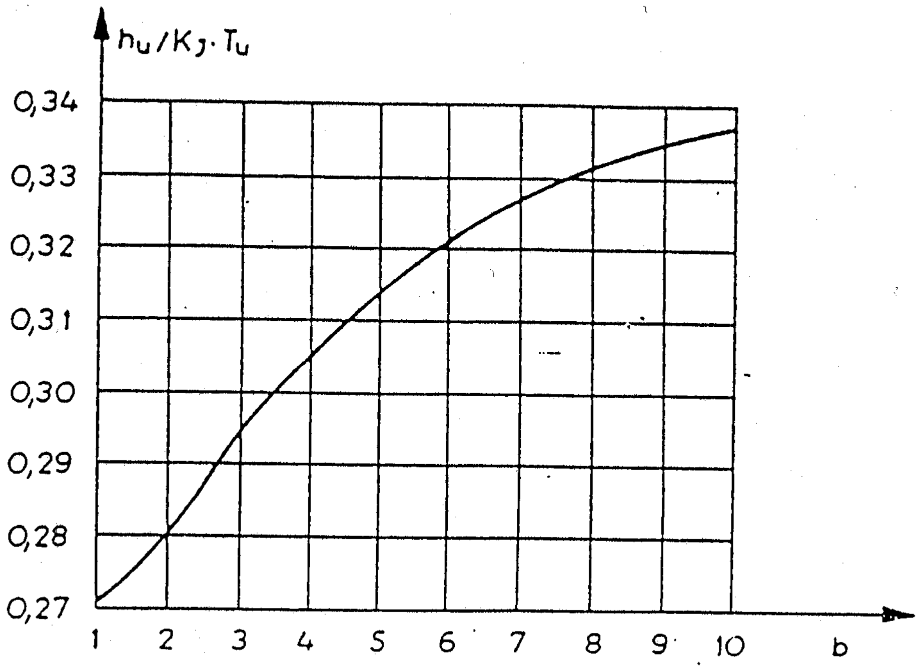
- $h_u / K_J \cdot T_u \longrightarrow n$
- $n; T_u \longrightarrow T = T_u / n$

$$G(p) = \frac{K_I / p}{(1 + pT)^n}$$

$$\boxed{h(t) = K_J \left\{ t - nT + T \cdot e^{-t/T} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{t}{T} \right)^k \right] \right\}}$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $J_{2,N}$-Strecke mit verschieden Zeitkonstanten



– $h_u / K_J \cdot T_u \longrightarrow b$

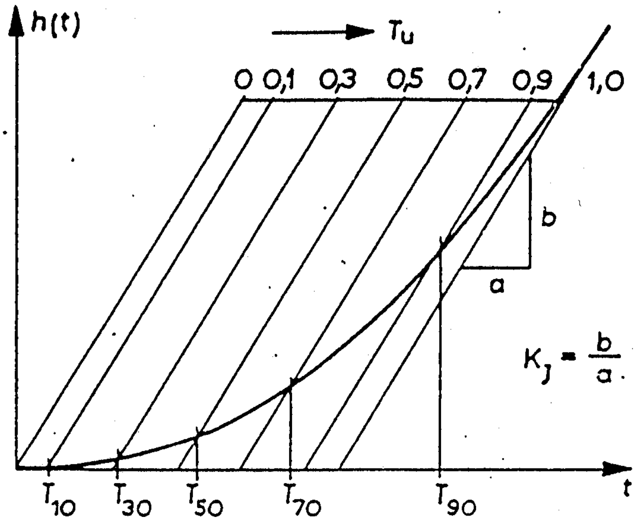
– $b;\ T_u \longrightarrow T = \frac{T_u}{b+1}$

$$\boxed{h(t) = K_J \left[t - T(b+1) - \frac{T}{b \mp 1} e^{-t/T} + \frac{Tb^2}{b-1} e^{-t/bT} \right]}$$

$$G(p) = \frac{K_J / p}{(1+pT)(1+p \cdot bT)}$$

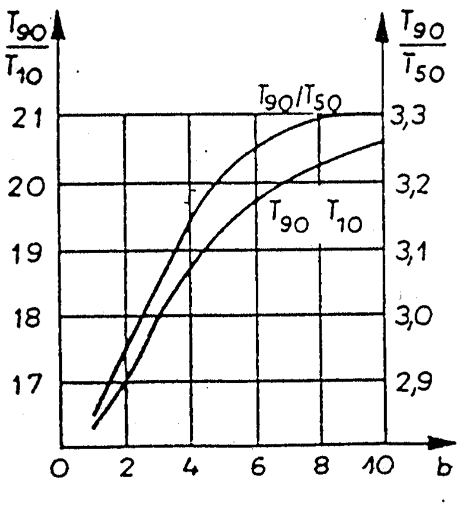
Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

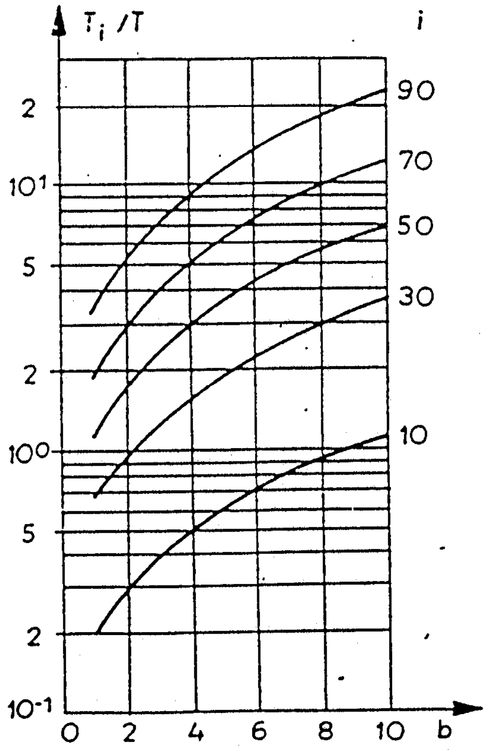
Zeitprozentkennwertverfahren



Approximation durch $J_{2,N}$-Strecke mit verschiedenen Zeitkonstanten

- $T_i \,/ T_J \longrightarrow b$
- $b;\ T_i / T \longrightarrow T$

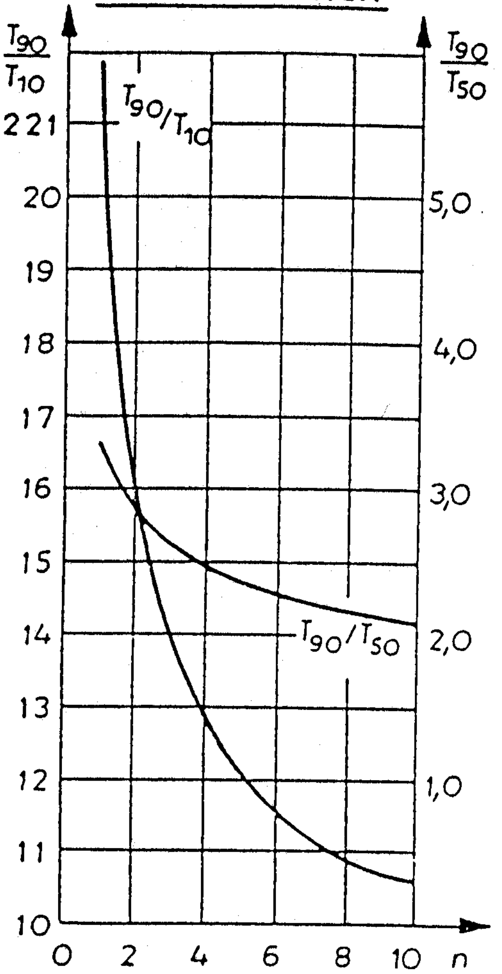


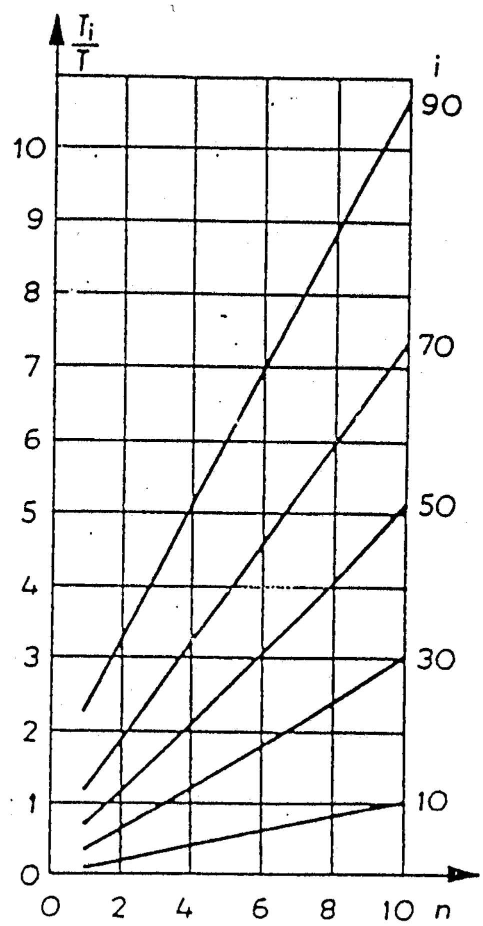


$$h(t) = K_J \left[t - T(b+1) - \frac{T}{b-1} \cdot e^{-t/T} + \frac{Tb^2}{b-1}\, e^{-t/bT} \right]$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Approximation durch $I_{n,N}$-Strecke mit gleichen Zeitkonstanten





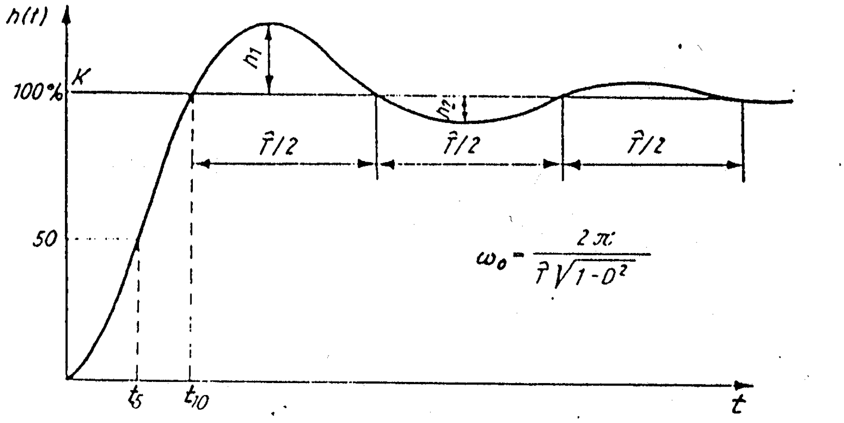
- $T_I / T_J \longrightarrow n$
- $n;\ T_i / T \longrightarrow T$

$$- \boxed{h(t) = K_I \left\{ t - nT + T \cdot e^{-t/T} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{t}{T}\right)^k \right] \right\}}$$

$$G(p) = \frac{K_I / p}{(1+pT)^n}$$

Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!

Kennwerte eines $P_{2,S}$-Gliedes aus der Übergangsfunktion

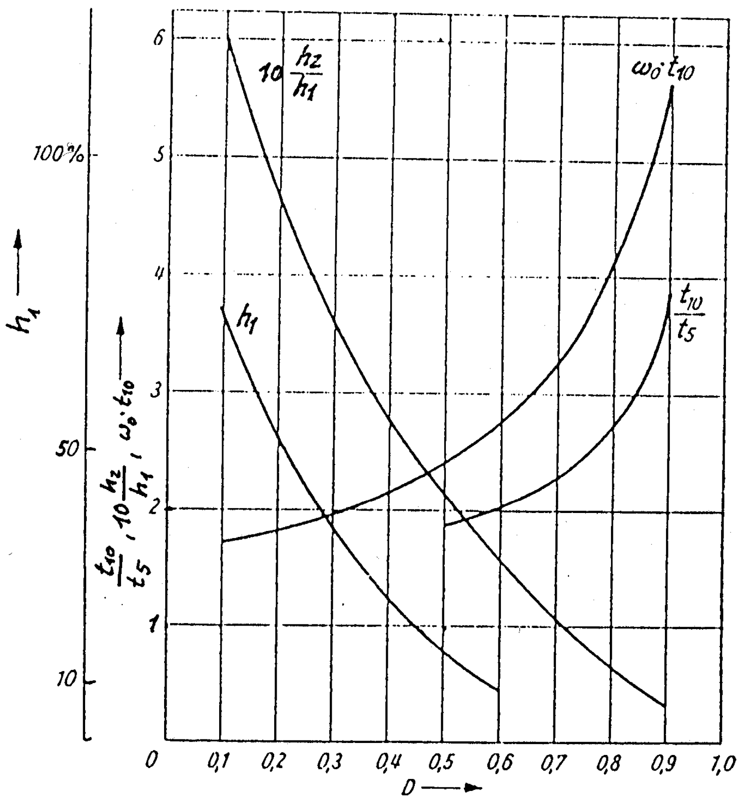


$$h(t) = K\left[1 - \frac{e^{-D\omega_0 t}}{\sqrt{1-D^2}} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-D^2}\, t - \arctan \frac{\sqrt{1-D^2}}{D}\right)\right]$$

$$G(p) = \frac{K}{1 + \frac{2D}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

$\omega_0 \mathrel{\hat{=}}$ Resonanzfrequenz

$\omega_0 = \frac{1}{T_2}$



Dieses Lehrmaterial ist ausnahmslos für Lehrzwecke an der Fachhochschule Jena - Fachbereich Elektrotechnik / Informationstechnik – vorgesehen!