7. Unendliche Reihen

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, eine mehr oder weniger komplizierte Funktion $f(x)$ durch eine Summe von einfachen Funktionen $f_n(x)$ darzustellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

Als Funktionensysteme $f_n(x)$ sind dabei in erster Linie die Potenzfunktionen $f_n(x) = a_n x^n$ bzw. die harmonischen Schwingungen $f_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ von Interesse. Um diese Untersuchungen besser verstehen zu können, muss man sich zunächst aber mit solchen Reihen befassen, deren Glieder allesamt Konstanten sind.

7.1 Reihen mit konstanten Gliedern

Aus einer gegebenen Zahlenfolge $\{a_n\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ kann man durch sukzessives Aufsummieren eine (unendliche) Reihe bilden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad .$$

Streng genommen, verbirgt sich dahinter eine neue Folge $\{s_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$,die Folge der **Partialsummen**:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_k &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

Diese Folge $\{s_k\}, k = 0, 1, 2, \ldots$ kann - wie jede andere Folge auch - konvergent, bestimmt divergent oder unbestimmt divergent sein, so dass eigentlich nur im Falle der Konvergenz

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k$$

das Symbol

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

berechtigt ist.

7.1.1 Geometrische Reihen

Unter einer **geometrischen Folge** (siehe Analysis 1)versteht man eine Folge mit dem allgemeinen Glied

$$\boxed{a_n = q^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Diese Folge ist

konvergent für	$-1 < q \leq 1$
best. divergent für	$q > 1$
unbest. divergent für	$q \leq -1$

Durch Aufsummieren der Folgenglieder kommt man zur Folge der Partialsummen

$$s_0 = 1,\ s_1 = 1 + q,\ s_2 = 1 + q + q^2,\ \ldots, s_k = \sum_{n=0}^{k} q^n,\ \ldots.$$

Das allgemeine Glied kann man in diesem speziellen Falle geschlossen (also ohne Summensymbol) darstellen:

$$\begin{aligned} s_k &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^k \\ q \cdot s_k &= \phantom{1 +{}} q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} \\ (1-q) \cdot s_k &= 1 \phantom{{}+ q + q^2 + \ldots + q^k} - q^{k+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}}.$$

Damit hat man die **geometrische Reihe**: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{k \to \infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$, die offensichtlich

- konvergent für $|q| < 1$**,**

- bestimmt divergent für $q > 1$ **(direkt aus der Reihe erkennt man dies auch für** $q = 1$**),**

- unbestimmt divergent für $q \leq -1$

ist.

7.1.2 Harmonische Reihen

Als **harmonische Reihen** werden alle Reihen der Gestalt

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}}$$

bezeichnet.

1. Fall: $s = 1$

Wir stellen zunächst für den klassischen Spezialfall $s = 1$ die Divergenz fest:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty}.$$

Nachweis der Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{m} + \ldots$$

Offensichtlich gilt für jede Teilgruppe von m Summanden

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \ldots + \frac{1}{2m} > m \cdot \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Lässt man nun die ersten beiden Summanden weg, so kann man alle anderen in folgende Gruppen von $2,\ 4,\ 8, \ldots,\ 2^{p-1}$ Gliedern einteilen:

Gruppe	Summanden	Anz. Summanden	wegen (*)
1	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	2	$> \frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$	4	$> \frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}$	8	$> \frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p-1	$\frac{1}{2^{p-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^p}$	2^{p-1}	$> \frac{1}{2}$

Für die k –te Partialsumme der harmonischen Reihe gilt damit für $k = 2^p$

$$s_k > (p-1) \cdot \frac{1}{2}$$

und somit

$$\lim_{k \to \infty} s_k = \infty.$$

Damit ist die bestimmte Divergenz nachgewiesen. Allerdings erfolgt die Divergenz sehr langsam, so ist z.B.

$s_{1000} = 7{,}47\ldots \qquad s_{1000000} = 14{,}39\ldots$

$\boxed{\text{w.z.b.w.}}$

2. Fall: $s < 1$

In diesem Fall ist jedes einzelne Glied der Reihe größer als das entsprechende Glied im 1. Fall und damit liegt erst recht bestimmte Divergenz vor.

3. Fall: $s > 1$

Wir können jetzt $s = 1 + \alpha$ setzen (mit $\alpha > 0$) und erhalten im Gegensatz zu (*)

$$\frac{1}{(m+1)^s} + \frac{1}{(m+2)^s} + \frac{1}{(m+3)^s} + \ldots + \frac{1}{(2m)^s} < m \cdot \frac{1}{m^s} = \frac{1}{m^\alpha}. \qquad (**)$$

Die Gruppeneinteilung erfolgt nun wie im 1. Fall

Gruppe	Summanden	Anz. Summanden	wegen (**)
1	$\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}$	2	$< \frac{1}{2^\alpha}$
2	$\frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s}$	4	$< \frac{1}{4^\alpha} = \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^2$
3	$\frac{1}{9^s} + \ldots + \frac{1}{16^s}$	8	$< \frac{1}{8^\alpha} = \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
p-1	$\frac{1}{(2^{p-1}+1)^s} + \ldots + \frac{1}{(2^p)^s}$	2^{p-1}	$< \frac{1}{(2^{p-1})^\alpha} = \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^{p-1}$

Für jede beliebige Partialsumme gilt damit (siehe geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2^\alpha}$)

$$S_k < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^2 + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha}.$$

Damit ist die Konvergenz gesichert.

Zusammenfassung:

Die harmonischen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ sind

- bestimmt divergent für $s \leq 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty$

und

- konvergent für $s > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s)$.

($\zeta(s)$ heißt Riemannsche Zeta-Funktion und spielt in der Zahlentheorie eine große Rolle.)

Ende der harmonischen Reihen

Im allgemeinen ist es sehr schwierig festzustellen, ob eine vorgegebene Reihe konvergent oder divergent ist.

Klar ist nur, dass es für die Konvergenz einer Reihe **notwendig** ist, dass die Folge ihrer Glieder beschränkt sein muss und sogar **gegen Null gehen** muss. Darüberhinaus gibt es einige praktische **hinreichende** Kriterien.

7.1.3 Kriterien für Reihen mit positiven Gliedern

Zunächst ist klar, dass es für die Konvergenz einer solchen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zwingend **notwendig** ist, dass die Glieder a_n eine Nullfolge bilden, also $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt. Wie die harmonische Reihe zeigt, ist dies aber nicht hinreichend. Jetzt werden wir einige hinreichende Kriterien angeben.

1. Kriterium (Vergleichskriterium):

Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen mit **positiven Gliedern**, so gilt:

a) **Majorantenkriterium:**

Aus der **Konvergenz** von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und der Beziehung $a_n \le b_n$ für alle $n > n_0$ folgt die **Konvergenz** von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) **Minorantenkriterium:**

Aus der **Divergenz** von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ und der Beziehung $a_n \ge b_n$ für alle $n > n_0$ folgt die **Divergenz** von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Die Richtigkeit dieser Kriterien leuchtet unmittelbar ein.

2. Kriterium (Wurzelkriterium):

Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit **positiven Gliedern** und gilt $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$ für alle $n > n_0$, so ist die Reihe **konvergent**.

Gilt dagegen $\sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$ für alle $n > n_0$, so ist die Reihe **divergent**.

Die Begründung ergibt sich aus dem Vergleichskriterium und den Kenntnissen über geometrische Reihen, wenn man bedenkt, dass die Beziehungen

$\sqrt[n]{a_n} \le q$ und $a_n \le q^n$ bzw. $\sqrt[n]{a_n} \ge q$ und $a_n \ge q^n$

gleichwertig sind.

Hinweis: In der Regel wird als Bedingung günstiger

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \ \left(< 1 \text{ bzw. } > 1\right)$$

zu verwenden sein!

Für $q = 1$ ist dann keine Aussage möglich.

3. Kriterium (Quotientenkriterium):

Analog zum Wurzelkriterium gilt: Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit **positiven Gliedern** und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} = q$, so ist die Reihe für $q < 1$ **konvergent** und für $q > 1$ **divergent**. Auch hier ist wiederum für $q = 1$ keine Aussage möglich.

$\Box$

7.1.4 Alternierende Reihen

In einer alternierenden Reihe wechselt das Vorzeichen von Glied zu Glied, so dass man sie wie folgt darstellen kann:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\ \ a_n > 0$$

Bei einer alternierenden Reihe unterscheidet man zwischen der

- **absoluten Konvergenz**, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty}|(-1)^n a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert und der

- **bedingten Konvergenz**, das ist praktisch die "normale" Konvergenz, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert.

Es ist klar, dass aus der absoluten Konvergenz einer alternierenden Reihe erst recht ihre bedingte Konvergenz folgt.

Merke: Man wird also bei einer alternierenden Reihe mit den Kriterien aus 7.1.3 immer zunächst die absolute Konvergenz überprüfen. Führt dies nicht zum Ziel, untersucht man die bedingte Konvergenz mit dem

4. Kriterium (Leibniz-Kriterium):

Wenn in einer **alternierenden Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\quad a_n > 0$, die Glieder betragsmäßig monoton abnehmen, d.h. $a_{n+1} < a_n$ für $n > n_0$, und gegen Null streben $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$, so **konvergiert** die Reihe.

7.1.5 Einige praktisch interessante konvergente Reihen

Im Normalfall kennt man bei einer Reihe - bei der man Konvergenz festgestellt hat - den Grenzwert, d.h. den Wert der unendlichen Summe, nicht. In einigen Spezialfällen wie z.B. bei den geometrischen Reihen - kann man ihn ermitteln.

Hier ist eine kleine Auswahl solcher Reihen (zur Herleitung kommen wir - mit Ausnahme von 3. und 4. - später):

1. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$

5. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$

Abschließend sei bemerkt, dass man mit absolut konvergenten Reihen rechnen kann wie mit endlichen Summen.

7.2 Funktionenreihen

Bisher waren die Glieder einer Reihe Konstanten aus $\mathbb{R}$. Praktisch von viel größerer Bedeutung sind solche Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

die **Funktionen** als Glieder haben. Ohne den Abschnitt 7.1 als Vorspann könnte man diese aber kaum in verständlicher Weise behandeln.

Wir nehmen an, dass alle Funktionen $f_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ einen gemeinsamen Definitionsbereich D haben. Dann wird für jedes konkrete $x \in D$ aus der Funktionenreihe eine Reihe mit konstanten Gliedern, deren Konvergenz man in bekannter Weise untersuchen kann. Konvergiert die Reihe für alle x aus einem Intervall I, so wird durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \ , \ x \in I \subseteq D$$

eine neue Funktion definiert, die man als **Grenzfunktion** der Funktionenfolge $\{f_n(x)\}$ bezeichnet.

Von praktischem Interesse sind solche Fälle, in denen man eine komplizierte oder aus anderen Gründen unhandliche Funktion $f(x)$ in einem gewissen Bereich durch einfache bzw. gut interpretierbare Funktionen $f_n(x)$ auf diese Weise darstellen kann.

Natürlich bricht man in der Praxis eine solche Reihenentwicklung nach endlich vielen Gliedern ab.

Wir beschränken uns auf die beiden wichtigsten Funktionenfolgen,

- die Potenzfunktionen $f_n(x) = x^n, \ n = 0, 1, 2, \dots$, die zu den sogenannten **Potenzreihen** führen ,

und

- die trigonometrischen Funktionen $f_n(x) = \sin(nx), \cos(nx), n = 0, 1, 2, \dots$, die zu den sogenannten **Fourierreihen** führen.

7.2.1 Potenzreihen

Viele Funktionen lassen sich in einem mehr oder weniger großen Teil ihres Definitionsbereiches durch eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

oder

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

darstellen, wobei der zweite Fall mittels der Koordinatentransformation $z = x - x_0$ stets auf den ersten zurückgeführt werden kann.

Bezüglich der Konvergenz einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ unterscheiden wir drei Fälle:

<u>1. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$ (trivialer Fall).

Man sagt: Die Potenzreihe ist **nirgends konvergent**.

<u>2. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

Man sagt: Die Potenzreihe ist **überall konvergent**.

<u>3. Fall</u>: Die Potenzreihe konvergiert im **Konvergenzintervall** $(-R, R)$ (und zwar sogar absolut)

und divergiert in $(-\infty, -R) \cup (R, \infty)$.

Für $x = -R$ und $x = R$ ist das Verhalten von Reihe zu Reihe unterschiedlich.

R (im 3. Falle) heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe und kann auf der Grundlage des Wurzelkriteriums ermittelt werden:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| = \frac{1}{R} \cdot |x| \text{ muss für die Konvergenz} < 1 \text{ ausfallen.}$$

Dabei haben wir zur Abkürzung $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ gesetzt.

Ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so ergibt sich der 1. Fall ($R = 0$),

ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, so ergibt sich der zweite Fall ($R = \infty$).

Ansonsten liegt Konvergenz für alle x vor, für die $\frac{1}{R} \cdot |x| < 1$, also $|x| < R$ gilt (3. Fall).

Merke: Für eine "verschobene" Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ wird der Konvergenzradius nach der selben Formel $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ berechnet; das Konvergenzintervall ist dann aber um den Mittelpunkt x_0 herum zu nehmen.

Für Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind (an einer bestimmten Stelle x_0), kann man theoretisch stets eine Potenzreihe angeben, indem man die TAYLOR'sche Formel nicht nach n Gliedern abbricht sondern bis ins Unendliche fortsetzt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Die Reihe wird als **TAYLOR-Reihe** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 bezeichnet. (Für $x_0 = 0$ spricht man auch von der **MACLAURIN-Reihe**.)

Ob überhaupt - und wenn ja, in welchem Intervall - die entstehende Potenzreihe allerdings mit der Ausgangsfunktion übereinstimmt, hängt von den Eigenschaften der Funktion und der Konvergenz der Reihe ab. Für viele praktisch interessierende Funktionen liegt im Konvergenzintervall I der TAYLOR-Reihe Übereinstimmung zwischen ihr und der Ausgangfunktion vor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n \ , \ x \in I$$

Man beachte, dass die Konvergenzeigenschaften nicht nur von der Funktion $f(x)$ abhängen (und damit nicht beeinflussbar wären) sondern auch von der jeweiligen **Entwicklungsstelle** x_0.

Der Vorteil derartiger Reihenentwicklungen ergibt sich aus der Tatsache, dass dabei nur die Grundoperationen verwendet werden. Wenn darüber hinaus die Konvergenz noch "sehr schnell" erfolgt (was leider selten der Fall ist), so erhält man durch Abbruch einer TAYLOR-Reihe nach wenigen Gliedern handliche arithmetische Näherungsformeln für transzendente Funktionen bzw. Ausdrücke.

TAYLOR-Reihen für die wichtigsten elementaren Funktionen sind in der Formelsammlung angegeben.

Merke: Im Inneren des Konvergenzintervalls von Potenzeihen kann man mit diesen im wesentlichen wie mit endlichen Summen operieren (z.B. mutiplizieren, differenzieren, integrieren). Man sollte nur stets die Ergebnisreihe wieder auf ihre Konvergenz untersuchen.

7.2.2 Ausblick auf Potenzreihen im Komplexen

Prinzipiell lassen sich die Aussagen aus dem Reellen übertragen. Da der Betrag einer komplexen Zahl durch $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ definiert ist, ergibt sich anstelle des Konvergenzintervalls jetzt aber ein kreisförmiges Konvergenzgebiet in der komplexen Ebene mit dem Koordinatenursprung bzw. der Entwicklungsstelle z_0 als Mittelpunkt und dem Radius $|z|$. Auf dem Rand ist die Konvergenz ungewiss.

Wir übertragen jetzt versuchsweise drei wichtige Reihen aus dem Reellen ins Komplexe:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} \pm \ldots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} \pm \ldots$$

Der Konvergenzradius ist in allen drei Fällen ∞, so dass die Reihen in ganz $\mathbb{C}$ konvergieren. Damit haben wir eine komplexe e-, Sinus- und Kosinusfunktion definiert.

Für den Spezialfall $z = jy,\ y \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$e^{jy} = 1 + \frac{jy}{1!} + \frac{(jy)^2}{2!} + \ldots + \frac{(jy)^n}{n!} + \ldots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} \pm \ldots\right)}_{= \cos x} + j \cdot \underbrace{\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} \pm \ldots\right)}_{= \sin x}$$

und damit die schon bei den komplexen Zahlen erwähnte - aber nicht hergeleitete - interessante **EULERsche Formel**:

$$e^{jy} = \cos y + j \cdot \sin y$$

Analog erhält man für $z = -jy$

$$e^{-jy} = \cos y - j \cdot \sin y$$

Hieraus ergeben sich Darstellungen der **reellen** Sinus- und Kosinusfunktion durch **komplexe** e –Funktionen:

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$$

7.2.3 Fourierreihen

Viele Zeitvorgänge in der Elektrotechnik sind **periodische Vorgänge** mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Grundbaustein eines jeden solchen Vorgangs sind die **harmonischen Schwingungen**

$a \cdot \cos \omega t$	(1)
$b \cdot \sin \omega t$	(2)
$a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t$	(3)
$A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	(4)

Dabei können die letzten beiden wegen

$$A \cdot \cos(\omega t + \varphi) = A[\cdot \cos \omega t \cdot \cos \varphi - \sin \omega t \cdot \sin \varphi]$$

$$= A \cdot \cos \varphi \cdot \cos \omega t + (-A \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \omega t$$

$$= a \cdot \cos \omega t + b \cdot \sin \omega t$$

identifiziert werden über die Beziehungen

$$a = A \cdot \cos \varphi\ ,\ b = -A \cdot \sin \varphi$$

bzw.

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}\ ,\ \tan \varphi = -\tfrac{b}{a}$$

Wir werden für mathematische Herleitungen die Variante (3) bevorzugen, während sich für Interpretationen die Variante (4) besser eignet.

Zunächst stellen wir fest, dass durch **Überlagerung (Superposition)** der beiden harmonischen Schwingungen

$$a_1 \cdot \cos \omega t + b_1 \cdot \sin \omega t$$
$$a_2 \cdot \cos 2\omega t + b_2 \cdot \sin 2\omega t$$

wieder eine Schwingung mit der Periode T entsteht, denn es ist

$$\cos(\omega(t+T)) = \cos\left(\omega t + \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos \omega t$$

$$\sin(\omega(t+T)) = \sin\left(\omega t + \omega \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin(\omega t + 2\pi) = \sin \omega t$$

$$\cos(2\omega(t+T)) = \cos\left(2\omega t + 2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = \cos(2\omega t + 4\pi) = \cos 2\omega t$$

$$\sin(2\omega(t+T)) = \sin\left(2\omega t + 2\omega \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) = \sin(2\omega t + 4\pi) = \sin 2\omega t.$$

Die folgenden Beispiele illustrieren das.

Hieraus kann man induktiv schließen, dass auch jede endliche Summe

$$\sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

eine T-periodische Funktion ist.

(Vereinfacht ausgedrückt: In einer solchen Summe setzt sich die größte Periode durch.)

Im Konvergenzfall gilt dies dann ebenfalls für unendliche Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \qquad (*)$$

Praktisch interessant ist nun die umkehrte Frage: Lässt sich jede T–periodische Funktion $f(t)$ als Superposition von endlich oder unendlich vielen harmonischen Schwingungen darstellen? Wenn ja, so ergeben sich daraus einige Analysemöglichkeiten.

Diese Untersuchungen werden als **Harmonische Analyse (FOURIERsche Analyse)** bezeichnet. Die Reihen (*) werden als **Fourierreihen** oder auch **trigonometrische Reihen** bezeichnet (Jean Baptiste Joseph FOURIER 1768-1830), wobei allerdings (*) noch um einen Summanden, den man zweckmäßigerweise mit $\frac{1}{2}a_0$ bezeichnet, ergänzt werden muss.

Treten nur endlich viele Summanden auf, so liegt ein **trigonometrisches Polynom** vor.

Ein Kriterium, wann eine periodische Funktion als Fourierreihe darstellbar ist, geht auf DIRICHLET (Peter Gustav Lejeune-DIRICHLET, 1805-1859, Freund von Fourier) zurück, ist praktisch so gut wie immer erfüllt und lässt sich im wesentlich wie folgt formulieren.

Dirichlet-Kriterium:

Wenn die periodische Funktion $f(t)$ in ihrem Grundintervall $[0, T]$
- stückweise monoton und
- nur an endlich vielen Stellen nicht definiert ist bzw. einen endlichen Sprung hat,
- ansonsten aber stetig ist,

so konvergiert ihre Fourierreihe und stimmt an allen Stetigkeitsstellen mit $f(t)$ überein.

An den Unstetigkeitsstellen liefert sie das arithmetische Mittel aus links- und rechtsseitigem Grenzwert der Funktion.

Berechnung der Fourier-Koeffizienten:

Wir beschreiben jetzt, wie man die Koeffizienten a_n, b_n berechnen kann, und gehen dazu von einer T-periodischen Funktion $f(t)$ aus, die obiges Kriterium erfüllt.

Ausgangspunkt ist also die Gleichung

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]} \quad (**)$$

und als Grundintervall wählen wir o.B.d.A. das Intervall $[0, 2\pi]$.

Zunächst stellen wir unter Verwendung der **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha \cdot \cos\beta &= \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) \\ 2\sin\alpha \cdot \cos\beta &= \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) \\ 2\sin\alpha \cdot \sin\beta &= \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) \\ 2\sin^2\alpha &= 1 - \cos 2\alpha \\ 2\cos^2\alpha &= 1 + \cos 2\alpha \end{aligned}$$

einige **Hilfsgleichungen** bereit: (Man beachte $\omega T = 2\pi$)

$$\boxed{\text{1a.)} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)dt = \frac{T}{2} \qquad \text{für } n = m}\text{, denn}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)dt = \int_0^T \cos^2(n\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T (1 + \cos(2n\omega t))dt$$

$$= \frac{1}{2}\Big[t + \frac{1}{2n\omega}\sin(2n\omega t)\Big]_0^T = \frac{T + 0 - 0 - 0}{2}$$

$$\boxed{\text{1b.)} \int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)dt = 0 \qquad \text{für } n \neq m}\text{, denn}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega t) \cdot \cos(m\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T [\cos((n-m)\omega t) + \cos((n+m)\omega t)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\sin((n-m)\omega t) + \frac{1}{(n+m)\omega}\sin((n+m)\omega t)\right]_0^T = 0$$

$\boxed{2.)\int_0^T \cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt = 0}$, denn

$$\int_0^T \cos(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T [\sin((m-n)\omega t) + \sin((m+n)\omega t)]dt$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2n\omega}\cos(2n\omega t\right]_0^T & \text{für } n = m \\ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\cos((m-n)\omega t) - \frac{1}{(n+m)\omega}\cos((m+n)\omega t)\right]_0^T & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

$$= 0$$

$\boxed{3a.)\int_0^T \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt = \frac{T}{2} \qquad \text{für } n = m}$, denn

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt = \int_0^T \sin^2(n\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T (1-\cos(2n\omega t))dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2n\omega}\sin(2n\omega t)\right]_0^T = \frac{T}{2}$$

$\boxed{3b.)\int_0^T \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt = 0 \qquad \text{für } n \neq m}$, denn

$$\int_0^T \sin(n\omega t)\cdot\sin(m\omega t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T [\cos((n-m)\omega t) - \cos((n+m)\omega t)]dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-m)\omega}\sin((n-m)\omega t) - \frac{1}{(n+m)\omega}\sin((n+m)\omega t)\right]_0^T = 0$$

Wir integrieren jetzt die Gleichung (**)

$$\int_0^T f(t)\ dt = \frac{a_0}{2}\int_0^T dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\ dt + b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\ dt\right]$$

$$= \frac{a_0}{2}T + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left[\frac{1}{n\omega}\sin(n\omega t)\right]_0^T + b_n\left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_0^T\right)$$

$$= \frac{a_0}{2}T + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\left[\frac{1}{n\omega}(0-0)\right] + b_n\left[-\frac{1}{n\omega}(1-1)\right]\right)$$

$$= \frac{a_0}{2}T$$

und erhalten hieraus

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ dt}.$$

Wir wiederholen die Prozedur nachdem wir die Gleichung (**) mit $\cos(m\omega t)$ bzw. mit $\sin(m\omega t)$ multipliziert haben (und verwenden dabei die obigen Hilfsgleichungen):

$$\int_0^T f(t)\cdot\cos(m\omega t)\ dt$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^T \cos(m\omega t)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\cos(m\omega t)\ dt + b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\cos(m\omega t)\ dt\right]$$

$$\underline{= a_m\frac{T}{2}}$$

$$\int_0^T f(t)\cdot\sin(m\omega t)\ dt$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_0^T \sin(m\omega t)\ dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_0^T \cos(n\omega t)\sin(m\omega t)\ dt + b_n\int_0^T \sin(n\omega t)\sin(m\omega t)\ dt\right]$$

$$\underline{= b_m\frac{T}{2}}$$

Wir erhalten aus diesen beiden Gleichungen

$$\boxed{a_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos(m\omega t)\ dt \quad\Bigg|\quad b_m = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(m\omega t)\ dt},$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots$$

$a_0,\ a_m,\ b_m,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ werden als **Fourierkoeffizienten** bezeichnet.

Wir fassen zusammen:

1.) Erfüllt eine T-periodische Funktion $f(t)$ die DIRICHLET-Bedingungen, so lässt sie sich an allen Stetigkeitsstellen durch die Fourierreihe

$$\boxed{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]}$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t)\ dt}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t)\ dt} \quad \boxed{b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t)\ dt},$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

darstellen. Ist $f(t)$ an der Stelle t_0 nicht definiert oder hat dort einen endlichen Sprung, so stellt die Fourierreihe den Mittelwert

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t \to t_0 + 0} f(t) + \lim_{t \to t_0 - 0} f(t) \right)$$

dar.

2.) Die Berechnung der Fourierkoeffizienten kann man oft vereinfachen, wenn man die folgenden Tatsachen beachtet.

a) Anstelle von $[0, T]$ kann auch $\left[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2} \right]$ bzw. jedes Intervall der Länge T als Integrationsintervall genommen werden.

b) Ist $f(t)$ eine **gerade** Funktion, d.h. $f(-t) = f(t)$, so sind alle $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \cos(n\varpi t)\ dt$$

c) Ist $f(t)$ eine **ungerade** Funktion, d.h. $f(-t) = -f(t)$, so sind alle $a_n = 0$ und

$$b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{T/2} f(t) \cdot \sin(n\varpi t)\ dt\ .$$

Merke: Ein periodischer Vorgang lässt sich interpretieren als eine Summenwirkung von harmonischen Schwingungen, deren Frequenzen Vielfache einer Grundfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ sind.

Die Gesamtheit dieser harmonischen Schwingungen bezeichnet man als das **Spektrum der Funktion** $f(t)$. Dieses Spektrum ist durch die Zuordnungen

$$\boxed{n\omega \to a_n \text{ und } n\omega \to b_n}$$

charakterisiert. Man spricht vom **Kosinus- und Sinusspektrum**.

Andere Darstellungsmöglichkeiten einer Fourierreihe:

1.) Aus $A_n \cdot \cos(n\omega t + \varphi_n) = a_n \cdot \cos(n\omega t) + b_n \cdot \sin(n\omega t)$

mit

$$a_n = A_n \cdot \cos\varphi_n\ ,\ b_n = -A_n \cdot \sin\varphi_n$$

bzw.

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\ ,\ \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}\ ,\ n = 1, 2, \ldots\ .$$

(siehe auch Anfang Abschnitt Fourierreihen) folgt die Darstellung

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)]}\ ,\ A_0 = \frac{a_0}{2}.$$

Bei den Zuordnungen

$$\boxed{n\omega \to A_n \quad , \quad n\omega \to \varphi_n}$$

spricht man vom **Amplituden-** bzw. **Phasenspektrum.**

2.) Setzt man die Integralformeln für die Fourierkoeffizienten in die Reihe ein, so erhält man

$$f(t) = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(\tau)\ d\tau + \frac{2}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\omega t)\cdot\int_0^T f(\tau)\cdot\cos(n\omega\tau)\ d\tau$$

$$+\frac{2}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n\omega t)\cdot\int_0^T f(\tau)\cdot\sin(n\omega\tau)\ d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(\tau)\ d\tau + \frac{2}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T f(\tau)\cdot(\cos(n\omega t)\cdot\cos(n\omega\tau) + \sin(n\omega t)\cdot\sin(n\omega\tau))\ d\tau\right]$$

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{T}\cdot\int_0^T f(\tau)\ d\tau + \frac{2}{T}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^T f(\tau)\cdot\cos(t-\tau)\ d\tau\right]}.$$

3.) Schließlich wird häufig noch eine **komplexe Darstellung** bevorzugt. Man gelangt zu ihr über die schon im vorigen Abschnitt bereitgestellten Beziehungen

$$\cos y = \frac{e^{jy} + e^{-jy}}{2} \quad , \quad \sin y = \frac{e^{jy} - e^{-jy}}{2j}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[a_n(e^{j(n\omega t)} + e^{-j(n\omega t)}) - j\cdot b_n(e^{j(n\omega t)} + e^{-j(n\omega t)})]\ \text{(Man beachte } \frac{1}{j} = -j\text{ !)}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - j\cdot b_n)\cdot e^{j(n\omega t)} + (a_n + j\cdot b_n)\cdot e^{-j(n\omega t)}]$$

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cdot e^{j(n\omega t)} + \sum_{n=1}^{\infty}\overline{c}_n\cdot e^{-j(n\omega t)}}$$

mit

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2}\cdot(a_n - j\cdot b_n)}.$$

Noch komprimierter erhält man

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\cdot e^{j(n\omega t)}}$$

mit

$$c_n = \frac{1}{2}\cdot(a_n - j\cdot b_n)\ ,\quad n = 0,1,2,\ldots;\ b_0 = 0$$
$$c_{-n} = \overline{c}_n = \frac{1}{2}\cdot(a_n + j\cdot b_n)\ ,\quad n = 1,2,\ldots$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten kann man mit etwas Übung auch direkt aus den Formeln

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt} \quad \boxed{c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot e^{-j(n\omega t)}\ dt}\ , \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

berechnen.

Bei der Zuordnung

$$\boxed{n\omega \to c_n}$$

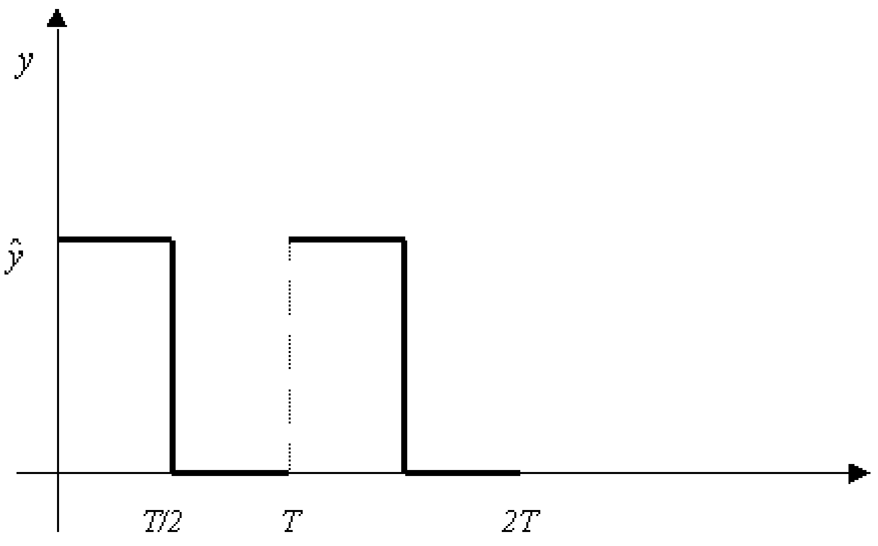
spricht man vom **komplexen Spektrum.**

7.2.4 Wichtige Fourier-Reihen

Hier werden nur die Ergebnisse angegeben. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten erfolgt in der Vorlesung.

1. Rechteckskurve

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}\ , \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

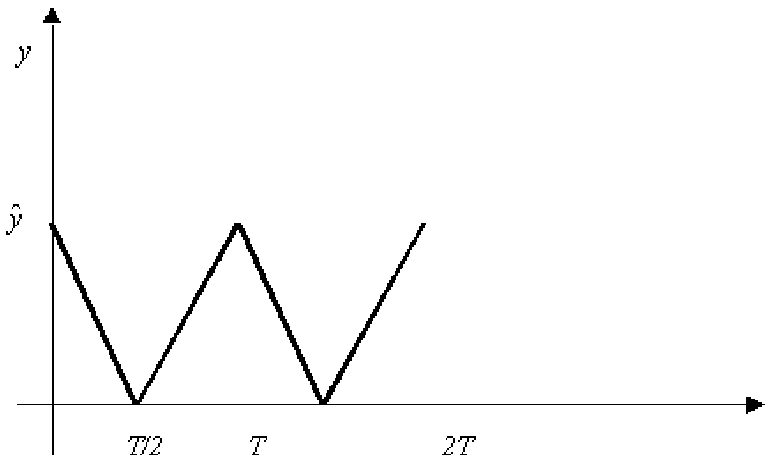


$$a_0 = \hat{y}, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = -\frac{2\hat{y}}{2n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \begin{cases} \frac{2\hat{y}}{n\pi} & \text{für ungerades } n \\ 0 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{2\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + \ldots\right]$$

2. Dreieckskurve

$$y(t) = \begin{cases} -\dfrac{2\,\hat{y}}{T} \cdot t + \hat{y} & \text{für } \; 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ \dfrac{2\,\hat{y}}{T} \cdot t - \hat{y} & \text{für } \; \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases} , \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

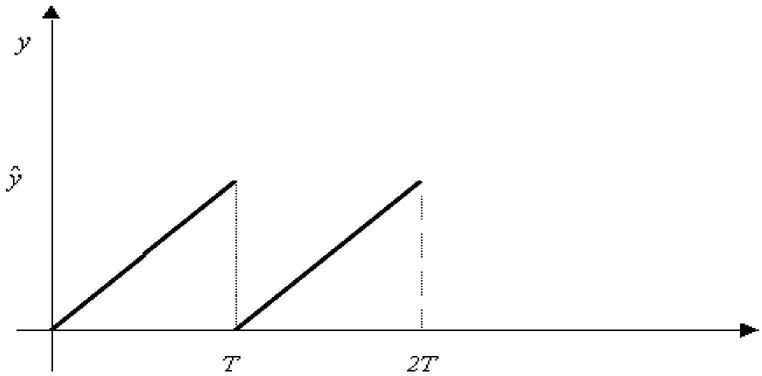


$$a_0 = \hat{y}, \qquad a_n = \begin{cases} \dfrac{4\,\hat{y}}{n^2\pi^2} & \text{für ungerades } n \\ 0 & \text{für gerades } n \end{cases} , \qquad b_n = 0$$

$$.y(t) = \frac{\hat{y}}{2} + \frac{4\,\hat{y}}{\pi^2}\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{3^2}\cos(3\omega t) + \frac{1}{5^2}\cos(5\omega t) + \ldots\right]$$

3. Kippschwingung (Sägezahnimpuls)

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{T} \cdot t, \;\; 0 \le t < T \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

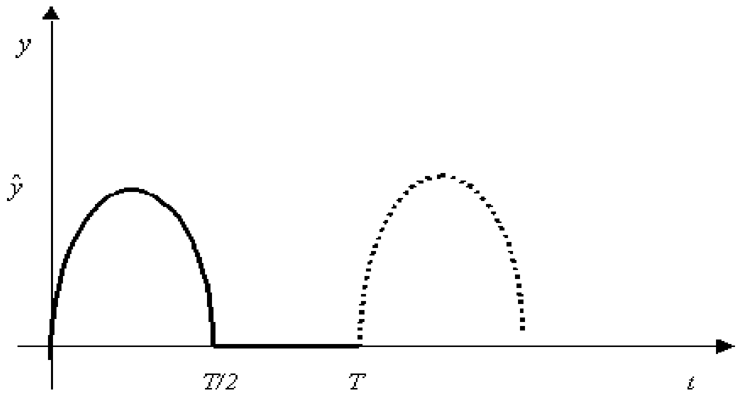


$$a_0 = \hat{y}, \qquad a_n = 0, \qquad b_n = -\frac{\hat{y}}{n\pi}$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{2} - \frac{\hat{y}}{\pi}\left[\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\sin(2\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \ldots\right]$$

4. Einweggleichrichter (Sinus-Impuls)

$$y(t) = \begin{cases} \hat{y}\,\sin\omega t \quad \text{für} \quad 0 \le t \le \dfrac{T}{2} \\ 0 \quad \text{für} \quad \dfrac{T}{2} \le t \le T \end{cases}, \qquad (\omega = \frac{2\pi}{T})$$



$$a_0 = \frac{2\,\hat{y}}{\pi}, \qquad a_n = \begin{cases} 0 \text{ für } n = 1 \\ 0 \text{ für } n > 1 \text{ ungerade} \\ -\dfrac{4\,\hat{y}}{2\pi(n+1)(n-1)} \text{ für } n > 1 \text{ gerade} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{\hat{y}}{2}, \qquad b_n = 0,\ n > 1$$

$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2}\sin(\omega t) - \frac{2\,\hat{y}}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3}\cos(2\omega t) + \frac{1}{3\cdot 5}\cos(4\omega t) + \ldots\right]$$