8. Fourier- und Laplace-Transformation

8.1 Fourier-Transformation

8.1.1 Definition und Begriffe

Im letzten Kapitel hatten wir für eine **periodische** Funktion $f(t)$ mit der Periode T die Darstellung durch eine **Fourier-Reihe** zunächst in der Gestalt

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]} \qquad (1)$$

hergeleitet.

Der Praktiker schlussfolgert aus dieser Darstellung, dass ein periodischer Vorgang die Summenwirkung von **harmonischen Schwingungen** ist, deren Frequenzen die Vielfachen einer Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sind. Man sagt, dass die periodische Funktion **spektral zerlegt** wurde. Die Gesamtheit der harmonischen Schwingungen bezeichnet man als das **Spektrum der Funktion** $f(t)$.

Dieses Spektrum wird offensichtlich dadurch charakterisiert, dass jedem Vielfachen $n\omega$ der Grundfrequenz ω die Koeffizienten a_n der Kosinus- bzw. b_n der Sinusfunktionen eindeutig zugeordnet werden:

$$\boxed{n\omega \to a_n \qquad \text{und} \qquad n\omega \to b_n},$$

Man spricht vom **Kosinus-** und **Sinusspektrum**.

Analog kann man mittels der 2. Darstellungsmöglichkeit

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)} \qquad (2)$$

ein **Amplitudenspektrum** und ein **Phasenspektrum**

$$\boxed{n\omega \to A_n \qquad \text{und} \qquad n\omega \to \varphi_n}$$

definieren.

Das folgende Beispiel zeigt, dass ein solches **diskretes Spektrum** umso enger zusammenrückt, je kleiner ω ist, also je größer die Periode T ist:

Dies legt die Schlussfolgerung nahe, dass für $T \to \infty$ aus dem diskreten ein **kontinuierliches (stetiges) Spektrum** wird. Damit hätte man praktisch eine Spektralzerlegung für eine nicht-periodische Funktion (z.B. einmalige Spannungsimpulse o.ä.)!

Das Gleiche ist natürlich auch für die komplexe Darstellung

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\omega t}} \qquad (3)$$

$$\boxed{n\omega \to c_n}$$

möglich.

Ohne den Grenzübergang im Detail auszuführen, geben wir die Ergebnisse an, wobei jetzt der kontinuierlichen Variablen ω Funktionen zugeordnet werden (je nach Darstellungsform):

$$\omega \to a(\omega) \text{ und } b(\omega)$$
$$\omega \to A(\omega) \text{ und } \varphi(\omega)$$
$$\omega \to F(\omega) \text{ (anstelle von } c(\omega))$$

Im einzelnen gilt

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}$$

$$\boxed{a(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau, \qquad b(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) d\tau}$$

$$\boxed{A(\omega) = 2|F(\omega)| = \sqrt{a(\omega)^2 + b(\omega)^2} \qquad \text{und} \qquad \varphi(\omega) = \arg(F(\omega))}.$$

Man spricht bei dieser Zuordnung von der **Fourier-Transformation** und bezeichnet die Funktion $F(\omega)$ als die **Fourier-Transformierte (**oder auch **Spektralfunktion)** der Funktion $f(t)$.

Eine solche Transformation ist von Bedeutung für Funktionen, die neben der **Dirichlet-Bedingung** auch noch die sehr einschneidende **Voraussetzung**

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau) d\tau| < \infty}$$

erfüllen, weil dann die Transformation auch in der umgekehrten Richtung erfolgen kann und zur Ausgangsfunktion zurückführt:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega} \qquad (*)$$

bzw.

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [a(\omega) \cdot \cos(\omega t) + b(\omega) \cdot \sin(\omega t)] d\omega} \qquad (**)$$

bzw.

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} [A(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi(\omega))] d\omega} \qquad (***)$$

Man spricht bei dieser Darstellung der Funktion $f(t)$ vom **Fourierschen Integraltheorem** (**Fourierschen Integralsatz**). Die Darstellung entspricht der Fourier-Reihe bei periodischen Funktionen.

In der Elektrotechnik gibt es viele Funktionen, die nur auf einem endlichen Intervall (ohne Polstellen) definiert sind und damit diese Bedingung erfüllen.

In der Elektrotechnik ist es so, dass zumeist mittels der Fouriertransformation der **Zeitfunktion** $f(t)$ eine **Frequenzfunktion** $F(\omega)$ zugeordnet wird und von deren Eigenschaften auf die der Ausgangsfunktion geschlossen wird. Die Rücktransformation erübrigt sich in aller Regel. (Die Fourier-Transformation bildet aus dem **Zeitbereich** in den **Frequenzbereich** ab.)

$$\boxed{f(t) \xrightarrow{\text{Fourier-Transform. } \mathcal{F}} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau}$$

8.1.2 Beispiele zur Fourier-Transformation

8.1.3 Rechenregeln für die Fouriertransformation

Aus den Gesetzmäßigkeiten der Integralrechnung kann man eine Reihe von Eigenschaften der Fourier-Transformation herleiten. Dadurch muss man nicht immer wieder die Integration selbst durchführen. Wir geben jetzt die wichtigsten Regeln ohne Beweis an. Dabei bezeichnen wir die Funktionen des Zeitbereiches mit kleinen lateinischen Buchstaben und die zugehörigen Transformierten im Frequenzbereich mit den zugehörigen großen lateinischen Buchstaben.

Zeitbereich		**Frequenzbereich**
$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\to$	$\alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$
$f(a \cdot t)$	$\to$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F(\frac{\omega}{a})$
$f(t-c)$	$\to$	$e^{-j\omega c} \cdot F(\omega)$
$e^{j\gamma t} \cdot f(t)$	$\to$	$F(\omega - \gamma)$
$f^{(n)}(t)$	$\to$	$(j\omega)^n \cdot F(\omega)$
$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$	$\to$	$\frac{1}{j\omega} \cdot F(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\to$	$F(\omega) \cdot G(\omega)$

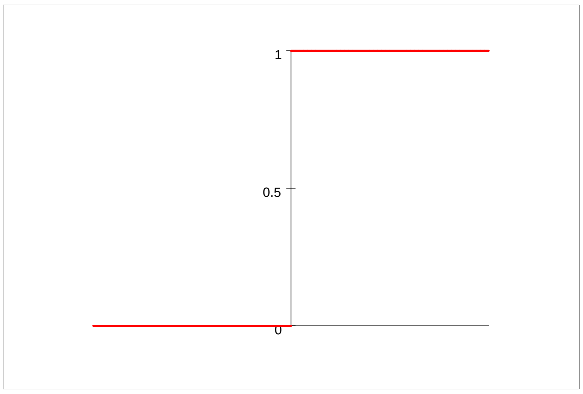
Dabei bedeutet die Operation $*$ die Faltung zweier Funktionen:

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau.$$

8.2 Sprung- und Stoßfunktion

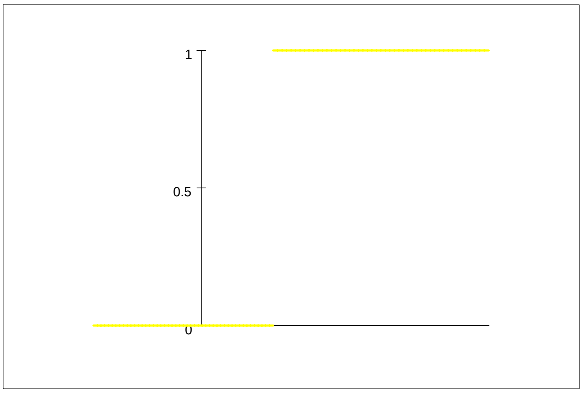
Die sogenannte **Einheitssprungfunktion**

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

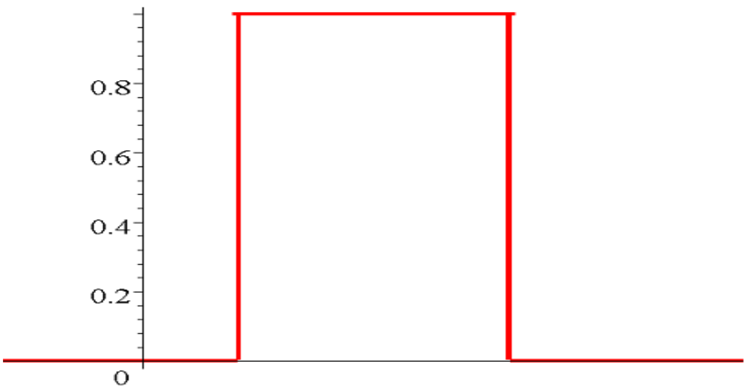


wird bei technischen Anwendungen zur Beschreibung von ***Einschaltvorgängen*** genommen. Durch einen Vorfaktor a kann man die Sprunghöhe verändern. Eine Verschiebung um T Einheiten läßt sich wie üblich darstellen.

$$\sigma(t - T) = \begin{cases} 0, & t < T \\ 1, & t \geq T \end{cases}$$



Bildet man die Differenz dieser beiden Funktionen, so erhält man einen **Rechteckimpuls**, der im Intervall $[0, T]$ den Wert 1 annimmt und sonst gleich Null ist:



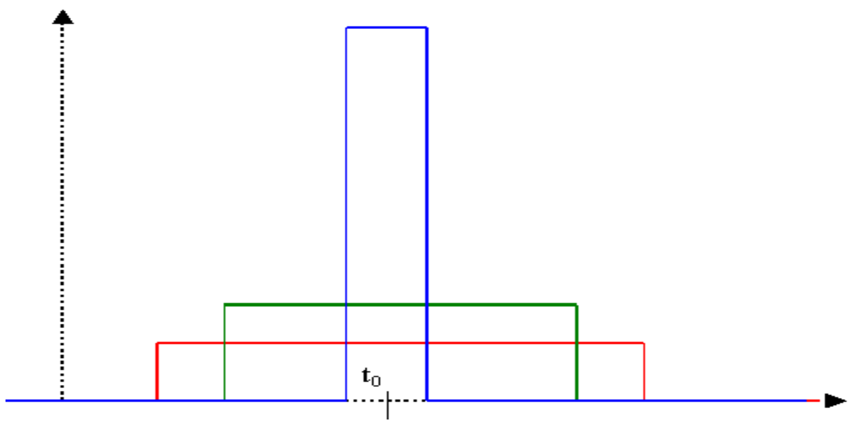
$$\sigma(t) - \sigma(t - T) \quad .$$

Soll die Fläche des Rechtecks - unabhängig von der Impulslänge T immer gleich 1 sein, so muss man durch T dividieren:

$$R_T(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma(t - T)}{T}.$$

Wir betrachten jetzt eine Folge von Rechteckimpulsen, die alle ihr Zentrum in t_0 haben und bei unterschiedlicher Impulslänge T die Fläche 1 ergeben:

$$R_T(t; t_0) = \frac{\sigma(t - (t_0 - \frac{T}{2})) - \sigma(t - (t_0 + \frac{T}{2}))}{T}$$



Zur Beschreibung von ***Impulsen***, die sehr kurz aber mit hoher Intensität wirken, kann man nun in einem geeigneten Sinne den Grenzwert $T \to 0$ bilden, wobei gleichzeitig $R_T \cdot T = 1$ erhalten bleibt.

Man erhält auf diese Weise die sogenannte **δ-Funktion (Stoßfunktion; Impulsfunktion) $\delta(t; t_0)$ im Aufpunkt** t_0. Mathematisch handelt es sich hier nicht um eine Funktion im herkömmlichen Sinne sondern um eine **Distribution**. Neben den Rechteckfunktionen kann man sie auch durch verschiedene Folgen anderer Funktionen darstellen.

Die Fourier-Transformierte (in einem verallgemeinerten Sinne) der δ-Funktion erhält man als Grenzwert der Folge von Fourier-Transformierten der oben erwähnten Rechteckfunktionen.

$$F_{T;t_0}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_T(t; t_0) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \frac{1}{T} \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-Tj\omega} \right]_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2}$$

$$= -\frac{1}{Tj\omega}\left(e^{-j\omega(t_0 + T/2)} - e^{-j\omega(t_0 - T/2)}\right) = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \frac{(e^{-j\omega T/2} - e^{j\omega T/2})}{T}$$

$$\mathcal{F}(\delta(t; t_0) = \lim_{T \to 0} F_{T;t_0}(\omega) = -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega t_0} \cdot (-j\omega) = \underline{\underline{e^{-j\omega t_0}}}$$

Da $|e^{-j\omega t_0}| = 1$ gilt, sind also für alle Frequenzen die Amplituden gleich 1. (Man spricht auch von einem weißen Spektrum.) Zur Untersuchung des Verhaltens von Übertragungssystemen verwendet man deshalb gern solche Impulsfunktionen.

8.3 Laplace-Transformation

Wegen der sehr einschneidenden Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)d\tau| < \infty$ gibt es für viele praktisch wichtige Funktionen keine Fourier-Transformierte. Trotzdem möchte man gern auch diese im Bildbereich mit den dort sehr angenehmen Eigenschaften (siehe Tabelle) behandeln. Dies gelingt, wenn man die Transformation etwas abändert. Man gelangt dadurch zur **Laplace-Transformation**.

Wir betrachten jetzt nur noch Funktionen $f(t)$, die auf der negativen Halbachse gleich Null sind. Diese Voraussetzung stellt für viele in der Elektrotechnik in Frage kommenden Funktionen praktisch keine Einschränkung dar. Die einschneidende Voraussetzung $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)dt| < \infty$ weichen wir nun dadurch auf, dass wir nicht mehr die Funktion $f(t)$ nach Fourier transformieren sondern die "gedämpfte" Funktion $f_L(t) = f(t) \cdot e^{-\delta t}$, wobei $\delta > 0$ eine geeignete positive reelle Zahl ist:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_L(t) \cdot e^{-j\omega t}dt &= \int_0^{\infty} f_L(t) \cdot e^{-j\omega t}dt && \text{, weil } f(t) = 0 \text{ für } t < 0 \\
&= \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t - j\omega t}dt \\
&= \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\delta + j\omega)t}dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}dt && \text{mit } s = \delta + j\omega.
\end{aligned}$$

Als **Laplace-Transformierte** der Funktion $f(t)$ bezeichnet man (Existenz vorausgesetzt) die Funktion

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}dt}.$$

Die Konvergenz dieses Integrals (die entscheidend für die Existenz der Laplace-Transformierten ist) untersuchen wir jetzt.

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-(\delta + j\omega)t}dt = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)dt - j\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)dt$$

Wegen

$$\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t)|dt \le \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\delta t}dt$$

und

$$\int_0^{\infty} |f(t) \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t)|dt \le \int_0^{\infty} |f(t)| \cdot e^{-\delta t}dt$$

konvergieren offensichtlich beide Integrale (und damit das Laplace-Integral), wenn sich die Funktion $f(t)$ durch eine geeignete Exponentialfunktion abschätzen läßt:

$|f(t)| \le e^{at}$ für alle $t \ge t_0$.

Die Konstante a bestimmt dann den Definitionsbereich der Laplace-Transformierten:

$$\int_0^\infty |f(t)| \cdot e^{-\delta t}dt = \int_0^{t_0} |f(t)| \cdot e^{-\delta t}dt + \int_{t_0}^\infty |f(t)| \cdot e^{-\delta t}dt \le M + \int_{t_0}^\infty e^{at} \cdot e^{-\delta t}dt = M + \int_{t_0}^\infty e^{(a-\delta)t}dt$$

$$= M + \frac{1}{a-\delta} \cdot [e^{(a-\delta)t}]_{t_0}^\infty = M + \frac{1}{a-\delta} \cdot \left(\lim_{t\to\infty} e^{(a-\delta)t} - e^{(a-\delta)t_0}\right) < \infty \text{ für } a < \delta.$$

Zusammenfassung:

1.) Fast alle praktisch wichtigen Funktionen lassen sich durch eine geeignete e-Funktion

abschätzen: $|f(t)| \le e^{at}$.

2.) Diese besitzen dann eine Laplace-Transformierte $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}dt$.

3.) Diese Laplace-Transformierte ist eine Funktion einer komplexen Veränderlichen

$s = \delta + j\omega$.

4.) Der Definitionsbereich dieser L –Transformierten ist die komplexe Halbebene

$\delta = \mathrm{Re}(s) > a$.

Streng genommen müsste man bei den Umformungen beachten, dass es sich bei s um eine komplexe Variable handelt. In manchen Büchern wird darauf überhaupt nicht hingewiesen. Der Formalismus funktioniert trotzdem, ist aber mathematisch nicht begründet.

Genau wie bei der Fourier-Transformation geht man im praktischen Umgang so vor, dass man für einige wichtige Funktionen die zugehörigen Laplace-Transformierten in einer sogenannten **Korrespondenztabelle** zusammenfasst. Solche Korrespondenztabellen findet man in nahezu allen Formelsammlungen. Für daraus abgeleitete Funktionen verwendet man die Gesetze, die denen der Fourier-Transformation sehr ähnlich sind:

Originalbereich		**Bildbereich**	
$\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)$	$\rightarrow$	$\alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$	Linearität
$f(a \cdot t)$	$\rightarrow$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \cdot F(\frac{s}{a}),\ a > 0$	
$f(t - t_0)$	$\rightarrow$	$e^{-st_0} \cdot F(s)$	Verschiebungssatz
$e^{-at} \cdot f(t)$	$\rightarrow$	$F(s + a)$	Dämpfungssatz
$f(t) * g(t)$	$\rightarrow$	$F(s) \cdot G(s)$	Faltungssatz
$f^{(n)}(t)$	$\rightarrow$	$s^n \cdot F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	Differentiationssatz
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\rightarrow$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$	Integrationssatz
$t^n \cdot f(t)$	$\rightarrow$	$(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$	Multiplikationssatz
$\frac{f(t)}{t}$	$\rightarrow$	$\int_s^\infty F(u) du$	Divisionssatz

Rücktransformationen - sofern sie überhaupt eine Rolle spielen - werden ausschließlich über die Korrespondenztabelle und obige Gesetze durchgeführt. Dabei ist wiederum sehr häufig die Zerlegung einer gebrochenen rationalen Funktion in ihre Partialbrüche erforderlich.